

Quelques aspects de la physique du GPS (Global Positioning System)

Les différentes parties de ce problème peuvent être abordées pour l'essentiel de manière indépendante. Toutefois, la logique du problème recommande de suivre les parties dans l'ordre pour être en capacité de répondre de façon complète et éclairée à toutes les questions (notamment celles de la dernière partie). Certains résultats intermédiaires sont donnés dans le problème, il est possible de les utiliser pour les questions suivantes, même si on ne les a pas établis.

La copie doit être lisible, l'identification de la question traitée doit être évidente. La rédaction est un point essentiel de la correction : les explications peuvent être succinctes du moment qu'elles sont exhaustives et écrites dans un français correct.

Le « Global Positioning System » ou GPS est un système de positionnement terrestre par satellites. Le premier satellite a été envoyé en 1978. Actuellement, le système comprend 24 satellites opérationnels (Figure 1) orbitant à une altitude d'environ 20 180 km. L'ensemble des satellites constituent le segment spatial. Ces satellites émettent en permanence des signaux sous la forme de paquets d'ondes électromagnétiques sur deux fréquences ν_1 (1 575 420 000,000 Hz) et ν_2 (1 227 600 000,000 Hz) pilotées par des horloges atomiques à bord des satellites. Les signaux émis sont reçus et analysés par un récepteur sur la surface de la Terre (le segment utilisateur) comprenant une horloge.



FIGURE 1 – Satellite Navstar

Cinq stations au sol, dont la station maîtresse à Colorado Springs, composent le segment de contrôle. Elles communiquent avec la constellation de satellites pour assurer leur bon fonctionnement et mettre à jour les informations utiles pour les mesures. Ces stations sont connectées à des horloges atomiques de grande précision au sol afin d'assurer la synchronisation des horloges de la constellation.

Le principe de la mesure est de déterminer la distance ℓ_{ER} entre le satellite émetteur (E) et le récepteur (R) en mesurant le temps de propagation $\Delta t_{ER} = t_R - t_E$ du signal entre les deux instruments (t_R étant l'instant de réception et t_E l'instant d'émission). Dans le cas idéal où satellite et récepteur sont isolés et dans le vide, le temps de propagation est directement proportionnel à la distance : $\ell_{ER} = c \Delta t_{ER}$ où c est la célérité de la lumière dans le vide. Si l'on connaît les positions précises de plusieurs satellites émetteurs à l'instant de la mesure, il est possible d'en déduire la position du récepteur.

En pratique, chaque élément du système intervient dans la mesure en introduisant des incertitudes et des perturbations. De plus, l'espace de propagation, c'est-à-dire l'atmosphère, n'est pas le vide et il est nécessaire de modéliser son action sur le signal. La distance ℓ_{ER} ne représente donc plus une distance réelle (géométrique) entre le récepteur et l'émetteur, mais une pseudo-distance comprenant l'ensemble des effets intervenant dans la mesure. Il est notamment nécessaire de prendre en compte :

- l'erreur sur l'orbitographie du satellite et son positionnement
- la contribution de l'ionosphère à la propagation du signal
- la contribution de la troposphère à la propagation du signal
- les effets relativistes
- les décalages des horloges du récepteur et du satellite GPS
- les bruits associés au récepteur et à l'émetteur
- l'amplitude de phénomènes usuellement appelés « effets des trajets multiples » qui ne seront pas détaillés dans ce problème.

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques-uns des principaux facteurs intervenant dans la mesure et d'en déduire des contraintes sur le fonctionnement d'un système opérationnel.

Les données numériques du problème sont présentées, quand cela est possible, avec le nombre de chiffres significatifs correspondant à l'état de l'art des connaissances

R_0	6 371,0 km	rayon terrestre moyen
M_0	$5,9724 \times 10^{24}$ kg	masse terrestre
ϵ_0	$8,854\,187\,817 \times 10^{-12}$ F · m ⁻¹	permittivité du vide
μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N · A ⁻²	perméabilité magnétique du vide
π	3,141 592 653 59 ...	
G	$6,674\,08 \times 10^{-11}$ m ³ · kg ⁻¹ · s ⁻²	constante gravitationnelle
c	299 792 458 m · s ⁻¹	vitesse de la lumière
m_{at}	$1,660\,539\,040 \times 10^{-27}$ kg	unité de masse atomique
m_{C}	132,905 451 96 m_{at}	masse du Césium
k_{B}	$1,380\,648\,52 \times 10^{-23}$ J · K ⁻¹	constante de Boltzmann
e	$1,602\,176\,6208 \times 10^{-19}$ C	unité de charge
m_{e}	$9,109\,383\,56 \times 10^{-31}$ kg	masse de l'électron
R	$8,314\,4598$ J · mol ⁻¹ · K ⁻¹	constante des gaz parfaits

On rappelle que pour un vecteur $\vec{V}$ quelconque

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{V}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{V}) - \Delta \vec{V}$$

Ordres de grandeurs

Dans cette partie, l'objectif est de calculer quelques caractéristiques et ordres de grandeur du système GPS. On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, ce qui revient à considérer la Terre comme isolée. On suppose de plus qu'elle est sphérique, homogène et sans rotation. L'origine O est située au centre de la Terre. Un satellite de masse m tourne autour d'elle avec une orbite fermée circulaire à l'altitude $h_c = 20180$ km.

1. Déterminer le module de la vitesse du satellite v_c dans le référentiel géocentrique en fonction des données du problème. Effectuer l'application numérique.
2. Déterminer et calculer numériquement la période T_{orb} de cette orbite.
3. On néglige les effets de l'atmosphère en faisant l'hypothèse que le signal se propage dans le vide. Calculer le temps de propagation t_0 du signal du satellite à un récepteur situé à la surface de la Terre lorsque le satellite passe à la verticale du récepteur.
4. Si l'on souhaite un positionnement à une précision meilleure que le mètre, déterminer la précision nécessaire sur la mesure du temps de propagation. Commenter.
5. Dans le cas idéal où l'on ne prend en compte aucune incertitude, ni aucune perturbation dans le système, où les positions des satellites sont parfaitement connues, déterminer le nombre de satellites nécessaires simultanément pour une mesure de positionnement d'un récepteur situé sur la surface terrestre.
6. Les horloges des satellites sont synchronisées par le segment de contrôle, mais l'horloge du récepteur peut généralement montrer un décalage par rapport aux horloges des satellites. Même question qu'en (5).

Orbites des satellites

On suppose à présent que l'orbite du satellite est elliptique. On se place toujours dans le référentiel géocentrique et on suppose que la Terre est sphérique, homogène et sans rotation. On appelle r la distance entre le satellite et le centre de la Terre O ; $\vec{r}$ représente ainsi le vecteur position du satellite, $\vec{v}$ sa vitesse et $\vec{a}$ son accélération.

Enfin, on suppose toujours que la masse du satellite est négligeable devant celle de la Terre.

7. Montrer, en utilisant les caractéristiques de la force gravitationnelle, que l'orbite du satellite est plane.
8. On se place désormais dans le plan de l'orbite. Un système de coordonnées polaires (r, θ) est utilisé. On choisit l'origine de l'angle θ quand le satellite est au plus proche de la Terre. On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base orthonormée associée aux coordonnées polaires. On appelle apogée la position où le satellite est à la distance maximale $r_{\max}$ de la Terre et périégée la position correspondant à la distance minimale $r_{\min}$. Faire un schéma en indiquant les caractéristiques de l'orbite ainsi que le repère.
9. Exprimer les composantes a_r et a_θ de l'accélération dans ce repère.
10. Donner l'expression de la seconde loi de Newton dans ce repère.
11. On pose $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$. Retrouver la loi des aires ou deuxième loi de Képler en précisant ce que représente C .
12. On pose : $u = 1/r$. Déterminer l'expression de la composante radiale de l'accélération en fonction de C , de u et des dérivées de u par rapport à θ .
13. Montrer que l'équation de l'orbite est du type

$$r = \frac{C^2}{K} \frac{1}{1 + e_0 \cos \theta}$$

On exprimera K en fonction des données du problème.

Donner la signification géométrique de e_0 .

14. Donner, en fonction de e_0 , C , K , le demi grand-axe A et le demi petit-axe B correspondant à la solution proposée dans la question précédente. On donnera les unités et les dimensions des quantités explicitées. Nommer la position particulière où se trouve le centre de la Terre.
15. Vérifier que l'on a la relation

$$v^2 = 2K \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2A} \right)$$

16. On donne $A = R_0 + h_c$ et $e_0 = 0,01$. Calculer numériquement la distance $r_{\max}$ (respectivement $r_{\min}$) du satellite au centre de la Terre lorsqu'il est à l'apogée (respectivement au périégée). En déduire les valeurs maximale $v_{\max}$ et minimale $v_{\min}$ de la vitesse du satellite.

Déplacement de fréquence par effet Doppler classique et relativiste

Le principe de mesure du système porte sur la comparaison des horloges dans le satellite avec une horloge au sol (à la surface de la Terre de rayon R_0) que l'on suppose fixe par rapport au référentiel géocentrique. On suppose que les horloges sont identiques et utilisent la même fréquence de référence dans leur référentiel propre. L'objectif de cette partie est d'estimer les effets Doppler classiques et relativistes sur la mesure de la fréquence de l'horloge du satellite dans le référentiel lié au récepteur. On appelle ν la fréquence émise par l'horloge du satellite telle qu'elle est captée par le récepteur et ν_0 la fréquence de référence des horloges.

Effet Doppler classique

17. Dans le cadre de la composition classique des vitesses, déterminer l'expression classique du décalage en fréquence $\frac{\Delta\nu_{cl}}{\nu_0} = \left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)_{cl}$ par effet Doppler lorsque le satellite a une vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel du récepteur. La vitesse $\vec{v}$ présente un angle ϕ par rapport à la ligne de visée (figure 2).

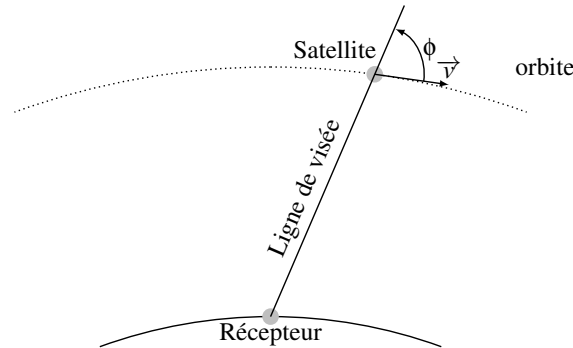


FIGURE 2 – Positions du récepteur et du satellite pour la détermination de l'effet Doppler classique

18. On fait de nouveau l'hypothèse que le satellite suit une orbite circulaire. On suppose que la Terre est sphérique, sans rotation, et que le récepteur peut capter le signal du satellite dès que celui-ci est plus haut que l'horizon. Enfin, on suppose que la trajectoire du satellite le fait passer à la verticale du récepteur. Déterminer comment varie la fréquence du signal émis par le satellite, pendant la traversée du satellite d'un bout à l'autre de l'horizon.
19. On considère un temps de mesure, caractéristique du choix du récepteur, $t_{mes} = 1$ s. On admet que l'erreur induite par l'effet Doppler sur la mesure du temps de propagation

s'écrit : $\delta t_{\text{ER}} = \frac{\Delta\nu_{\text{cl}}}{\nu_0} t_{\text{mes}}$. Calculer l'erreur en position issue de l'effet Doppler classique. Commenter la pertinence de compenser un tel phénomène et conclure sur les paramètres d'orbite que le récepteur doit connaître pour permettre un positionnement satisfaisant.

Relativité restreinte

20. On prend en compte à présent les effets prédits par la relativité restreinte. On suppose que le satellite suit une orbite circulaire qui passe à la verticale du récepteur. On pose $\tau = \frac{1}{\nu}$ la période du signal du satellite dans le référentiel du récepteur à l'instant où celui-ci passe à la verticale du récepteur. Déterminer τ en fonction de la vitesse v_c , de la période de référence $\tau_0 = \frac{1}{\nu_0}$ de l'horloge et des données du problème.
21. Déterminer la variation relative $\frac{\Delta\nu_{\text{RR}}}{\nu_0} = \left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)_{\text{RR}}$ en fréquence par effet Doppler transverse prédite par la relativité restreinte en fonction de la vitesse v_c et des données du problème. On précisera dans quel sens a lieu la variation en fréquence.
22. Application numérique : en faisant les mêmes hypothèses que celles de la question (19), déterminer l'erreur induite sur la mesure de distance au satellite pour un temps de mesure d'une seconde si l'on ne prend pas en compte cet effet de dérive.

Relativité générale

23. On suppose maintenant que le satellite reste fixe par rapport au référentiel galiléen géocentrique tout comme l'horloge réceptrice sur le sol. Les deux horloges sont alors placées à des positions différentes dans le potentiel gravitationnel de la Terre. Le principe d'équivalence prédit que les effets de la gravitation sur les fréquences des horloges sont équivalents à ceux d'horloges accélérées. Le récepteur au sol observe alors un déplacement de la fréquence ν_{RG} de l'horloge du satellite sous la forme

$$\frac{\Delta\nu_{\text{RG}}}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2U_{\text{sat}}}{c^2}}{1 + \frac{2U_{\text{rec}}}{c^2}}} - 1$$

où U_{sat} est le potentiel gravitationnel créé par la Terre à la position du satellite pour l'orbite circulaire et U_{rec} le potentiel gravitationnel créé par la Terre au niveau du sol.

Exprimer $\frac{\Delta\nu_{\text{RG}}}{\nu_0} = \left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)_{\text{RG}}$ au premier ordre en $\frac{U}{c^2}$ en fonction des positions des deux horloges et des données du problème. On précisera dans quel sens a lieu la variation en fréquence.

24. Application numérique : en faisant les mêmes hypothèses que celles de la question (19), déterminer l'erreur induite sur la mesure de distance au satellite pour un temps de mesure d'une seconde si l'on ne prend pas en compte cet effet de dérive.
25. Dans le cas de la constellation GPS, ces deux termes relativistes sont compensés directement en modifiant la fréquence de référence de l'horloge dans le satellite de manière à ce qu'elle apparaisse à la même fréquence que l'horloge au sol pour le récepteur. On suppose que les deux effets relativistes s'additionnent. Calculer les valeurs des deux fréquences ν'_1 et ν'_2 émises par le satellite dans son référentiel propre.

26. Les effets relativistes sont ainsi compensés directement à bord du satellite. Cependant, pour leur calcul, il a été supposé que le satellite était en orbite circulaire. En reprenant les caractéristiques de l'orbite elliptique données en première partie, déterminer l'erreur relative en fréquence induite par cette approximation circulaire. Commenter le résultat obtenu.

Principe de fonctionnement d'une horloge atomique

La précision requise sur la mesure du temps nécessite l'usage d'horloges atomiques. Dans les satellites du système GPS, quatre horloges atomiques contrôlent les fréquences du signal : deux horloges à Césium et deux horloges à Rubidium. Ces quatre horloges assurent une redondance en cas de dysfonctionnement. Elles sont synchronisées aux horloges du segment de contrôle qui réalise une échelle de temps coordonnée entre des horloges atomiques de référence. Seul le récepteur ne possède pas, dans le cas général, d'horloge atomique, mais un oscillateur, par exemple à quartz, à qui l'on demande juste de conserver une précision en temps suffisante pendant la durée de la mesure (ce qu'il est capable de faire à condition qu'il soit synchronisé avec les horloges du satellite en début de mesure).

Une horloge atomique à Césium ou à Rubidium utilise donc, comme référence en fréquence, un paquet d'atomes dont l'écart entre deux niveaux d'énergie est particulièrement bien connu. Depuis 1967, la seconde a été définie comme la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins $F = 3$ et $F = 4$ de l'état fondamental $6S^{1/2}$ de l'atome de césium 133. Cette définition précise ainsi la fréquence ν_0 de la transition correspondante du Césium. Les horloges atomiques à Césium constituent donc des étalons primaires pour la mesure du temps. Le problème porte sur leur fonctionnement.

On suppose que les atomes de l'horloge sont des systèmes à deux niveaux avec un état fondamental normé $|f\rangle$ et un état excité normé $|e\rangle$ correspondant respectivement à des niveaux d'énergie E_f et E_e tels que

$$\hbar\omega_0 = E_e - E_f$$

On a alors $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ avec $\nu_0 = 9\,192\,631\,770$ Hz.

L'état quantique d'un atome, que l'on suppose normé, s'écrit au temps t

$$|\eta(t)\rangle = \gamma_f(t)|f\rangle + \gamma_e(t)|e\rangle$$

On se propose d'étudier l'évolution d'un tel état.

Le Hamiltonien H_0 associé à l'atome libre satisfait aux relations suivantes

$$H_0|f\rangle = E_f|f\rangle$$

$$H_0|e\rangle = E_e|e\rangle$$

27. Donner l'équation d'évolution de l'état $|\eta(t)\rangle$.

28. Si l'on suppose qu'au temps $t = 0$ l'atome est dans l'état initial

$$|\eta(0)\rangle = \gamma_f(0) |f\rangle + \gamma_e(0) |e\rangle$$

déterminer l'expression de l'état de l'atome $|\eta(t)\rangle$ à un instant t quelconque en fonction de E_f , t , $\hbar$, ω_0 , $|f\rangle$ et $|e\rangle$.

Dans une horloge atomique, les atomes sont interrogés par un signal micro-onde issu d'un oscillateur généralement à quartz. En pratique, on suppose qu'au temps $t = 0$ les atomes sont dans l'état fondamental

$$|\eta(0)\rangle = |f\rangle$$

L'oscillateur envoie un signal sous la forme d'un champ magnétique périodique orienté suivant l'axe Oz tel que

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t + \alpha) \vec{u}_z$$

où $\vec{u}_z$ est un vecteur unitaire de l'axe Oz et $\omega = 2\pi\nu$ est la pulsation (et ν la fréquence) du signal de l'oscillateur que l'on choisit proche de la fréquence de référence.

L'objectif de la mesure est de déterminer la probabilité de transition de l'atome vers l'état excité $|e\rangle$ à l'issue de l'interaction avec ce champ magnétique. On cherche alors, en modifiant la fréquence de l'oscillateur, à maximiser la probabilité de transition. Lorsqu'elle est maximale, la fréquence de l'oscillateur est accordée à celle de la transition atomique. En effectuant une boucle d'asservissement, il est alors possible d'utiliser le signal de l'oscillateur comme une référence en fréquence.

Les éléments de matrice du Hamiltonien d'interaction H_1 entre le champ magnétique et l'atome sont

$$\begin{aligned} \langle f | H_1 | f \rangle &= \langle e | H_1 | e \rangle = 0 \\ \langle f | H_1 | e \rangle &= \langle e | H_1 | f \rangle = \hbar \Omega \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

avec $\Omega = -\chi B_0$.

29. Donner les dimensions et unités de la quantité χ . Donner les noms de quantités physiques représentées par χ et Ω .

30. Déterminer le Hamiltonien H' d'un atome en interaction avec le champ magnétique. En déduire l'équation d'évolution associée pour un atome dans l'état $|\eta(t)\rangle$.

On pose

$$|\phi(t)\rangle = \exp\left(\frac{iE_f t}{\hbar}\right) |\eta(t)\rangle$$

avec $|\phi(t)\rangle = g_f(t) |f\rangle + g_e(t) \exp(-i\omega_0 t) |e\rangle$.

31. A partir de l'équation d'évolution, déterminer les deux équations différentielles couplées du premier ordre que satisfont $g_e(t)$ et $g_f(t)$.

32. ω étant assez proche de ω_0 , il est possible de se placer désormais dans l'approximation du champ tournant. Cette approximation consiste à considérer que, à l'échelle de temps de la mesure, les termes périodiques de pulsation $(\omega + \omega_0)$ ont un effet moyen négligeable par rapport à ceux de pulsation $\delta = \omega - \omega_0$. Ecrire les équations précédentes dans le cadre de l'approximation du champ tournant.

33. Déterminer l'équation différentielle du deuxième ordre satisfaite par g_f , ainsi que celle satisfaite par g_e .

34. Dans le cas général où l'atome se trouve dans l'état $|\phi(0)\rangle = g_f(0)|f\rangle + g_e(0)|e\rangle$ à l'instant $t = 0$, montrer que les solutions de ces équations sont de la forme

$$\begin{aligned} g_f(t) &= g_f(0) \exp\left(\frac{i\delta t}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) - i\frac{\delta}{\Omega'} \sin\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) \right] \\ &\quad - i g_e(0) \exp(i\alpha) \exp\left(\frac{i\delta t}{2}\right) \frac{\Omega}{\Omega'} \sin\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) \\ g_e(t) &= g_e(0) \exp\left(\frac{-i\delta t}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) + i\frac{\delta}{\Omega'} \sin\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) \right] \\ &\quad - i g_f(0) \exp(-i\alpha) \exp\left(\frac{-i\delta t}{2}\right) \frac{\Omega}{\Omega'} \sin\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) \end{aligned}$$

Donner l'expression de Ω' en fonction des données du problème.

35. Pour les besoins de la mesure, on sélectionne des atomes dans l'état fondamental $|f\rangle$. A $t = 0$, on déclenche le champ magnétique avec un déphasage nul $\alpha = 0$. Après un temps d'interaction t avec le champ magnétique, déterminer la probabilité $P_e(t)$ de mesurer l'atome dans l'état excité $|e\rangle$ à l'instant t (appelée aussi probabilité de transition) en fonction de Ω et δ .
36. Pour cette question, on suppose que $\delta = 0$. La probabilité de transition oscille alors en fonction du temps. Donner le nom de ces oscillations ainsi que leur pulsation. Déterminer les valeurs de t où cette probabilité est égale à 1, puis à $1/2$. Justifier les appellations respectives « impulsion π » et « impulsion $\pi/2$ » pour les interactions aboutissant à ces deux probabilités.
37. Pour une pulsation ω quelconque de l'oscillateur, déterminer le temps $\tau_{\max}(\omega)$ d'interaction le plus court permettant d'obtenir le maximum $P_{\max}(\omega)$ pour la probabilité de transition. En déduire l'expression de $P_{\max}(\omega)$.
38. Dans le cadre du fonctionnement d'une horloge atomique, l'objectif est de rechercher le maximum de $P_{\max}(\omega)$ en fonction de ω . Donner l'allure de la courbe $P_{\max}(\omega)$. Préciser sa valeur maximale ainsi que la valeur de ω associée. Déterminer la largeur à mi-hauteur de la courbe en fonction de Ω .
39. Justifier l'utilisation du terme de résonance pour cette expérience. Montrer qu'il est possible, par un asservissement adapté, de s'assurer que le signal émis par l'oscillateur correspond à la fréquence d'horloge de référence.
40. On appelle $\tau_{0\max}$ le temps d'interaction entre le champ magnétique et l'atome lorsque le système (oscillateur+atomes) est à la résonance. Donner la relation entre $\tau_{0\max}$ et Ω . Exprimer la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance en fonction de $\tau_{0\max}$. Décrire un protocole expérimental permettant d'obtenir une très bonne précision pour la mesure de cette horloge et préciser les limitations pour ce type de mesure.

Pour des horloges atomiques de référence, il est possible de développer un dispositif plus complexe permettant d'atteindre de meilleures précisions. Ce dispositif consiste en un système interférométrique permettant d'obtenir des franges dites de Ramsey.

Le principe est le suivant :

- Les atomes sont initialement sélectionnés dans l'état fondamental $|f\rangle$.
 - A $t = 0$, ils interagissent avec le champ magnétique sous la forme d'une impulsion $\pi/2$. On appelle τ le temps d'interaction correspondant.
 - A partir de $t = \tau$, le champ magnétique est coupé et les atomes évoluent librement pendant une durée T .
 - A $t = \tau + T$, le champ magnétique est rallumé et les atomes subissent une impulsion $\pi/2$.
- La mesure consiste en la détermination du maximum de probabilité de transition des atomes. Avec les notations précédentes, on a donc à $t = 0$: $g_e(0) = 0$; $g_f(0) = 1$; $\alpha = 0$.

41. En reprenant les résultats des questions précédentes, déterminer l'état des atomes $|\eta(\tau)\rangle$ à la fin de la première interaction avec le champ magnétique pour $t = \tau$.
42. Déterminer l'état des atomes $|\eta(\tau + T)\rangle$ après leur évolution libre sans champ magnétique pour $t = \tau + T$.
43. Calculer $g_e(2\tau + T)$. On prendra en compte le fait qu'avant la deuxième impulsion $\pi/2$, le champ magnétique s'est déphasé pendant l'intervalle de temps $(\tau + T)$. Montrer que la probabilité de transition d'un atome $P_e(2\tau + T)$ vers l'état excité après l'ensemble du dispositif s'écrit

$$P_e(2\tau + T) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \left[\cos\left(\frac{\delta T}{2}\right) - \frac{\delta}{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}} \sin\left(\frac{\delta T}{2}\right) \right]^2$$

44. Justifier l'appellation de « franges de Ramsey » pour ce résultat. Déterminer la largeur à mi-hauteur de la frange centrale.

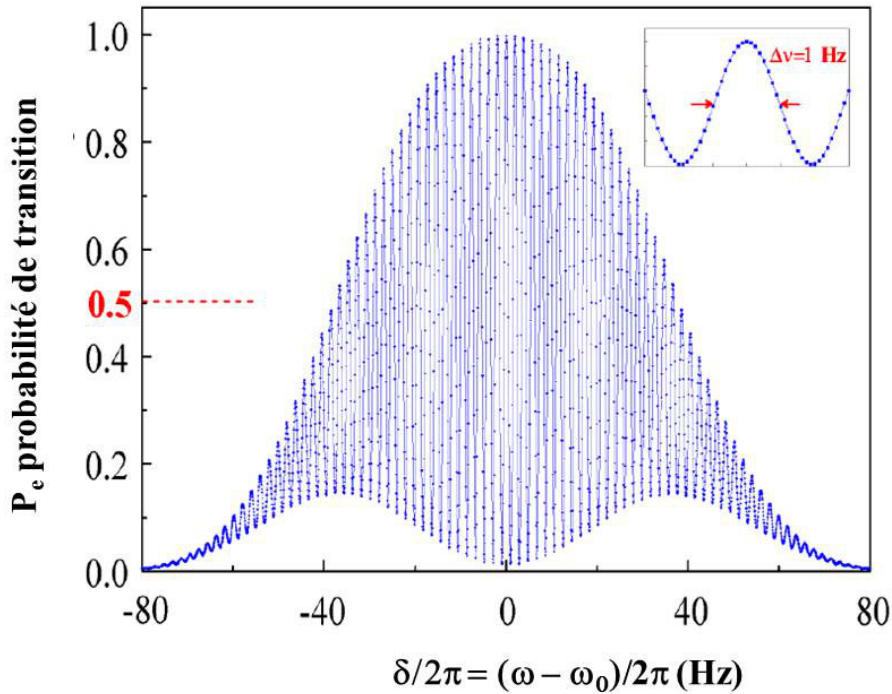


FIGURE 3 – Franges de Ramsey d'une horloge atomique. Le cadre en haut à droite est un zoom de la frange centrale de la figure où les flèches indiquent la largeur à mi-hauteur.

45. La figure 3 représente le résultat d'une mesure effectuée sur une fontaine atomique dans un laboratoire de métrologie. Les points expérimentaux sont reportés sous la forme de disque donnant la barre d'erreur. On admet que chaque point a été obtenu avec un temps de mesure correspondant au temps d'évolution libre des atomes, $t_{\text{mes}} = T$. Une courbe théorique est superposée aux points expérimentaux. Montrer que le résultat obtenu correspond aux calculs précédents en décrivant les caractéristiques principales de cette courbe. Comparer les résultats obtenus avec ce dispositif à la mesure de résonance précédemment étudiée.
46. Au lieu de mesurer directement le maximum de la frange centrale, les métrologues préfèrent effectuer deux séries de mesures décalées en fréquence de part et d'autre de la frange centrale. Expliquer quelle est la motivation de ce protocole expérimental et déterminer le décalage en fréquence optimal.
47. La figure 4 montre la stabilité de deux types d'horloges : un oscillateur à quartz (tel qu'il peut y en avoir dans le récepteur) et une horloge atomique à Césium (telle qu'il peut y en avoir dans les satellites GPS ou au segment sol). La stabilité correspond à la détermination de la précision relative en fréquence de l'horloge étudiée en fonction du temps de mesure effectué.

Vérifier que les ordres de grandeurs présentés sont compatibles avec la courbe obtenue précédemment pour l'horloge atomique. Justifier l'utilisation d'un oscillateur à quartz pour le récepteur.

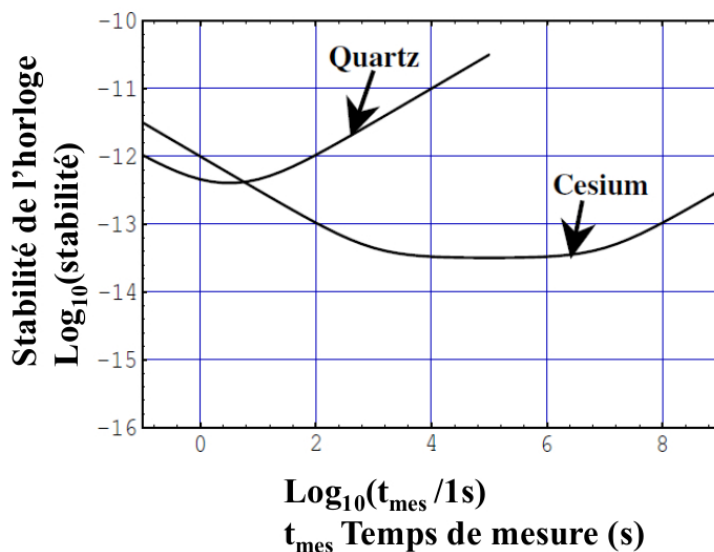


FIGURE 4 – Stabilité de l'horloge. La stabilité correspond à la précision relative de la mesure en fonction du temps de mesure.

48. Pour les horloges atomiques de référence au sol, les laboratoires de métrologie emploient parfois des atomes de Césium froids comme étalon de fréquence. Décrire ce que signifie le terme « atomes froids » et déterminer les avantages d'une telle technologie pour le fonctionnement des horloges atomiques.

Effets de l'atmosphère

Les satellites étant à une altitude d'environ 20180 km, les signaux émis traversent plusieurs couches de l'atmosphère terrestre. Le système GPS émet des signaux sur deux fréquences différentes ν_1 et ν_2 décrites dans l'introduction.

Les perturbations induites par la traversée de l'atmosphère sont classées en deux catégories :
- les perturbations issues de la composante ionisée de l'atmosphère (appelée, pour simplifier, l'ionosphère)

- les perturbations induites par la composante neutre de l'atmosphère (appelée, pour simplifier, du nom de sa couche la plus dense : la troposphère).

En dehors de l'atmosphère, on considère que les signaux se propagent dans le vide.

Les caractéristiques physiques de l'atmosphère (épaisseur, densité, composition, température, pression, ...) sont très variables sur toutes les échelles spatiales et sur des échelles de temps allant de la minute aux échelles géologiques en passant par les variations journalières et saisonnières. Il est donc indispensable pour le système GPS de développer des techniques permettant de passer outre ces variations.

L'ionosphère

L'ionosphère est constituée d'un plasma qui s'étend environ à des altitudes de 50 km à 800 km. Le vent solaire est à l'origine d'une grande partie de l'ionisation de cette couche atmosphérique.

On suppose que l'ionosphère est composée d'un plasma homogène globalement neutre.

On veut étudier les conditions de propagation d'une onde électromagnétique dans le plasma ionosphérique. On suppose qu'il s'agit d'une onde plane progressive harmonique transversale, polarisée rectilignement, se propageant suivant le vecteur unitaire $\vec{u}_x$, de pulsation $\omega = 2\pi\nu$, de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$ correspondant à un champ électrique de la forme

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

avec $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ base orthonormée. Il règne alors dans le plasma un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ qui dépendent tous les deux a priori de la position et du temps.

49. On note à présent $\vec{v}_e$ la vitesse des électrons dans le plasma et $\vec{v}_i$ la vitesse des ions positifs. On modélise la réponse du plasma à la présence de l'onde par un modèle aboutissant aux relations

$$\begin{aligned} m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} &= -e\vec{E} \\ \vec{v}_i &= 0 \end{aligned}$$

Décrire et justifier toutes les hypothèses sous-jacentes à ces résultats.

50. On appelle N_e la densité volumique électronique supposée uniforme. Déterminer, en précisant les conditions de son existence, l'équation de dispersion de l'onde dans l'ionosphère en fonction de N_e et des données du problème. Qu'appelle-t-on « pulsation plasma », notée ω_p ? Donner son expression.
51. Déterminer les conditions pour qu'une onde puisse se propager dans l'ionosphère.
52. La densité d'électrons N_e dans l'ionosphère varie usuellement de 10 cm^{-3} à 10^6 cm^{-3} . On suppose que ces variations se produisent sur des échelles de temps et d'espace suffisamment grandes pour que les équations précédentes restent valides. Déterminer la gamme de variation de la fréquence plasma $\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ de l'ionosphère. Démontrer que les fréquences émises par les satellites du système GPS peuvent se propager à travers l'ionosphère.
53. On se place dans la situation où l'onde se propage. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g de l'onde dans le plasma en fonction de la pulsation ω , de la pulsation plasma ω_p et des données du problème.
54. En déduire que l'indice de réfraction $n = \frac{c}{v_g}$ de l'ionosphère suit la relation au premier ordre en $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$
- $$n = 1 + 40,3 \frac{N_e}{\nu^2}$$
- pour des quantités exprimées en unités du système international.
Expliquer pourquoi cet indice de réfraction est celui utilisé pour le fonctionnement du GPS présenté en introduction.
55. Déterminer l'erreur systématique induite par la présence de l'ionosphère sur la mesure de distance entre le satellite et le récepteur. Donner l'ordre de grandeur de la valeur supérieure que peut prendre cette erreur en supposant l'ionosphère homogène pour un signal à la fréquence ν_1 .
56. En ne prenant pas en considération les autres sources d'erreur, écrire l'intérêt d'utiliser simultanément deux fréquences différentes pour le signal GPS. En particulier, donner une combinaison des deux pseudo-distances ℓ_1 et ℓ_2 ainsi obtenues permettant de s'affranchir des effets ionosphériques quel que soit l'état de l'ionosphère traversée.

La troposphère

La troposphère est un milieu neutre. L'interaction entre le signal émis par les satellites et la troposphère correspond à une interaction avec un milieu diélectrique. Seule la partie la plus dense de l'atmosphère participe à cette interaction. Pour ce problème, on considère qu'elle s'étend du sol jusqu'à une altitude de 50 km.

Cette couche de l'atmosphère est essentiellement constituée d'air plus ou moins humide suivant la situation météorologique. On rappelle les valeurs de pression et de température pour des conditions normales : $P_n = 101\,325$ Pa et $T_n = 273,15$ K.

Des expériences de communication radio dans la troposphère ont permis d'établir la relation empirique suivante pour l'indice de réfraction de la partie sèche de la troposphère

$$n_S - 1 = 77,6 \times 10^{-8} \left(\frac{P_S}{T'} \right)$$

où T' est la température de l'air exprimée en Kelvin et P_S est la pression partielle de l'atmosphère sèche exprimée en Pascal.

57. Calculer $n_S - 1$ dans les conditions normales de température et de pression. En déduire l'écart en terme de positionnement que cette différence d'indice entraîne. Commenter.

On veut étudier plus précisément la réponse de la troposphère au passage du signal GPS. On considère la troposphère comme un gaz diélectrique dilué composé de molécules sans moment dipolaire (N_2 , O_2 , gaz rares, CO_2) et de molécules avec moment dipolaire (H_2O). On va donc déterminer de façon indépendante le comportement de l'air sec et celui de la vapeur d'eau en supposant que les effets se superposent en s'additionnant. Par ailleurs, on suppose que l'air est un gaz parfait.

58. Donner la relation entre la permittivité diélectrique relative de l'air ϵ_r et son indice de réfraction n' .
59. La relation expérimentale donnant n_S propose une expression de la dépendance en température et en pression de l'indice de réfraction de la partie sèche de la troposphère. On souhaite retrouver cette dépendance par un modèle physique simplifié du gaz. La composante sèche de la troposphère est alors modélisée comme un gaz de molécules identiques ayant, au passage du signal GPS, un moment dipolaire induit $\vec{p}$ tel que

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_1$$

où α est la polarisabilité des molécules et $\vec{E}_1$ est le champ électrique local vu par les molécules. La polarisabilité des molécules qui composent la partie sèche de l'air vaut approximativement $\alpha \approx 20 \times 10^{-30} \epsilon_0$.

On pose N le nombre de molécules par unité de volume. On suppose que le gaz est dilué, c'est-à-dire que le champ électrique local $\vec{E}_1$ qui s'exerce sur une molécule est égal au champ macroscopique $\vec{E}$ dans le gaz diélectrique au moment du passage du signal GPS (onde électromagnétique) dans le diélectrique.

Déterminer les hypothèses sous-jacentes à cette approximation, commenter l'ordre de grandeur donné pour la polarisabilité et vérifier la validité des hypothèses pour l'air dans des conditions normales de température et de pression.

60. L'air est supposé être un milieu linéaire. Donner la relation entre la polarisabilité α et la permittivité diélectrique relative de l'air sec ϵ_s pour N molécules par unité de volume.
61. En déduire l'expression de l'indice de l'air sec en fonction de la température T' et de la pression partielle en air sec P_s . Vérifier que la relation obtenue est compatible en ordre de grandeur avec l'expression de n_s recommandée pour les communications radio.
62. Pour l'indice de réfraction de la vapeur d'eau, les mêmes recommandations pour les communications radio donnent la relation

$$n_H = 1 + 72,0 \times 10^{-8} \times \frac{P_H}{T'} + 3,75 \times 10^{-3} \times \frac{P_H}{(T')^2}$$

avec P_H pression partielle de vapeur d'eau dans l'air.

Donner l'origine du terme supplémentaire en $\frac{P_H}{(T')^2}$ et discuter qualitativement de sa dépendance en T' .

On considère désormais que l'indice de réfraction total de l'air troposphérique s'écrit

$$n' = 1 + 77,6 \times 10^{-8} \times \frac{P_s}{T'} + 72,0 \times 10^{-8} \times \frac{P_H}{T'} + 3,75 \times 10^{-3} \times \frac{P_H}{(T')^2}$$

On pose ainsi

$$n' = 1 + \kappa_1 \frac{P_s}{T'} + \kappa_2 \frac{P_H}{T'} + \kappa_3 \frac{P_H}{(T')^2}$$

Il convient à présent de connaître l'évolution de la température et de la pression en fonction de l'altitude pour avoir un modèle thermodynamique complet de la troposphère.

La pression P' et la température T' de la troposphère sont déterminées à partir des hypothèses suivantes :

- l'air est un gaz parfait.
- la troposphère est en équilibre aérostatique en supposant que l'accélération de la pesanteur g reste constante à l'échelle de la troposphère.
- la température décroît linéairement avec l'altitude h (loi empirique)

$$T'(h) = T' = T'_0 - \xi h$$

où T'_0 est la température de l'air au sol.

De la même façon, on note P'_0 la pression troposphérique au sol et $P' = P'(h)$ la pression à l'altitude h . On appelle M' la masse molaire de l'air composant la troposphère.

63. Déterminer la relation entre la pression P' et la température T' à l'altitude h sous la forme

$$P' T'^{-\beta} = \text{constante}$$

Donner l'expression de β en fonction de g , M' , ξ et la constante des gaz parfaits R . Comment appelle-t-on un tel modèle d'atmosphère ?

64. La composition de l'atmosphère en partie sèche et partie humide est variable. Il faut donc introduire les contributions de ces deux parties. On note M_s la masse molaire de

l'air sec et M_H la masse molaire de la vapeur d'eau présente dans l'atmosphère. On pose $P_S = P_S(h)$ la pression partielle de la composante sèche de la troposphère et $P_H = P_H(h)$ la pression partielle de la composante humide.

Montrer que l'on a la relation

$$\frac{dP'}{P'} = \frac{gM_S}{\xi R} \frac{dT'}{T'} - \frac{gM_S P_H}{\xi R P'_0} \left(\frac{T'}{T'_0} \right)^{-\beta} \left(1 - \frac{M_H}{M_S} \right) \frac{dT'}{T'}$$

65. En plus de la mesure de la température et de la pression au sol, il est possible de mesurer l'humidité relative, c'est-à-dire le rapport entre la pression partielle en vapeur d'eau P_H et la pression de vapeur saturante Π . On suppose que ce rapport est constant sur la partie de la troposphère traversée par le signal GPS.

On montre que, dans ces conditions, la pression de vapeur saturante varie suivant l'expression

$$\frac{\Pi(h)}{\Pi(0)} = \left(\frac{T'}{T'_0} \right)^\sigma$$

avec $\sigma > 3$.

Que devient alors l'équation précédente ?

66. La contribution de la vapeur d'eau dans la masse molaire de l'air est faible (moins de 5 pourcent). On peut donc faire l'approximation suivante

$$\beta \approx \frac{gM_S}{\xi R}$$

Ecrire et résoudre l'équation précédente avec cette approximation. Montrer que la solution prend la forme

$$\frac{P'}{P'_0} = \left(\frac{T'}{T'_0} \right)^\beta \exp(W)$$

en donnant l'expression de W en fonction de β , σ , T' , T'_0 , $\frac{M_H}{M_S}$ et $\frac{P_{H0}}{P'_0}$.

67. Les mesures effectuées sur l'atmosphère montrent que $W \leq 0,003$. Effectuer un développement au premier ordre en W de l'exponentielle dans l'équation précédente.
68. Dédire des équations établies précédemment l'expression de la pression partielle en vapeur d'eau P_H ainsi que la pression partielle en air sec P_S en fonction de l'altitude h , des caractéristiques de température, pression, pression partielle de vapeur d'eau de l'atmosphère au sol et des données du problème.
69. Montrer qu'il est possible de déduire des résultats précédents l'expression de l'effet de la troposphère $\Delta \ell_{\text{tropo}}$ sur la mesure de la pseudo-distance par le récepteur GPS lorsque le satellite passe à la verticale en fonction des caractéristiques de l'atmosphère au sol et de l'épaisseur h_{tropo} de la troposphère. Le calcul de l'intégrale n'est pas demandé.

Bilan d'erreurs du GPS

La table 1 présente le bilan typique de l'incertitude quadratique issue de chaque élément participant à la mesure de la pseudo-distance pour le positionnement pour un récepteur ne détectant qu'une fréquence. La ligne « réflexions multiples » décrit le bruit de mesure induit par la réflexion des signaux GPS sur les objets environnant le récepteur.

Source de bruit	Incertitude en m
Horloges des satellites	2
Ephémérides	2,5
Ionosphère	5
Troposphère	0,5
Réflexions multiples	1
Récepteur	3

TABLE 1 – Bilan d'erreur typique d'une mesure de positionnement avec un récepteur monofréquence

70. On suppose que les différentes sources de bruit sont indépendantes. Déterminer l'incertitude quadratique globale en mètre de l'ensemble du système pour un récepteur monofréquence, puis pour un récepteur captant les deux fréquences. Conclure et proposer des techniques pouvant permettre d'améliorer ces performances.