

Étude d'un nano-résonateur électro-mécanique

Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques et applications des résonateurs mécaniques à l'échelle nanométrique. Il aborde la technique d'excitation et de détection électro-mécanique de vibrations nanométriques qui a été développée dans plusieurs laboratoires au début des années 2000.

Les différentes parties du problème (numérotées avec des chiffres romains) sont très largement indépendantes. On pourra utiliser les résultats intermédiaires donnés dans le texte pour aborder les parties suivantes.

Données

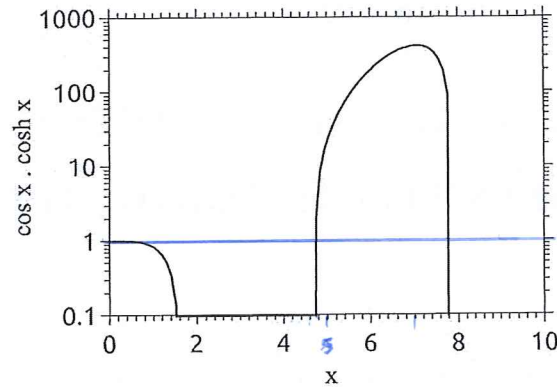
- Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
- Permittivité diélectrique relative de la silice à basse fréquence : $\epsilon_r(\text{SiO}_2) = 4,0$
- Module d'Young d'un nanotube de carbone : $B = 1 \text{ TPa} = 1 \times 10^{12} \text{ Pa}$
- Masse volumique d'un nanotube de carbone : $\rho = 2,3 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- Diamètre d'un nanotube de carbone : $d_0 = 1,0 \text{ nm}$
- Masse molaire du carbone : $M_C = 12 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro : $N_a = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

Formulaire

- Pour les grandeurs périodiques (telles qu'une tension V) de pulsation $\omega = 2\pi f$ (où f est la fréquence), la notation $\underline{V}(t) = \underline{V}^\omega e^{j\omega t} = V^\omega e^{j\phi} e^{j\omega t}$ correspond à la représentation complexe, tandis que la grandeur réelle est notée $\tilde{V}(t) = V^\omega \cos(\omega t + \phi)$
- On rappelle que

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

- On donne le tracé de la fonction $\cosh(x) \cdot \cos(x)$ entre 0 et 10 en échelle semi-logarithmique.



I – Rappels généraux sur l'oscillateur harmonique

On considère un point matériel de masse m évoluant dans un champ unidimensionnel d'énergie potentielle quadratique $V(z) = \frac{1}{2}Kz^2$, où K est la raideur de l'oscillateur.

1. Donner l'expression de la force s'exerçant sur le point matériel. En déduire l'équation du mouvement.
2. Quelle est la solution générale de cette équation ? Combien faut-il de conditions initiales pour la déterminer entièrement ? Exprimer la pulsation propre ω_0 en fonction de K et m .
3. On modélise la dissipation dans cet oscillateur par une force de frottement fluide linéaire en vitesse $\vec{f} = -\gamma m \vec{v}$. Donner la nouvelle équation du mouvement.

Dans toute la suite du problème, on supposera que cet amortissement est faible, de sorte que $\gamma \ll \omega_0$. On s'intéresse aux oscillations libres de ce système dont la solution peut alors se mettre sous la forme : $z(t) = z_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

4. Donner l'expression approchée de l'énergie mécanique du système.
5. On définit le facteur de qualité Q de l'oscillateur comme le rapport entre son énergie mécanique et l'énergie dissipée pendant une durée $1/\omega_0$. Établir l'expression de Q en fonction de ω_0 et γ . On rappelle que $Q > 0$.

On s'intéresse maintenant au régime sinusoïdal forcé où le point matériel est soumis à une force excitatrice supplémentaire que l'on notera en représentation complexe $\vec{F} = F_0 e^{j\omega t} \vec{e}_z$ avec $F_0 > 0$. On négligera le régime transitoire.

6. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{z}^\omega$ des oscillations en fonction de F_0 , m , ω_0 , ω et γ . Préciser l'expression du module z^ω et de la phase ϕ de $\underline{z}^\omega$.
7. Donner l'expression approchée du déplacement complexe $\underline{z}(t)$ lorsque $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$.

8. Montrer alors que la puissance moyenne reçue par l'oscillateur vaut

$$\mathcal{P} = \frac{F_0^2 \gamma / (8m)}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (1)$$

9. Tracer l'allure de $\mathcal{P}$ en fonction de ω . Donner l'expression de sa largeur à mi-hauteur.
10. Toujours dans l'approximation $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, donner l'expression de $\text{Re}(z^\omega)$ la partie réelle de z^ω en fonction de F_0 , m , ω , ω_0 et Q . Tracer son allure sur le même graphe que celui de la question précédente.
11. Donner un exemple, dans un domaine autre que la mécanique, de système physique bien modélisé par un oscillateur harmonique amorti. Expliciter la signification physique de z , du potentiel quadratique et du terme de dissipation. Préciser l'ordre de grandeur de la fréquence propre $f_0 = \omega_0/2\pi$ et du facteur de qualité Q .

Nano-oscillateurs électro-mécaniques

Dans tout ce problème, on s'intéresse au dispositif représenté sur la figure 1, constitué d'un nanotube de carbone suspendu au dessus d'une tranchée creusée dans un diélectrique (SiO_2). Les deux extrémités du nanotube sont recouvertes par des électrodes en or (appelées drain et source) qui permettent à la fois d'assurer l'immobilité mécanique des extrémités et d'injecter un courant électrique dans le nanotube. Par ailleurs, une troisième électrode (appelée grille) est située au fond de la tranchée. La source est toujours reliée à la masse du circuit électrique. On donne les dimensions caractéristiques suivantes : diamètre du nanotube $d_0 = 1,0 \text{ nm}$, longueur suspendue $L = 1,5 \mu\text{m}$ et hauteur $h_0 = 400 \text{ nm}$.

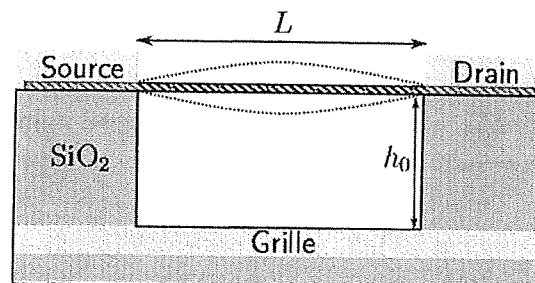


FIGURE 1 – Schéma du dispositif. Le nanotube correspond au cylindre hachuré. Les pointillés représentent le tube déformé sous l'effet de vibrations. Les électrodes métalliques sont représentées en gris clair tandis que les parties diélectriques sont en gris foncé. Les échelles ne sont pas respectées.

II – Étude mécanique

1. Ordres de grandeur

Dans toute cette partie, on cherche seulement à établir des ordres de grandeurs. Il n'est donc pas demandé de calculer précisément les différentes quantités. Le candidat est laissé libre de faire toutes les approximations qu'il jugera appropriées, en les justifiant.

On cherche à évaluer l'ordre de grandeur du module d'Young B d'un nanotube de carbone par des considérations microscopiques. La structure du nanotube de carbone est représentée sur la figure 2 (a). C'est un cylindre creux dont la paroi est constituée d'une mono-couche d'atomes de carbone en hybridation sp^2 . On note A l'aire de la section droite du nanotube, d_0 son diamètre et L sa longueur. La liaison entre deux atomes de carbone a une énergie E_{C-C} d'environ 5 eV et une longueur a_{C-C} d'environ 0,15 nm.

La raideur élastique d'un nanotube de carbone est donnée par son module d'Young B qui est le rapport entre la contrainte σ et la déformation relative du nanotube lors d'une traction (ou compression) longitudinale : $\sigma = B \frac{\Delta L}{L}$. La contrainte est reliée à la force appliquée sur une section droite par $\vec{F} = \sigma A \vec{n}$ où $\vec{n}$ est la normale sortante (figure 2 (b)).



FIGURE 2 – (a) Structure d'un nanotube de carbone. (b) Traction longitudinale sur un cylindre de section A .

12. Représenter l'allure du potentiel d'interaction entre deux atomes de carbone plus proches voisins. Faire figurer la distance a_{C-C} et l'énergie de liaison E_{C-C} .
13. Estimer le nombre de liaisons carbone-carbone dans un nanotube de longueur L et de diamètre d_0 , en fonction de d_0 , L et a_{C-C} .
14. De combien la liaison carbone-carbone s'allonge-t-elle lorsque l'opérateur impose une déformation (imaginaire) de 100% ? Estimer l'accroissement correspondant de l'énergie de la liaison C-C.
15. Exprimer l'énergie totale déposée dans le nanotube au cours de cette déformation en fonction de B , d_0 et L .
16. En déduire l'ordre de grandeur de B en fonction de E_{C-C} , d_0 et a_{C-C} . Les résultats expérimentaux donnent des valeurs comprises entre 20 GPa et 2,5 TPa. Commenter. On adoptera par la suite la valeur de 1 TPa comme indiqué dans le préambule.

2. Modes propres de vibration

Sous l'effet d'une excitation externe, le nanotube est susceptible de vibrer. On suppose que cette vibration a lieu dans le plan (xOz) et on note $z(x, t)$ l'écart local à la position d'équilibre (élongation transverse) comme représenté sur la figure 3. On cherche dans cette partie les modes propres de vibration du nanotube. On se limitera aux faibles déflexions ($|\frac{\partial z}{\partial x}| \ll 1$) et on négligera l'effet de la pesanteur. On notera $\mu = \rho A$ la masse linéique du nanotube.

Modes de tension

Dans cette partie, on supposera que le nanotube subit une tension mécanique statique T_0 qui est suffisamment grande pour qu'on puisse négliger les effets de la raideur interne. On négligera les dimensions internes du tube qu'on assimilera à un fil de masse linéique μ .

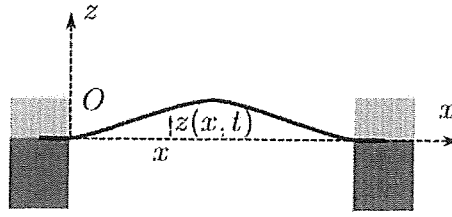


Figure 3 – Mode de vibration du nanotube représenté à un instant donné.

17. Effectuer un bilan de forces sur une portion de tube de longueur dx et établir l'équation de propagation des vibrations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

18. Dédurre de (2) la relation de dispersion des ondes transverses le long du nanotube. Comment peut-on définir la vitesse de propagation des ondes? Donner son expression. Cette propagation est-elle dispersive?
19. On cherche des solutions de cette équation sous forme d'ondes stationnaires harmoniques de type

$$z(x, t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \cos(\omega t)$$

Quelles sont les conditions aux limites imposées par la géométrie du dispositif? En déduire les fréquences propres de vibration.

20. On cherche à décrire le mode fondamental par un oscillateur harmonique unidimensionnel équivalent de masse $m_{\text{eff}} = \mu L$. Définir la raideur effective du mode fondamental et donner son expression en fonction de T_0 et L .

Modes de flexion

On s'intéresse maintenant au cas où les effets de la tension sont négligeables devant ceux de la raideur interne du nanotube. Dans toute cette partie, on assimilera le nanotube à un cylindre *plein* de diamètre d_0 . On notera ρ sa masse volumique et B son module d'Young. La configuration globale du nanotube à un instant donné est représentée sur la figure 3.

La courbe d'équation $z = z(x, t)$ dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (lié au laboratoire) est représentée en pointillés gras sur la figure 4 : c'est la ligne neutre du nanotube, c'est-à-dire la ligne passant au milieu du nanotube.

On examine les forces et moments s'exerçant sur une portion élémentaire du nanotube de longueur dx (mesurée sur la ligne neutre) tel que décrit sur la figure 4.

Lors de la déformation, les sections droites restent perpendiculaires à la ligne neutre. La partie du nanotube à l'intérieur de la courbure subit un effort de compression alors que celle à l'extérieur subit un effort de traction. Dans toute la suite du problème, on supposera que la déflexion reste faible c'est-à-dire que $|\frac{\partial z}{\partial x}| \ll 1$. En particulier, on pourra confondre les normales aux sections droites du nanotube avec $\pm \vec{e}_x$.

21. On note z' la cote d'un point du nanotube dans le repère local $(O', \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ où O' est le centre de la portion élémentaire étudiée. Montrer que l'allongement relatif de

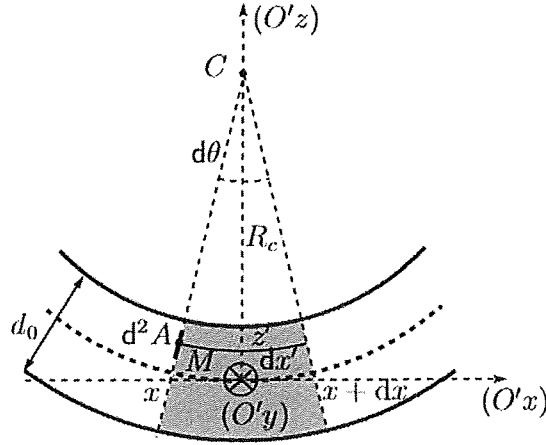


FIGURE 4 – Portion de nanotube en flexion (partie grisée).

la portion du nanotube à la cote z' s'écrit

$$\frac{dx' - dx}{dx} = -\frac{z'}{R_c}$$

où R_c est le rayon de courbure algébrique de la ligne neutre.

22. On rappelle que pour les petites déflexions, on a : $\frac{1}{R_c} \simeq \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. En déduire l'expression de la composante normale de la force qu'exerce la partie gauche du nanotube sur la section élémentaire d'aire d^2A centrée en un point M de la section droite d'abscisse x et de cote z' (figure 4). Représenter cette force élémentaire en fonction de z' . Que vaut la force normale totale s'exerçant sur cette section droite ?
23. On en déduit qu'il existe un couple suivant l'axe $(O'y)$ s'exerçant sur cette section droite d'abscisse x . Exprimer ce couple M_y par rapport à l'axe $(O'y)$ passant par le centre O' de la portion élémentaire de nanotube étudiée, en fonction de B , $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et I_y , avec $I_y = \iint_A z'^2 d^2A$. On donne $I_y = \pi d_0^4/64$.
24. On suppose par ailleurs que la force exercée par la partie gauche du nanotube possède aussi une composante verticale dont la résultante notée $F_z(x)$ s'exerce au centre de la section droite d'abscisse x . Exprimer le moment de cette force par rapport à l'axe $(O'y)$. Comment écrire la force exercée par la partie droite du nanotube sur la section d'abscisse $x + dx$? En déduire son moment par rapport à l'axe $(O'y)$.
25. Calculer le moment total des forces s'exerçant sur la portion de nanotube d'épaisseur dx de la figure 4. On admettra que l'approximation des petites déflexions consiste à négliger la rotation de la portion de nanotube étudiée. En déduire que le moment total des forces appliquées est nul et que $M_y(x+dx) - M_y(x) = [F_z(x+dx) + F_z(x)]dx/2$. Exprimer ensuite $F_z(x)$ en fonction de B , I_y et $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.
26. On note $\vec{f} = f_z \vec{e}_z$ la force extérieure par unité de longueur exercée sur le nanotube (pesanteur, force électrostatique...). Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la portion de nanotube d'épaisseur dx de la figure 4. En déduire une relation entre l'accélération $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, f_z , $\frac{\partial F_z}{\partial x}$, ρ et A .

27. Dédurre des deux questions précédentes que l'équation de propagation des vibrations s'écrit

$$BI_y \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = f_z \quad (3)$$

28. On cherche les modes propres du système (en l'absence de force appliquée : $f_z = 0$) sous la forme d'ondes stationnaires $z(x, t) = g(x) \cos(\omega t + \varphi)$. Montrer que l'équation (3) se ramène à : $\frac{d^4 g}{dx^4} = k^4 g$. Donner les valeurs de k permises en fonction de $k_0 = \sqrt[4]{\omega^4 \frac{\rho}{BI_y}}$.
29. Combien de conditions aux limites spatiales sont nécessaires pour déterminer la solution $z(x, t)$? Donner les conditions aux limites spatiales dans le cas où le nanotube de longueur L est encastré à ses deux extrémités sous des électrodes métalliques comme représenté sur la figure 3.
30. En développant la fonction $g(x)$ sur la base des exponentielles et en exprimant ces conditions aux limites, on trouve que les valeurs de k_0 permises sont données par $\cos(k_0 L) \cosh(k_0 L) = 1$ (on ne demande pas d'établir cette relation). Trouver graphiquement les deux premières solutions et donner leur valeur en fonction de L et d'un coefficient numérique à déterminer.
31. En déduire la valeur des deux premières fréquences de résonance pour un dispositif de longueur $1,5 \mu\text{m}$.
32. En utilisant la même démarche qu'à la question 20, définir la raideur effective du mode fondamental et donner son expression en fonction de B , I_y et L .
33. À quelle condition les effets de la tension du tube sont-ils négligeables devant ceux de la rigidité interne ? Exprimer cette condition par une relation entre T_0 , B , I_y et L .

III – Excitation des vibrations

Le nanotube et l'électrode de grille placée sous le dispositif constituent les deux armatures d'un condensateur (figure 1). On admettra que la capacité de ce condensateur pour une distance h entre le nanotube et la grille vaut

$$C_g(h) = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{4h}{d_0}\right)} \quad (4)$$

Dans cette partie on supposera que les électrodes de drain et de source sont reliées à la masse de sorte que $V_s = V_d = 0 \text{ V}$. De plus, on négligera la déformation du nanotube sous l'effet des vibrations, on supposera juste que son altitude moyenne $h = h_0 + z(t)$ varie au cours du temps.

34. Calculer l'incrément de charge dq_g de la grille lorsque la tension de grille augmente de dV_g . En déduire l'énergie électrostatique du condensateur lorsque la grille est portée au potentiel V_g .
35. Un opérateur provoque un déplacement quasi-statique élémentaire du nanotube en exerçant une force $\vec{F}_{op} = F_{op} \vec{e}_z$. Le générateur maintient la tension V_g constante. En effectuant un bilan d'énergie, donner l'expression de la force $\vec{F}_{op}$ en fonction de

l'énergie du condensateur. En déduire que la force exercée par la grille sur le nanotube à tension V_g imposée s'écrit

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{2} V_g^2 \left. \frac{dC_g}{dh} \right|_h \vec{e}_z \quad (5)$$

Représenter cette force sur un schéma.

Dans toute la suite, on supposera que l'amplitude des vibrations reste faible devant h_0 de sorte que la force électrostatique reste indépendante de ces vibrations. On utilisera les notations suivantes : $C_g = C_g(h_0)$ et $C'_g = \left. \frac{dC_g}{dh} \right|_{h_0}$.

36. Donner l'expression de C'_g . Calculer les valeurs de C_g et C'_g dans le cas du dispositif décrit ci-dessus.
37. Donner un ordre de grandeur de cette force pour $V_g = 1 \text{ V}$. La comparer au poids du nanotube. Commenter.

Pour exciter les oscillations du nanotube, on applique entre l'électrode de grille et le nanotube une tension $V_g = V_g^{\text{DC}} + \tilde{V}_g$ ayant une composante continue V_g^{DC} et une composante alternative $\tilde{V}_g$ telle que $|\tilde{V}_g| \ll V_g^{\text{DC}}$.

38. Développer l'expression de la force exercée sur le nanotube F_{el} jusqu'à l'ordre 1. Montrer que cette force a une composante continue et une composante alternative $\tilde{F}_{el}$ à la pulsation ω . À quoi sert la composante continue de la tension ?

Sous l'action de cette force périodique, des oscillations transverses du nanotube sont excitées dans le plan (xOz) . Dans toute la suite du problème, on négligera la forme du mode de vibration, et on assimilera le système à un oscillateur harmonique effectif soumis à une force F_{el} calculée pour $h = h_0$. La coordonnée de cet oscillateur $\tilde{z}(t) = z^\omega \cos(\omega t + \phi)$ correspond à l'élongation transverse du nanotube à un instant t moyennée le long de son axe. Ainsi la distance moyenne nanotube/grille s'écrit simplement $h(t) = h_0 + \tilde{z}(t)$.

IV – Détection électrique des vibrations

La détection électrique des vibrations mécaniques repose sur les propriétés de transistor à effet de champ du dispositif formé par le nanotube (appelé canal du transistor) relié aux trois électrodes. La propriété principale d'un tel dispositif est que la conductance G du canal peut être modulée par la tension de grille.

39. Rappeler l'allure qualitative de la structure de bandes d'un semi-conducteur au voisinage de sa bande interdite.
40. Qu'est-ce que le niveau de Fermi ? Représenter sa position sur la structure de bandes dans le cas d'un semi-conducteur intrinsèque. Même question dans le cas d'un semi-conducteur dopé n et d'un semi-conducteur dopé p . Indiquer qualitativement le remplissage des bandes à température finie.
41. Comparer la conductivité électrique à température ambiante du matériau dans ces trois cas de figure (on supposera, ce qui est vrai dans le cas des nanotubes, que la mobilité des trous est égale à celle des électrons). Justifier votre réponse.

42. La figure 5 représente la conductance drain-source G en fonction de la tension de grille V_g . Interpréter l'allure de cette courbe. Commenter l'expression "dopage électrostatique".

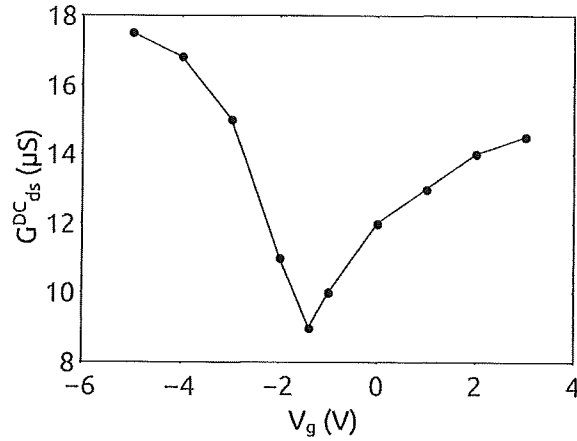


FIGURE 5 – Conductance drain-source G^{DC} du transistor en fonction de la tension de grille V_g en régime continu.

On s'intéresse aux petites variations de la conductance drain-source $\delta\tilde{G} = \frac{dG}{dq}\delta\tilde{q}$ lors de variations de l'état de charge du nanotube.

43. Justifier que la charge portée par le nanotube est $q = -C_g[h(t)]V_g$, où $V_g = V_g^{DC} + \tilde{V}_g$. Quels sont les deux effets responsables des petites variations alternatives $\delta\tilde{q}$ de la charge du nanotube? Exprimer ces deux contributions à l'ordre le plus bas non nul en fonction de V_g^{DC} , $\tilde{V}_g$, C_g , C'_g et $\tilde{z}$ amplitude de la vibration du nanotube. En déduire l'expression de la composante alternative de la conductance drain-source $\delta\tilde{G}$ en fonction des grandeurs précédentes et de $\frac{dG}{dq}$.
44. Expliquer le principe de la détection des oscillations avec un tel dispositif. Quel rôle joue V_g^{DC} du point de vue de la sensibilité de la détection?
45. Relier $\frac{dG}{dq}$ à la grandeur expérimentale $\frac{dG}{dV_g}$. En exploitant la figure 5, déduire l'ordre de grandeur de la variation de conductance $\delta\tilde{G}$, puis l'ordre de grandeur du courant I^ω lorsque les déplacements du nanotubes sont de l'ordre de $10 d_0$. On prendra $V_{ds}^{DC} = 100 \text{ mV}$ et $V_g^{DC} = 1 \text{ V}$.

Du fait de la taille nanométrique du nanotube, les contacts avec les électrodes de drain et de source présentent des résistances R_c qu'on supposera identiques et égales à $25 \text{ k}\Omega$. Ces résistances sont grandes devant la résistance du nanotube. Par ailleurs, les électrodes de drain et de source forment avec la grille des condensateurs (supposés identiques), de capacité C_c , qu'on assimilera à des condensateurs plan dont le diélectrique est la silice. Le schéma électrique équivalent du transistor est représenté sur la figure 6.

46. En supposant que la taille des contacts est de 1 mm^2 et utilisant les données disponibles, proposer une estimation de C_c . Comparer sa valeur à C_g . Conclure.

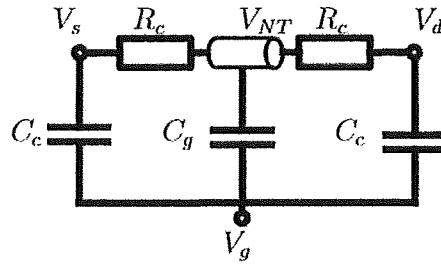


FIGURE 6 – Schéma électrique statique du dispositif. Le cylindre central représente le nanotube.

On cherche à détecter l'apparition d'une composante alternative $\tilde{V}_{ds}$ de la tension drain-source du fait des oscillations du nanotube. On suppose pour commencer que $\tilde{V}_g = 0$ V, c'est-à-dire que les seuls signaux alternatifs sont dus aux oscillations mécaniques du nanotube (entretenues par un mécanisme externe non précisé). On applique une tension continue V_{ds}^{DC} entre le drain et la source (la source étant reliée à la masse). Les variations de conductance du nanotube induites par les oscillations provoquent l'apparition d'un courant alternatif. On admettra que le schéma électrique équivalent pour les petits signaux est celui représenté sur la figure 7. Le générateur de courant équivalent émet un courant alternatif $\tilde{I}^\omega = \delta\tilde{G}V_{ds}^{DC}$.

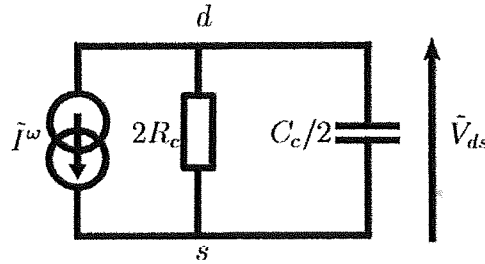


FIGURE 7 – Schéma électrique équivalent en petits signaux du transistor à nanotube.

47. Exprimer la composante alternative de la tension drain-source $\tilde{V}_{ds}$ en fonction de $\tilde{I}^\omega$ et des composants du circuit. Montrer que les contacts jouent le rôle d'un filtre passe-bas et donner la fréquence de coupure associée.
48. Calculer l'ordre de grandeur de la tension V_{ds}^ω pour une fréquence typique de 10 MHz. Quelle précaution sur l'impédance d'entrée de l'appareil de mesure faut-il prendre pour mesurer fidèlement cette tension ? On choisit ici une détection synchrone ayant une impédance d'entrée de l'ordre de 1 M Ω . Ce choix est-il convenable ?
49. L'instrument de mesure génère un bruit équivalent en entrée de 15 nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$. On souhaite typiquement pouvoir faire une mesure par milliseconde. Montrer qu'il est impossible d'utiliser ce dispositif pour détecter des mouvements du nanotube d'amplitude de l'ordre de $10d_0$ à une fréquence de 10 MHz.

Cette difficulté est générale car la plupart des nano-dispositifs possèdent intrinsèquement une grande impédance imposant une fréquence de coupure assez basse. Pour contourner ce problème, on peut utiliser une technique de détection hétérodyne pour ramener le

signal utile dans la bande-passante du nano-dispositif. Comme précédemment, le système est excité à la pulsation ω proche de la résonance mécanique en ajoutant une composante alternative $\tilde{V}_g(t) = V_g^\omega \cos \omega t$ à la tension de grille. On applique simultanément sur le drain une tension sinusoïdale légèrement décalée en fréquence : $\tilde{V}_{ds}(t) = V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \cos[(\omega + \Delta\omega)t]$. La source reste à la masse. On note $G = G^{\text{DC}} + \delta\tilde{G}$ la conductance totale drain-source. On admettra que l'ajout de cette tension drain-source ne change rien pour l'excitation des vibrations du nanotube.

50. Donner l'expression du courant traversant le nanotube. Montrer que ce courant contient trois composantes spectrales dont une à basse fréquence $\tilde{I}_{ds}^{\Delta\omega}(t)$. Donner son expression en fonction de $\frac{dG}{dV_g}$, C_g , C'_g , V_g^{DC} , V_g^ω , $V_{ds}^{\omega+\Delta\omega}$, z^ω et ϕ , où $\phi = \arg(z^\omega)$.
51. Comment choisir $\Delta\omega$ pour que cette méthode pallie les difficultés soulevées à la question 49 ? Dans la suite on utilisera $\Delta f = \Delta\omega/2\pi = 10$ kHz.

V – Étude de la résonance mécanique

1. Détection de la résonance

La figure 8 présente un spectre typique de $I_{ds}^{\Delta\omega}$ en fonction de la fréquence d'excitation $f = \omega/2\pi$ pour $V_g^\omega = 7$ mV, $V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} = 7$ mV et $V_g^{\text{DC}} = -3$ V.

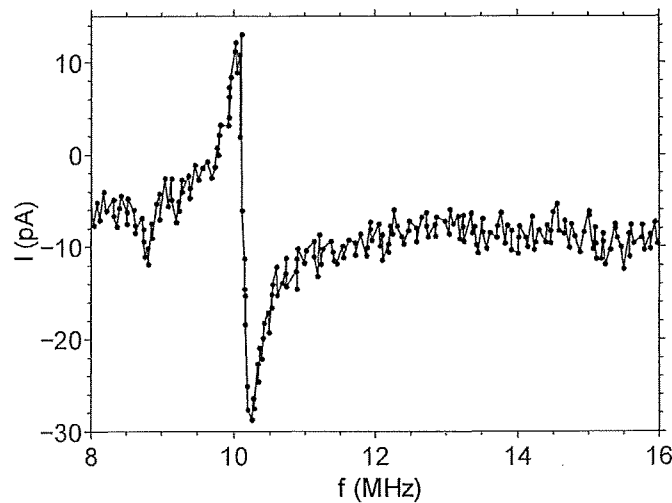


FIGURE 8 – Intensité $I_{ds}^{\Delta\omega}$ en fonction de la fréquence d'excitation f . (D'après V. Sazonova, PhD Thesis, Cornell University (2004))

52. En dehors de la résonance le signal est non nul alors que le déplacement du tube est négligeable. On notera I^{elec} ce signal. Quelle est son origine ? Donner son expression théorique en utilisant la question 50.
53. Dédurre de l'expression théorique et des données du problème une estimation de I^{elec} . Comparer à la valeur mesurée. Commenter.

54. La variation rapide de $I_{ds}^{\Delta\omega}$ au voisinage de 10 MHz est la signature d'une résonance mécanique du nanotube. On notera I^{meca} cette contribution à $I_{ds}^{\Delta\omega}$. Dédurre de la question 50 qu'on peut écrire $\tilde{I}^{meca} = I^{meca} \cos(\Delta\omega t - \phi)$, en précisant l'expression de l'amplitude I^{meca} en fonction de C_g , C'_g , dG/dV_g , V_g^{DC} , $V_{ds}^{\omega+\Delta\omega}$ et z^ω .

On mesure le courant $I_{ds}^{\Delta\omega}$ grâce à une détection synchrone asservie sur $\cos \Delta\omega t$, ce qui revient à multiplier le signal $\tilde{I}_{ds}^{\Delta\omega}$ par $\cos \Delta\omega t$ et à prendre la valeur moyenne.

55. Montrer que le signal mesuré peut s'écrire :

$$I_{ds}^{\Delta\omega} = \frac{1}{4} \frac{dG}{dV_g} V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} [V_g^\omega + V_g^{DC} \frac{C'_g}{C_g} \text{Re}(z^\omega)] \quad (6)$$

56. En utilisant les résultats de la question 10, justifier qualitativement l'allure de la courbe expérimentale de la figure (8).
57. On cherche maintenant à estimer l'amplitude z^{ω_0} des oscillations à résonance. Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser directement le signal mesuré à la résonance pour faire cette estimation. On peut montrer à partir des résultats de la question 10 que les deux extrema sont obtenus pour des pulsations $\omega_\pm = \omega_0 \pm \omega_0/2Q$ et que $\text{Re}(z^{\omega_\pm}) = \mp z^{\omega_0}/2$. On ne demande pas d'établir ces résultats. Estimer f_0 et Q à partir des données expérimentales.
58. Afin de s'affranchir des pertes parasites dans le circuit de mesure, on va utiliser le signal I^{elec} pour calibrer le signal I^{meca} . Exprimer z^{ω_0} en fonction de I^{elec} , $I^{meca}(\omega_+)$, C_g , C'_g , V_g^{DC} et V_g^ω .
59. En déduire une estimation de z^{ω_0} . Commenter.

2. Accordabilité du résonateur

60. Expliquer qualitativement pourquoi la tension V_g^{DC} peut modifier la fréquence de résonance mécanique.

On s'intéresse en premier lieu au régime où la rigidité de flexion du nanotube domine. On peut alors traiter l'influence de la tension mécanique T_0 du nanotube en perturbation. La fréquence de résonance du mode fondamental est donnée à l'ordre le plus bas par

$$\omega_0 = \frac{22}{L^2} \sqrt{\frac{BI_y}{\mu}} + 0,28 \frac{T_0}{\sqrt{\mu BI_y}} \quad (7)$$

Conformément aux observations expérimentales, on supposera que la longueur au repos L du nanotube est légèrement plus grande que la largeur W de la tranchée. Cette flèche est quantifiée par le paramètre $u = \frac{L-W}{L} \ll 1$. On cherche tout d'abord le lien entre la force électrostatique appliquée et la tension mécanique du nanotube. Pour simplifier, on supposera que la totalité de cette force est appliquée au centre du nanotube (figure 9).

61. Exprimer la tension T_0 à l'ordre le plus bas en u en fonction de la force électrostatique F_{el}^{DC} et u , puis en fonction de C'_g , V_g^{DC} et u .
62. En déduire l'expression de la pulsation du mode de vibration fondamental en fonction de la tension appliquée V_g^{DC} et de B , I_y , μ , L , C'_g , u .

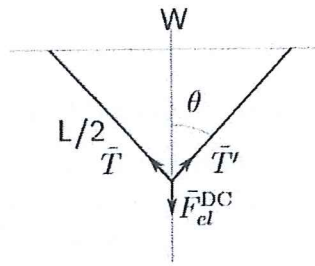


FIGURE 9 – Tension mécanique en présence d'une force appliquée au centre. Les forces $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ ont même norme T_0 . Les échelles ne sont pas respectées.

63. Donner l'expression de la tension $V_g^{\text{DC}, flex}$ pour laquelle on sort de l'approximation du mode de flexion. Calculer sa valeur numérique pour $u = 0,01$. Commenter.
64. On suppose alors que la vibration du nanotube est bien décrite par les modes de tension purs. En vous aidant des résultats de la partie II, donner l'expression de la pulsation du mode fondamental en fonction de T_0 , L et μ . En déduire l'expression de la pulsation du mode fondamental avec la tension électrique appliquée V_g^{DC} .
65. Tracer l'allure de la pulsation du mode fondamental $\omega_0(V_g^{\text{DC}})$ en fonction de la tension de grille V_g^{DC} .
66. La figure 10 donne la valeur de la fréquence de résonance mesurée sur un dispositif en fonction de la tension de grille V_g^{DC} appliquée. Commenter l'allure de ce graphe à la lumière des questions précédentes. Quels régimes sont atteints dans cette expérience? L'absence de points expérimentaux au voisinage de $V_g^{\text{DC}} = 0\text{ V}$ résulte de l'impossibilité de mesurer des oscillations. Pourquoi?

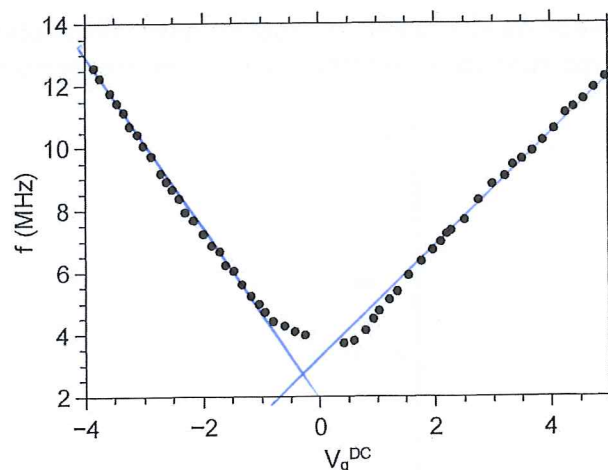


FIGURE 10 – Fréquence de résonance en fonction de la composante continue de la tension de grille V_g^{DC} . (D'après V. Sazonova *et al.*, Nature 431, 284 (2004))

VI – Dissipation

On s'intéresse aux phénomènes de dissipation dans le nano-résonateur.

67. Quel paramètre de la courbe de résonance donne une mesure quantitative de la dissipation ? En utilisant les résultats de la question 57 ou bien en faisant une estimation directe sur la figure 8, déduire la valeur du coefficient de dissipation γ dans l'approximation de l'oscillateur harmonique.

Différents mécanismes peuvent être à l'origine de la dissipation dans ce système. On distingue les mécanismes extrinsèques, liés à l'environnement du nanotube, des mécanismes intrinsèques au nanotube. Dans ce problème, on ne considère que le rôle des frottements fluides avec l'air.

68. En modélisant les molécules de l'air par des sphères dures de diamètre a , et en notant τ_D la durée moyenne entre deux collisions successives subies par une molécule, montrer qu'on a $n\pi a^2 v_r \tau_D = 1$ où n est le nombre de molécules par unité de volume et v_r est la vitesse relative quadratique moyenne entre deux molécules.
69. Montrer que $v_r = v_0 \sqrt{2}$ où v_0 est la vitesse quadratique moyenne. En déduire que le libre parcours moyen l_D des molécules de l'air s'écrit : $l_D = 1/(\sigma n)$ où $\sigma = \pi a^2 \sqrt{2}$ est la section efficace de collision des molécules.
70. Expliquer comment varie l_D avec la température et la pression et donner son ordre de grandeur dans les conditions normales de température et de pression.
71. On définit le nombre de Knudsen K_n comme le rapport entre l_D et la dimension transverse du résonateur. Expliquer pourquoi les frottements ne sont pas décrits correctement par les lois usuelles de la mécanique des fluides pour les grandes valeurs de K_n . Lorsque que $K_n > 10$, on entre dans un régime appelé régime du gaz raréfié. Quel est le domaine de pression correspondant à température ambiante ?
72. Dans l'approximation du gaz raréfié, on suppose que la distribution des vitesses dans le gaz n'est pas modifiée par la présence du corps en mouvement. Justifier.

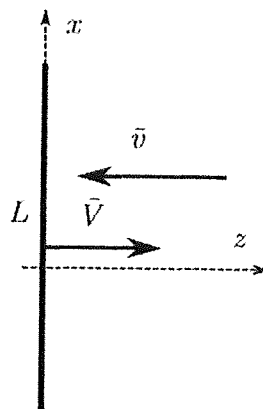


FIGURE 11 – Choc de molécules de l'air avec un plan représentant la section longitudinale du nanotube. Seuls les chocs frontaux sont considérés.

73. On considère une portion de nanotube de longueur L . Pour cette partie, on assimilera le nanotube à une surface plane de largeur d_0 . On examine la collision élastique d'une particule de vitesse $\vec{v}$ arrivant en incidence normale sur un plan animé d'une vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_z$. Exprimer le changement d'impulsion de la particule en fonction de sa masse m , de $\vec{v}$ et $\vec{V}$.
74. Pour simplifier le calcul de la force exercée par le gaz sur le nanotube, on supposera que les molécules ne peuvent se déplacer que suivant l'une des six directions $(\pm\vec{e}_x, \pm\vec{e}_y, \pm\vec{e}_z)$ avec une vitesse de norme v_0 représentant la vitesse quadratique moyenne. Seuls les chocs frontaux sont considérés. Montrer que la force résultant de l'action du gaz sur la face avant du nanotube s'écrit : $\vec{F}_{av} = -\frac{1}{3}mnd_0L(v_0 + V)^2\vec{e}_z$.
75. Calculer de même la force due à l'interaction entre le gaz et la face arrière. En déduire que la force totale est de type frottement fluide $\vec{f} = -\alpha_f\vec{V}$ et préciser l'expression de α_f en fonction de d_0 , L , v_0 , n et m . Comparer le résultat obtenu avec ce que vous connaissez des lois de frottement avec un fluide continu.

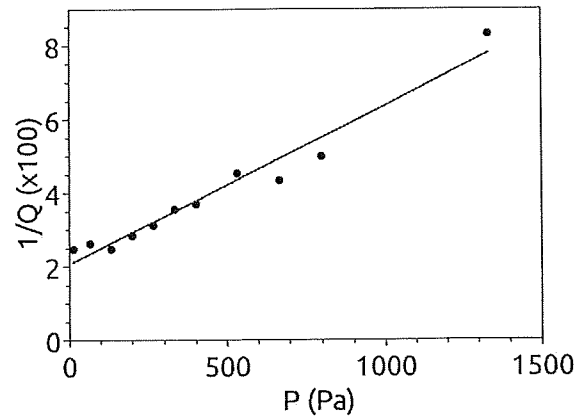


FIGURE 12 – Évolution de l'inverse du facteur de qualité du résonateur à 300 K en fonction de la pression appliquée. La ligne continue est un ajustement affine des données suivant la loi $1/Q = 0,021 + 4,3 \times 10^{-5}P$. (D'après V. Sazonova *et al.*, Nature 431, 284 (2004))

76. En considérant l'action du gaz sur une plaque immobile avec les mêmes hypothèses que précédemment, exprimer la pression P du gaz en fonction de n , m et v_0 . En utilisant l'approximation du gaz parfait, exprimer la vitesse v_0 en fonction de la température T , de la constante de Boltzmann k_B et de m .
77. En déduire l'expression de α_f en fonction de L , d_0 , P , m , k_B et T . Exprimer $1/Q$ en fonction de P , d_0 , μ (masse linéique du nanotube), ω_0 , m , k_B et T .
78. La figure 12 représente l'évolution de l'inverse du facteur de qualité du résonateur mesuré à température ambiante en fonction de la pression appliquée au dispositif. Interpréter ces résultats à la lumière du modèle précédent. Comparer les valeurs mesurées à l'ordre de grandeur qu'on peut déduire de la question précédente.
79. Pourquoi la grandeur $1/Q$ est-elle à privilégier pour mettre en évidence l'existence de plusieurs mécanismes dissipatifs ? Commenter le comportement à basse pression.

VII – Application : mesure de masses

Les nano-résonateurs peuvent être utilisés pour mesurer de très faibles masses à l'échelle de la molécule individuelle, en utilisant le décalage en fréquence du résonateur induit par l'adsorption d'une molécule ou d'un atome.

80. On définit la sensibilité en masse $\mathcal{R} = \left| \frac{\delta f}{\delta m} \right|$. En modélisant le résonateur par un oscillateur harmonique effectif, exprimer $\mathcal{R}$ en fonction de la masse effective de l'oscillateur m_{eff} et sa fréquence propre f_0 . Évaluer $\mathcal{R}$ pour l'oscillateur présenté sur la figure 8 (partie V).
81. Estimer l'ordre de grandeur du plus petit changement de fréquence qu'on puisse mesurer avec ce dispositif. Comment s'en déduit la résolution en masse du dispositif ? Sur quels paramètres de l'oscillateur peut-on jouer pour améliorer la résolution en masse (c'est-à-dire le plus petit changement de masse détectable) ?
82. Dans la pratique, la précision de mesure de la fréquence de résonance est limitée par les fluctuations du courant électrique qui traversent le nanotube. Ces fluctuations sont caractérisées, pour un temps de mesure $\tau = 1/\Delta f$ (où Δf est la bande passante de l'appareil de mesure), par leur écart-type $\sigma_I = \sqrt{\sum_{i=1}^N (I_\tau(i) - \langle I \rangle)^2 / N}$, où $I_\tau(i)$ représente la i -ème valeur du courant lors d'une série de N mesures consécutives avec un temps d'intégration τ et $\langle I \rangle$ représente la valeur moyenne du courant obtenue sur ces N mesures. Expliquer pourquoi ces fluctuations conduisent à une imprécision sur la mesure de la fréquence de résonance f_0 . Par analogie avec σ_I , on définit l'écart type σ_f sur la mesure de la fréquence de résonance. Quelle relation simple peut-on proposer entre σ_I , Q , I_0 (intensité à la résonance), f_0 et σ_f ? Commenter. En utilisant les résultats de la figure 8, donner l'ordre de grandeur du coefficient de proportionnalité entre σ_f et σ_I à 300 K.
83. On suppose que les fluctuations de courant électrique sont principalement dues au bruit Johnson-Nyquist, c'est-à-dire aux fluctuations de charge dans les résistances de contact sous l'effet de l'agitation thermique. On montre que ces fluctuations ont un spectre blanc $S_I = \sqrt{4Gk_B T}$ où G est la conductance du dipôle. Quelle est l'unité de S_I ? En déduire l'expression de σ_I en fonction de G , T et τ , puis celle de σ_f .
84. Estimer la valeur de σ_f à 300 K et à 30 K. On prendra $\tau = 10$ ms et $R = 1/G = 50$ k Ω . En déduire la résolution en masse qui en découle. Exprimer ce résultat en nombre d'atomes de carbone.
85. En utilisant les résultats de la figure 8, indiquer si les fluctuations thermiques d'intensité vous semblent être la cause principale de bruit dans le dispositif. Quelles autres sources de bruit pouvez-vous envisager ?
86. La figure 13 représente l'évolution de la fréquence fondamentale d'un nano-résonateur de longueur $L = 150$ nm (le diamètre du nanotube est supposé identique à celui des questions précédentes) mesurée à 4 K en présence d'une faible pression de vapeur de naphthalène ($C_{10}H_8$). La fréquence de résonance à vide de ce résonateur est de 2 GHz. Commenter l'allure de la courbe. Comparer la valeur des sauts de fréquence à celle attendue pour l'adsorption d'une molécule individuelle. Pourquoi les sauts de fréquence n'ont-ils pas tous la même valeur ?

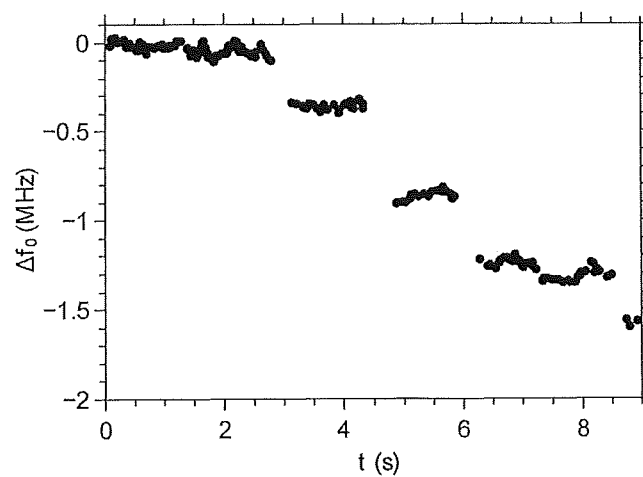


FIGURE 13 – Décalage en fréquence d'un nano-oscillateur de longueur $L = 150$ nm à 4 K exposé à une faible pression de naphtalène. (D'après J. Chaste *et al.*, Nature Nanotechnology 7, 301 (2012))

