

4353

**28531**

*repère à reporter sur la copie*

**SESSION DE 2003**

---

**concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés**

---

**section : sciences physiques**

**option : physique**

composition de physique

**Durée : 5 heures**

*Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.*

**Tournez la page S.V.P.**

# CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES ET TELECOMMUNICATIONS

Ce sujet comporte trois parties indépendantes :

- PARTIE A : Electromagnétisme et relativité,
- PARTIE B : Rayonnement dipolaire et applications,
- PARTIE C : Propagation guidée, fibres optiques.

Chaque partie comporte de nombreuses questions indépendantes. Le candidat peut utiliser un résultat donné par le texte, même s'il n'a pas été démontré.

Les vecteurs sont notés en gras.

Des données utiles à la résolution de certaines questions sont regroupées au début du problème.

La plus grande importance sera donnée à la qualité de la rédaction et de la présentation.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## Données générales

- $\text{rot}(f\mathbf{G}) = f \text{rot}\mathbf{G} + \text{grad}f \wedge \mathbf{G}$
- $\text{rot}(\text{rot}\mathbf{G}) = -\Delta\mathbf{G} + \text{grad}(\text{div}\mathbf{G})$
- $\text{div}(f\mathbf{G}) = f \text{div}\mathbf{G} + \text{grad}f \cdot \mathbf{G}$

## Données relatives à la PARTIE B

- masse de l'électron :  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- charge de l'électron :  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Données relatives à la PARTIE C

- $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
- coordonnées cylindriques :

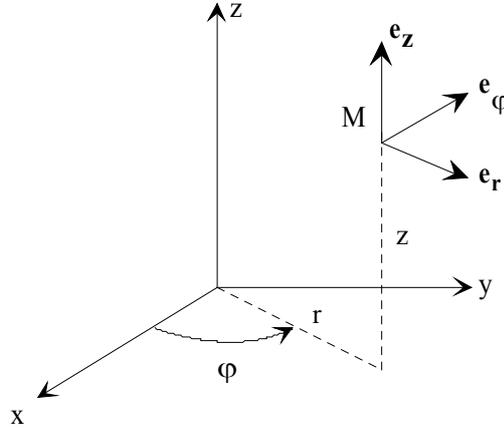


figure 1

- Laplacien en coordonnées cylindriques :  $\Delta f(r, \varphi) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$
- fonction de Bessel de première espèce d'ordre m :  $J_m(x)$  pour m entier naturel.
  - elle vérifie l'équation différentielle suivante :
 
$$\frac{d^2 J_m(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_m(x)}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) J_m(x) = 0$$
  - comportement au voisinage de 0 :  $J_0(0) = 1$  et  $J_m(0) = 0$  pour  $m \geq 1$ .
  - $\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$ .
  - tableau des premières solutions de l'équation  $J_0(x) = 0$  sur  $]0; +\infty[$  :

2,405	5,520	8,654	11,792	14,931
-------	-------	-------	--------	--------

- fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre m :  $K_m(x)$  pour m entier naturel.
  - elle vérifie l'équation différentielle suivante :
 
$$\frac{d^2 K_m(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dK_m(x)}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right) K_m(x) = 0.$$
  - comportement au voisinage de l'infini :  $K_m(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .
  - $K_m(x)$  ne s'annule pas sur  $]0; +\infty[$ .
  - $\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x)$ .

## PARTIE A : Electromagnétisme et relativité.

Cette partie traite des difficultés liées à l'utilisation simultanée des lois de l'électromagnétisme et de la mécanique classique de Newton. Elle étudie ensuite comment la transformation de Lorentz-Poincaré et l'utilisation de la mécanique relativiste d'Einstein permettent de lever ces difficultés.

On considère un référentiel **galiléen**  $R$ , il est rapporté à trois axes orthogonaux  $Ox, Oy, Oz$ .  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  est la base orthonormée directe associée. On désigne par  $t$  le temps dans  $R$ , ainsi un événement est repéré dans  $R$  par  $(x, y, z, ct)$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

### 1. Les équations de Maxwell.

L'étude est conduite dans  $R$ , on note  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  les champs électrique et magnétique,  $\rho$  la densité de charge volumique et  $\mathbf{j}$  le vecteur densité de courant volumique.

1.1. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen.

On rappelle les quatre équations de Maxwell reliant  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\rho$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & (\text{flux magnétique}) & & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (\text{Maxwell-Faraday}) \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & (\text{Maxwell-Gauss}) & & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (\text{Maxwell-Ampère}) \end{aligned}$$

### 1.2. Potentiels.

1.2.1. Rappeler les expressions des champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  en fonction des potentiels vecteur  $\mathbf{A}$  et scalaire  $V$  et justifier l'existence de ces potentiels.

1.2.2. En déduire le système de deux équations aux dérivées partielles liant  $\mathbf{A}$ ,  $V$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\rho$ .

1.2.3. On admet que l'on peut imposer la condition de jauge de Lorentz :  $\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ .

Ecrire, dans ce cas, les deux équations de la question A.1.2.2.

On considère désormais un second référentiel **galiléen**  $R'$  en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $\mathbf{v}_e = v_e \mathbf{e}_x$  par rapport à  $R$ . Son origine  $O'$  est située sur l'axe  $Ox$ , ses trois axes  $O'x', O'y', O'z'$  sont respectivement parallèles aux axes  $Ox, Oy, Oz$ . On désigne par  $t'$  le temps dans  $R'$ , ainsi un événement est repéré dans  $R'$  par  $(x', y', z', ct')$ . Enfin si  $t' = t = 0$ , les origines  $O$  et  $O'$  de  $R$  et  $R'$  coïncident.

### 2. Les lois de l'électromagnétisme en mécanique newtonienne.

Dans cette partie A.2., l'étude est conduite dans le cadre de la mécanique newtonienne.

#### 2.1. Transformation « classique » des champs.

2.1.1. Dans le référentiel  $R$ , rappeler l'expression de la force de Lorentz  $\mathbf{F}$  exprimant l'action du champ électromagnétique  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  sur une particule chargée test de charge  $q$  animée d'une vitesse  $\mathbf{v}$  dans  $R$ .

- 2.1.2. Expliciter la formule de transformation des vitesses reliant la vitesse  $\mathbf{v}'$  de la particule chargée test dans  $R'$ , à  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}_e$ .
- 2.1.3. Dans le référentiel  $R'$ , le champ électromagnétique précédent est caractérisé par les champs électrique et magnétique  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{B}'$ . En utilisant les questions précédentes, exprimer les vecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  en fonction des vecteurs  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{B}'$  et  $\mathbf{v}_e$ .

## 2.2.

- 2.2.1. Expliciter la transformation de Galilée reliant  $(x', y', z', ct')$  à  $(x, y, z, ct)$ .

On établit alors les 4 équations formelles, que l'on admettra, reliant les différentes dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad \frac{\partial}{\partial ct} = \frac{\partial}{\partial ct'} - \frac{v_e}{c} \frac{\partial}{\partial x'}$$

- 2.2.2. On se place dans un domaine de l'espace où la densité de charge volumique et le vecteur densité de courant volumique sont nuls.

2.2.2.α. Montrer que l'équation de Maxwell relative au flux magnétique est invariante par changement de référentiel galiléen.

2.2.2.β. Etudier de même l'invariance de l'équation de Maxwell-Gauss.

2.2.2.γ. Que peut-on conclure ?

## 2.3.

On considère un fil rectiligne uniformément chargé de grande dimension, coïncidant avec les axes  $Ox$  et  $O'x'$ . Il est fixe dans le référentiel  $R'$  donc animé dans le référentiel  $R$  d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse  $\mathbf{v}_e = v_e \mathbf{e}_x$ . On note  $\lambda_0$  la densité linéique de charge mesurée dans  $R'$ .

- 2.3.1. Déterminer, en un point quelconque situé en dehors de l'axe, les champs électrique et magnétique  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{B}'$  créés par le fil dans le référentiel  $R'$ .
- 2.3.2. En utilisant la loi de la transformation classique des champs établie à la question A.2.1.3., exprimer, en un point quelconque situé en dehors de l'axe, les champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  créés par le fil dans le référentiel  $R$ .
- 2.3.3. En se plaçant toujours dans le cadre de la mécanique newtonienne, évaluer **directement** la valeur du champ magnétique  $\mathbf{B}$  dans le référentiel  $R$ .
- 2.3.4. Que peut-on conclure ?

## 3. Les lois de l'électromagnétisme en mécanique relativiste.

Dans cette partie A.3., l'étude est conduite dans le cadre de la mécanique relativiste.

Un champ électromagnétique est caractérisé par  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  les champs électrique et magnétique mesurés dans le référentiel  $R$ , et  $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$  les champs électrique et magnétique mesurés dans le référentiel  $R'$ .

On pose  $\beta_e = \frac{v_e}{c}$  et  $\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_e^2}}$ , on rappelle l'expression de la transformation einsteinienne des champs :

$$\mathbf{E}_{//} = \mathbf{E}'_{//}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \gamma_e (\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}'_{\perp}), \quad \mathbf{B}_{//} = \mathbf{B}'_{//}, \quad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma_e \left( \mathbf{B}'_{\perp} + \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \wedge \mathbf{E}'_{\perp} \right).$$

L'indice // représente les champs parallèles à la direction définie par  $\mathbf{v}_e$ , l'indice  $\perp$  représente les champs perpendiculaires à  $\mathbf{v}_e$ . On a ainsi  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{//} + \mathbf{E}_{\perp}$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{//} + \mathbf{B}_{\perp}$ .

### 3.1.

**3.1.1.** Énoncer le principe de relativité d'Einstein.

**3.1.2.** Expliciter la transformation de Lorentz-Poincaré reliant  $(x', y', z', ct')$  à  $(x, y, z, ct)$ .

On établit alors les 4 équations formelles, que l'on admettra, reliant les différentes dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma_e \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \beta_e \frac{\partial}{\partial ct'} \right) \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad \frac{\partial}{\partial ct} = \gamma_e \left( -\beta_e \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial ct'} \right).$$

**3.1.3.** On se place dans un domaine de l'espace où la densité de charge volumique et le vecteur densité de courant volumique sont nuls. On **admet** que les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère sont invariantes par changement de référentiel galiléen.

**3.1.3.α.** En utilisant les questions précédentes, montrer que l'équation de Maxwell relative au flux magnétique est invariante par changement de référentiel galiléen.

**3.1.3.β.** Étudier de même l'invariance de l'équation de Maxwell-Gauss.

**3.1.3.γ.** Comparer cette situation avec celle de la question **A.2.2.2.β.**

### 3.2.

On étudie à nouveau le fil rectiligne chargé de la question **A.2.3.**

**3.2.1.** Déterminer, en un point quelconque situé en dehors de l'axe, les champs électrique et magnétique  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{B}'$  créés par le fil dans le référentiel  $R'$ .

**3.2.2.** En utilisant la loi de la transformation einsteinienne des champs, déterminer, en un point quelconque situé en dehors de l'axe, les champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  créés par le fil dans le référentiel  $R$ .

### 3.2.3.

**3.2.3.α.** Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss appliqué dans  $R$ , la charge portée par une longueur  $h$  du fil, mesurée dans le référentiel  $R$ .

**3.2.3.β.** Retrouver la valeur de cette charge à partir des résultats de la cinématique relativiste.

**3.2.3.γ.** Évaluer alors directement la valeur du champ magnétique  $\mathbf{B}$  dans le référentiel  $R$ .

## PARTIE B : Rayonnement dipolaire et applications.

La partie B aborde la production d'une onde électromagnétique par un dipôle électrique oscillant. Une première application concerne l'étude d'une antenne émettrice en liaison avec la téléphonie mobile, une seconde aborde la diffusion d'un rayonnement par un atome.

On nomme  $R$  un référentiel galiléen rapporté à trois axes orthogonaux  $Ox, Oy, Oz$ .  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  est la base orthonormée directe associée. On note  $j$  le complexe tel que  $j^2 = -1$ .

### 1. Etude du rayonnement du dipôle électrique.

On considère un doublet constitué de deux charges ponctuelles de charges opposées  $+q$  et  $-q$ . La charge  $-q$  est fixe et placée en  $O$  ; la charge  $+q$  est mobile sur l'axe des  $z$  suivant la loi  $z(t) = a \sin(\omega t)$  ;  $a$  et  $\omega$  représentent respectivement l'amplitude et la pulsation des oscillations. L'ensemble constitue un dipôle variable qui crée dans le vide une onde électromagnétique de pulsation  $\omega$  en un point  $M$  repéré par les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  ;  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  désignent les vecteurs unitaires associés. La figure 2 précise le repérage du point  $M$ .

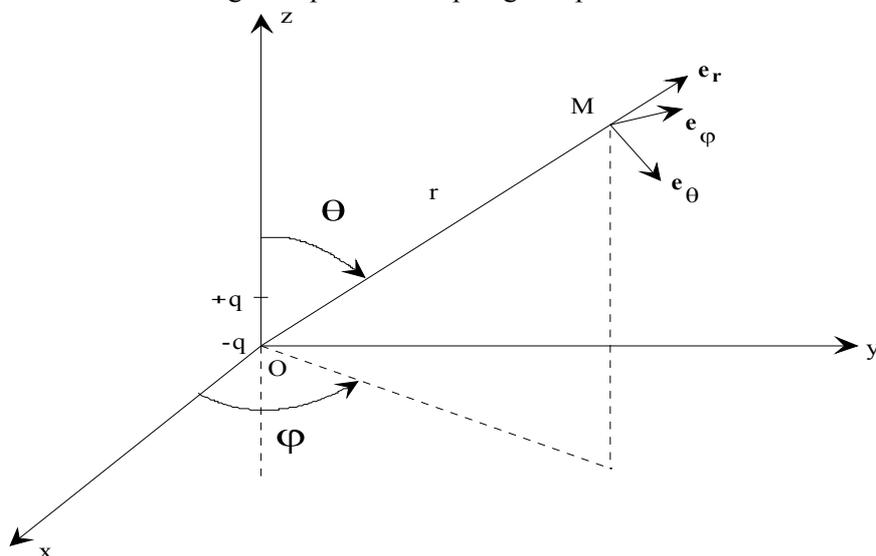


figure 2

On se place dans les conditions où  $r \gg a$  et  $\lambda \gg a$  ;  $\lambda$  est la longueur d'onde associée à l'onde électromagnétique émise.

### 1.1. Potentiels

#### 1.1.1.

1.1.1.α. Commenter qualitativement les deux inégalités :  $r \gg a$  et  $\lambda \gg a$  .

1.1.1.β. Exprimer le moment dipolaire électrique  $\mathbf{p} = p(t)\mathbf{e}_z$  associé au doublet  $(-q,+q)$ .

1.1.2. On admet l'expression du potentiel vecteur  $\mathbf{A}(M, t)$  en  $M$  :  $\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} \mathbf{e}_z$  où

$\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$  . Interpréter la présence du terme en  $t - \frac{r}{c}$  dans l'expression de  $\mathbf{A}(M, t)$  .

1.1.3. Déterminer l'expression du potentiel scalaire en utilisant la condition de jauge de Lorentz :

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \text{ et en ne conservant que les termes qui contiennent } t - \frac{r}{c}.$$

## 1.2. Champs.

On conduit l'étude dans la zone de rayonnement :  $r \gg \lambda$ .

1.2.1. Etablir que le champ magnétique  $\mathbf{B}(M, t)$  s'écrit dans ce domaine :

$$\mathbf{B}(M, t) = \frac{1}{c} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r). \text{ On pourra par exemple utiliser la formule :}$$

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{G}) = f \operatorname{rot}\mathbf{G} + \operatorname{grad}f \wedge \mathbf{G}.$$

1.2.2. Etablir de même que le champ électrique  $\mathbf{E}(M, t)$  vaut :

$$\mathbf{E}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r) \wedge \mathbf{e}_r.$$

1.2.3. Décrire qualitativement la structure locale de cette onde électromagnétique.

## 1.3. Aspect énergétique.

1.3.1. Montrer que l'expression de la puissance rayonnée au voisinage du point M, par unité d'angle solide dans la direction définie par les angles  $(\theta, \varphi)$  s'écrit :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left( \ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c}) \right)^2 \sin^2 \theta, \text{ avec } d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

1.3.2. Donner l'allure du diagramme de rayonnement.

1.3.3. Déterminer l'expression de la puissance totale rayonnée par ce dipôle à travers la sphère de centre O et de rayon  $r \gg \lambda$ . On rappelle que  $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$ .

## 2. Rayonnement par une antenne.

### 2.1. Antenne élémentaire.

2.1.1. Justifier que le dipôle variable est équivalent, pour l'étude du champ dans la zone de rayonnement, à un élément de courant de hauteur  $h = 2a$  parcouru par un courant d'intensité

$$I(t) = \frac{1}{h} \frac{dp}{dt}.$$

2.1.2. On suppose que  $I = I_0 \cos(\omega t)$ . Déterminer la puissance **moyenne** totale  $P_r$  rayonnée par ce dipôle à travers la sphère de centre O et de rayon  $r \gg \lambda$ .

2.1.3. On définit la résistance de rayonnement  $R_r$  par la relation  $P_r = R_r \frac{I_0^2}{2}$ . Donner l'expression de  $R_r$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $c$ ,  $h$  et  $\lambda$ . Expliquer l'intérêt de cette notion.

#### 2.1.4. Applications numériques.

On étudie le champ électromagnétique rayonné par un téléphone portable de type GSM 900. La fréquence d'émission est de 900 MHz, il est muni d'une antenne de hauteur  $h = 2$  cm et sa puissance moyenne totale rayonnée est  $P_r = 2$  W.

2.1.4.α. Comparer  $h$  et la longueur d'onde  $\lambda$ . Conclure.

2.1.4.β. Estimer la distance à partir de laquelle on se situe dans la zone de rayonnement.

2.1.4.γ. Déterminer la résistance de rayonnement.

2.1.4.δ. Estimer l'ordre de grandeur de l'amplitude maximale du vecteur champ électrique à une distance de 3 m.

#### 2.2. Antenne demi-onde.

On considère une antenne de longueur  $2l$ , orientée suivant l'axe des  $z$ , et schématisée sur la figure 3.

Cette antenne est une antenne demi-onde, c'est-à-dire que l'on a  $l = \frac{\lambda}{4}$ .

On admet qu'elle est parcourue par un courant d'intensité  $I = I_1 \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \cos(\omega t)$ .

On étudie le champ électromagnétique rayonné en un point  $M$  repéré par les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ .

On se place en un point  $M$  tel que  $r \gg l$ .

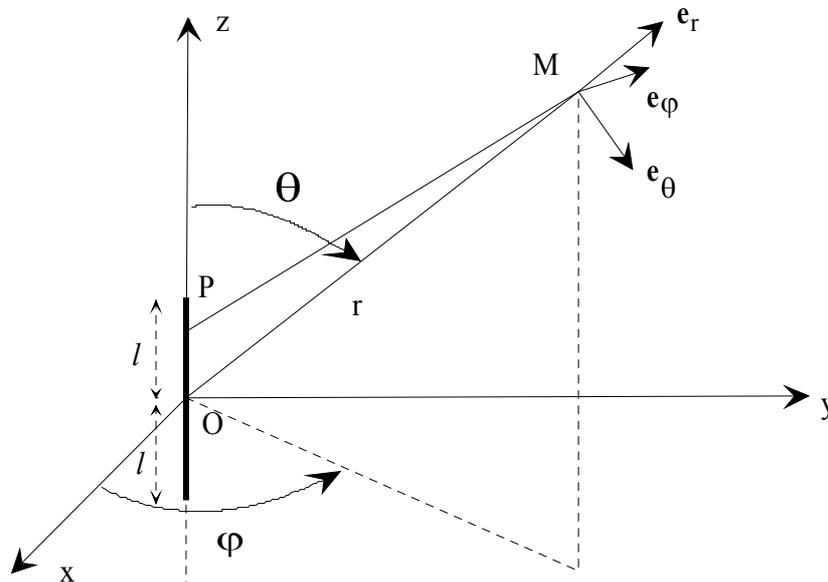


figure 3

2.2.1. Commenter la structure du courant  $I$  qui parcourt cette antenne.

#### 2.2.2. Structure des champs.

2.2.2.α. Soit  $P$  un point de l'antenne repéré par sa coordonnée  $z$ , exprimer  $\|\mathbf{PM}\|$  en fonction de  $r$ ,  $z$  et  $\theta$ .

**2.2.2.β.** En utilisant les résultats des questions **B.1.2.2.** et **B.2.1.1.**, établir que le champ électrique rayonné en M peut s'écrire en notation complexe :

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{M}, t) = j \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega \sin\theta}{r} e^{j(\omega t - kr)} \int_{-l}^{+l} I_1 \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) e^{jkz \cos\theta} dz \mathbf{e}_\theta \text{ avec } k = \frac{\omega}{c} \text{ et } l = \frac{\lambda}{4}.$$

Après calcul, on **admet** que  $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{M}, t)$  s'écrit  $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{M}, t) = j \frac{\mu_0 c}{2\pi} \frac{I_1}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{j(\omega t - kr)} \mathbf{e}_\theta$ .

**2.2.2.γ.** En supposant que l'onde est localement plane, déterminer de même l'expression du champ magnétique en notation complexe :  $\underline{\mathbf{B}}(\mathbf{M}, t)$ .

### 2.2.3. Etude énergétique.

**2.2.3.α.** Déterminer la puissance moyenne totale rayonnée  $P_r$  par cette antenne. On donne

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta \approx 1,22.$$

**2.2.3.β.** Par analogie avec la question **B.2.1.3.** déterminer la résistance de rayonnement de cette antenne. Evaluer numériquement cette résistance.

**2.2.3.γ.** L'antenne d'une station de base d'une cellule de radiotéléphonie mobile est assimilée, pour simplifier, à une antenne demi-onde. La fréquence de l'onde émise est 900 MHz, la puissance rayonnée est égale à 20 W. En déduire les valeurs numériques de l'amplitude du courant électrique  $I_1$  et de l'ordre de grandeur de l'amplitude maximale du champ électrique à une distance de 500m de la station de base.

### 2.3. Réception d'un signal en téléphonie mobile.

On désire étudier de manière simple les difficultés de la réception d'un signal en téléphonie mobile. Pour simplifier l'étude, l'onde émise par la station de base sera considérée comme plane et polarisée rectilignement suivant l'axe des z.

Son champ électrique s'écrit en notation complexe :  $\underline{\mathbf{E}}_i(\mathbf{M}, t) = E_0 e^{j(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda})} \mathbf{e}_z$ ,  $\omega$  représente la pulsation,  $\lambda$  la longueur d'onde et  $f$  la fréquence. On prendra  $f = 900$  MHz.

Un immeuble situé en  $x = L$  réfléchit l'onde sans l'atténuer et sans modifier sa polarisation.

La figure 4 schématise la situation étudiée.

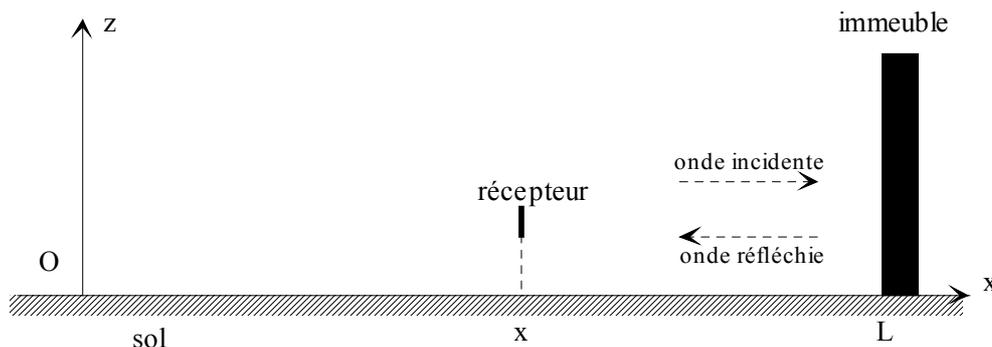


figure 4

### 2.3.1. Champ électrique résultant.

2.3.1.α. On admet que le champ électrique de l'onde réfléchie s'écrit :

$$\underline{\mathbf{E}}_r(M, t) = E_0 e^{j(\omega t + \frac{2\pi(x-2L)}{\lambda} + \phi)} \mathbf{e}_z \text{ où } \phi \text{ est une constante. Commenter cette expression.}$$

2.3.1.β. Ecrire le champ électrique de l'onde résultante :  $\underline{\mathbf{E}}(M, t)$ .

2.3.1.γ. Caractériser l'onde résultante.

### 2.3.2. Etude énergétique.

On admet que la puissance  $P$  reçue par le récepteur ( téléphone mobile ) est proportionnelle à la valeur moyenne dans le temps du carré du champ électrique.

On suppose de plus qu'il existe une puissance  $P_s$  en dessous de laquelle la réception d'un signal est impossible. On suppose également que la moyenne suivant  $x$  de  $P$  est égale à  $10P_s$ .

2.3.2.α. Le téléphone mobile, porté par un piéton, se déplace à la vitesse de 4 km/h suivant l'axe des  $x$ . Déterminer la durée moyenne des coupures.

2.3.2.β. Déterminer la durée moyenne des coupures dans le cas d'un téléphone mobile utilisé par un passager d'une automobile qui se déplace à la vitesse de 40 km/h.

2.3.2.γ. Commenter ces deux déterminations.

2.3.3. En milieu urbain, les retards des trajets réfléchis par rapport aux trajets directs sont de l'ordre de 1  $\mu$ s. On suppose toujours que la moyenne suivant  $x$  de  $P$  est égale à  $10P_s$ .

2.3.3.α. Quelle est la valeur typique de  $L - x$  associée à ce retard ?

2.3.3.β. On suppose que pour cette valeur typique de  $L - x$  et pour la fréquence  $f$ , le signal reçu par le mobile de la part de la station de base a une puissance nulle. On augmente alors la fréquence de  $f$  à  $f + \delta f$ . Déterminer numériquement la valeur minimale à donner à  $\delta f$  pour obtenir une puissance supérieure à  $P_s$ .

2.3.4. En vous appuyant sur les questions précédentes, proposer quelques méthodes permettant de lutter contre « l'évanouissement » des signaux dans les communications avec les téléphones mobiles.

### 3. Diffusion d'une onde électromagnétique par un atome.

Une onde électromagnétique plane incidente est caractérisée par son champ électrique qui s'écrit en

notation complexe :  $\underline{\mathbf{E}}_{in} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \mathbf{e}_z$ , avec  $k = \frac{\omega}{c}$  et  $E_0$  une constante réelle.

Elle interagit avec l'électron d'un atome placé en  $O$ . On utilisera un modèle classique de l'atome dans lequel le noyau est supposé immobile en  $O$  et l'électron est repéré depuis  $O$  par le vecteur  $\mathbf{r}_e$ ,  $\|\mathbf{r}_e\|$  est supposée petite devant la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde électromagnétique incidente.

Dans le cadre de ce modèle, l'électron est soumis aux actions suivantes :

- une force de rappel élastique :  $- m_e \omega_0^2 \mathbf{r}_e$ ,
- une action d'amortissement visqueux :  $-\frac{m_e}{\tau} \frac{d\mathbf{r}_e}{dt}$ .

On note  $m_e$  la masse de l'électron et  $-e$  sa charge électrique ;  $\omega_0$  et  $\tau$  sont deux constantes.

### 3.1. Onde électromagnétique rayonnée.

#### 3.1.1.

3.1.1.α. Commenter l'inégalité  $\|\mathbf{r}_e\| \ll \lambda$ .

3.1.1.β. Que modélisent les forces de rappel et d'amortissement visqueux ?

3.1.1.γ. Pourquoi peut-on négliger l'action du champ magnétique sur l'électron ?

3.1.2. Déterminer en régime forcé l'amplitude complexe du vecteur moment dipolaire induit par l'onde électromagnétique incidente.

3.1.3. On étudie l'onde électromagnétique rayonnée en un point M par ce dipôle induit tel que  $\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r$ . L'étude est conduite dans la zone de rayonnement, on pourra se référer à la figure 2. En utilisant les résultats de la partie B.1., donner l'expression de la puissance

**moyenne** rayonnée par unité d'angle solide au voisinage du point M :  $\frac{dP_r}{d\Omega}$  avec

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi.$$

On **admet** que la puissance moyenne  $P_r$  totale rayonnée par le dipôle à travers la sphère de centre O et

de rayon  $r \gg \lambda$  s'écrit : 
$$P_r = \frac{\mu_0}{12\pi c m_e^2} \frac{e^4 E_0^2 \omega^4}{\left( (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right)}$$

3.1.4. Evaluer la puissance moyenne rayonnée par unité de surface  $I_{in}$  par l'onde électromagnétique **incidente** en fonction de  $E_0$ ,  $\mu_0$  et  $c$ .

3.1.5. On définit la section efficace de diffusion par la relation  $\sigma(\omega) = \frac{P_r}{I_{in}}$  et on pose  $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2$

$$\text{avec } r_0 = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e}.$$

3.1.5.α. Justifier le terme de section efficace.

3.1.5.β. Evaluer numériquement  $\sigma_T$ .

3.1.5.γ. On pose  $\sigma(\omega) = \sigma_T \cdot f(\omega)$  où  $f(\omega)$  est une fonction de la pulsation  $\omega$ . Donner l'expression de la fonction  $f$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $\tau$ .

3.1.5.δ. Donner l'allure de  $f(\omega)$  dans le cas où  $\omega_0\tau \gg 1$ .

### 3.2. Polarisation par diffusion.

L'onde incidente n'est plus polarisée, on suppose que l'on peut la décrire comme la superposition de deux ondes sinusoïdales se propageant suivant  $x$ , polarisées rectilignement, l'une suivant  $\mathbf{e}_z$ , l'autre suivant  $\mathbf{e}_y$ , de même amplitude  $E_0$  et incohérentes entre elles.

L'étude est conduite en un point M du plan  $xOy$ , que l'on appellera plan de diffusion, et dans la zone de rayonnement. On note  $\alpha$  l'angle entre les vecteurs  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_r$ .

**3.2.1.** Donner l'expression de la puissance **moyenne** rayonnée par unité d'angle solide au voisinage du point M due à la composante de l'onde incidente ayant une polarisation perpendiculaire au plan de diffusion :  $\left(\frac{dP_r}{d\Omega}\right)_\perp$ .

**3.2.2.** Donner de même la puissance **moyenne** rayonnée par unité d'angle solide au voisinage du point M due à la composante de l'onde incidente ayant une polarisation parallèle au plan de diffusion :  $\left(\frac{dP_r}{d\Omega}\right)_\parallel$ .

**3.2.3.**

**3.2.3.α.** Justifier le nom, taux de polarisation, donné à la quantité  $\tau_p = \frac{\left(\frac{dP_r}{d\Omega}\right)_\perp - \left(\frac{dP_r}{d\Omega}\right)_\parallel}{\left(\frac{dP_r}{d\Omega}\right)_\perp + \left(\frac{dP_r}{d\Omega}\right)_\parallel}$ .

**3.2.3.β.** Exprimer  $\tau_p$  en fonction de l'angle  $\alpha$  et tracer la courbe représentant  $\tau_p$  en fonction de l'angle  $\alpha$ .

**3.2.3.γ.** Décrire qualitativement la polarisation de l'onde rayonnée en M pour certaines valeurs caractéristiques de l'angle  $\alpha$ .

**3.2.3.δ.** Décrire une situation expérimentale permettant d'illustrer ce phénomène.

### 3.3. Application à l'atmosphère terrestre.

On suppose que l'atmosphère terrestre est constituée de  $n_0$  molécules par unité de volume. Les différentes molécules sont soumises à l'action de la lumière venant du soleil et se comportent comme des dipôles rayonnants. On note  $x$  la direction de propagation de la lumière émise par le soleil. Pour une longueur d'onde  $\lambda$ , la puissance totale moyenne rayonnée par unité de volume de l'atmosphère situé à la cote  $x$  s'écrit  $n_0 \sigma(\omega) I_{in,\lambda}(x)$  ;  $I_{in,\lambda}(x)$  représente la puissance moyenne par unité de surface transportée par l'onde électromagnétique incidente en  $x$ .

**3.3.1.** Pour l'atmosphère terrestre on donne  $\omega_0 = 1,25 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\tau = 10^{-9} \text{ s}$  et on se place dans le domaine du visible. En utilisant la question **B.3.1.5.γ.**, justifier que  $\sigma(\omega) \approx \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$ .

**3.3.2.** En effectuant un bilan de puissance sur un cylindre élémentaire de longueur  $dx$  et de surface de base  $S$  perpendiculaire à  $Ox$ , établir que  $I_{in,\lambda}(x) = I_{in,\lambda}(0) e^{-\frac{x}{D_\lambda}}$  ; on exprimera  $D_\lambda$ .

**3.3.3.** Déterminer les valeurs  $D_\lambda$  pour  $n_0 = 2,70 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$  et successivement  $\lambda = 450 \text{ nm}$ ,  $\lambda = 520 \text{ nm}$  et  $\lambda = 650 \text{ nm}$ . Commenter qualitativement ces résultats sachant que l'épaisseur équivalente de l'atmosphère terrestre est de l'ordre de 8 km.

### 3.4. Cas d'un milieu dilué.

On suppose que le milieu diffusant est constitué de  $N$  atomes identiques fixes situés au voisinage de l'origine  $O$ . On note  $\mathbf{R}_i$  le vecteur position associé à l'atome numéro  $i$ . L'onde électromagnétique incidente a les mêmes caractéristiques qu'au début de la partie **B.3.**, son amplitude complexe est  $\underline{\mathbf{E}}_{in} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \mathbf{e}_z$ . On étudie l'onde rayonnée en un point M tel que  $\mathbf{r} = \mathbf{OM} = r \mathbf{e}_r$ .

L'étude est toujours conduite dans la zone de rayonnement, à une distance grande devant la taille  $L$  du milieu et on suppose de plus que  $r \gg \frac{L^2}{\lambda}$ . On pose  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{K} = k\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{Q} = \mathbf{K} - \mathbf{k}$ .

- 3.4.1.** On note  $\underline{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}, t)$  l'amplitude complexe du vecteur champ électrique rayonné en  $M$  par l'atome  $i$ . On note de même  $\underline{\mathbf{E}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, t)$  celle que rayonnerait en  $M$  un atome situé en  $O$ . Etablir que  $\underline{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, t)e^{(j\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_i)}$  compte tenu des approximations.
- 3.4.2.** En déduire que l'expression de la puissance **moyenne** rayonnée par les  $N$  atomes, par unité d'angle solide, au voisinage du point  $M$  s'écrit  $\frac{dP_r}{d\Omega} |S(\mathbf{Q})|^2$  avec  $S(\mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^N \exp(j\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_i)$ ,  $\frac{dP_r}{d\Omega}$  étant défini à la question **B.3.1.3**.
- 3.4.3.** On suppose que les atomes sont disposés de manière aléatoire que  $N$  est grand et que  $L \gg \lambda$ , donner alors une expression simple de  $|S(\mathbf{Q})|^2$  et commenter.

## PARTIE C : Propagation guidée, fibres optiques.

Après avoir étudié le phénomène de réflexion totale à l'interface entre deux diélectriques, cette partie aborde le guidage des ondes électromagnétiques dans des fibres optiques à saut d'indice puis s'intéresse à deux causes de dispersion d'un signal dans une fibre optique.

Les milieux diélectriques étudiés dans cette partie sont supposés linéaires homogènes, isotropes, non absorbants, non magnétiques et isolants. La permittivité diélectrique du milieu est notée  $\epsilon$  et son indice  $n$ .

On considère  $R$  un référentiel **galiléen**, il est rapporté à trois axes orthogonaux  $Ox, Oy, Oz$ .  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  est la base orthonormée directe associée.

On rappelle que des données utiles à la résolution de certaines questions sont fournies au début du problème.

### 1. Le phénomène de réflexion totale.

On considère un dioptre plan ( $Oyz$ ) qui sépare deux milieux diélectriques d'indices différents  $n_1$  et  $n_2$ .

Une onde incidente plane, progressive, monochromatique, polarisée rectilignement perpendiculairement au plan d'incidence est caractérisée par son vecteur champ électrique qui s'écrit en notation complexe :  $\underline{\mathbf{E}}_i = E_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_y$  où  $\omega$  est la pulsation de l'onde,  $\lambda$  la longueur d'onde  **dans le vide**,  $\mathbf{k}_1 = k_{1x} \mathbf{e}_x + k_{1z} \mathbf{e}_z$  son vecteur d'onde et  $j^2 = -1$ . Comme l'indique la figure 5 le vecteur d'onde de l'onde incidente fait un angle  $\theta_1$  avec la normale  $\mathbf{e}_x$  au dioptre.

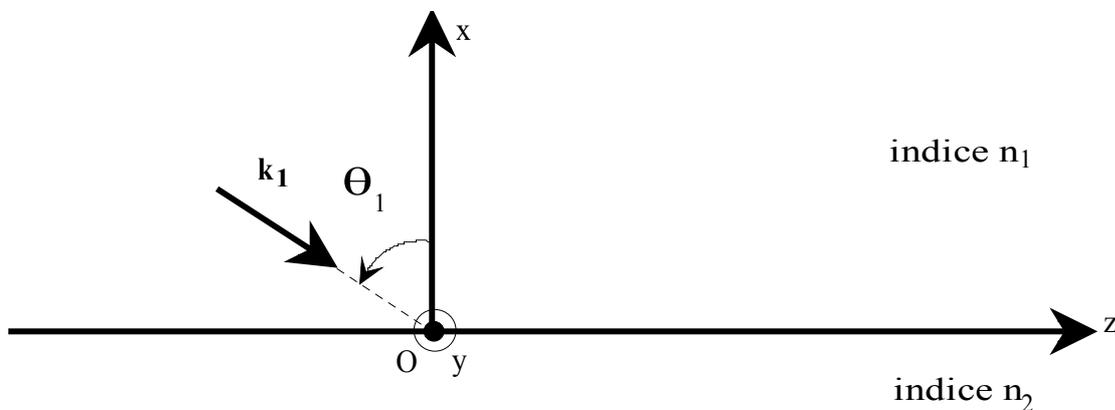


figure 5

Cette onde donne naissance à deux ondes :

- dans le milieu d'indice  $n_2$ , une onde transmise dont le vecteur champ électrique s'écrit en notation complexe :  $\underline{\mathbf{E}}_t = t_{\perp} E_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_y$  avec  $\mathbf{k}_2 = k_{2x} \mathbf{e}_x + k_{2z} \mathbf{e}_z$  et  $t_{\perp}$  le coefficient de transmission en amplitude complexe;
- dans le milieu d'indice  $n_1$ , une onde réfléchie dont le vecteur champ électrique s'écrit en notation complexe :  $\underline{\mathbf{E}}_r = r_{\perp} E_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_y$  avec  $\mathbf{k}'_1 = k'_{1x} \mathbf{e}_x + k'_{1z} \mathbf{e}_z$  et  $r_{\perp}$  le coefficient de réflexion en amplitude complexe.

## 1.1. Structure des ondes.

1.1.1. Donner les expressions des composantes des champs magnétiques associés aux ondes incidente, transmise et réfléchi en fonction de  $E_0$ ,  $\omega$ ,  $t$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\underline{t}_\perp$ ,  $\underline{r}_\perp$  et des composantes des vecteurs  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}'_1$  et  $\mathbf{k}_2$ .

1.1.2. Préciser les expressions de  $k_1^2$ ,  $k_2^2$  et  $k_1'^2$  en fonction de  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\omega$  et  $c$ .

1.1.3. Expliciter les composantes  $k_{1x}$  et  $k_{1z}$  en fonction de  $n_1$ ,  $\omega$ ,  $c$  et  $\theta_1$ .

1.1.4.

1.1.4.α. En utilisant les relations de continuité à l'interface entre les milieux, exprimer  $k'_{1z}$  et  $k_{2z}$  en fonction de  $n_1$ ,  $\omega$ ,  $c$  et  $\theta_1$ .

1.1.4.β. Donner les expressions de  $k'_{1x}$ ,  $\underline{t}_\perp$  et  $\underline{r}_\perp$  en fonction de  $k_{1x}$  et  $k_{2x}$ . Dans cette question on ne cherchera pas à déterminer  $k_{2x}$ .

## 1.2. Etude de la réflexion totale.

Rappeler la condition sur  $n_1$ ,  $n_2$  et  $\theta_1$  pour que l'on observe le phénomène de réflexion totale.

**On suppose cette condition satisfaite dans toute la suite de la question C.1.**

## 1.3. Etude de l'onde transmise dans le cas de la réflexion totale.

1.3.1. Déterminer  $k_{2x}$  en fonction de  $j$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\omega$ ,  $c$  et  $\theta_1$ . On justifiera avec soin le choix du signe sachant que le milieu d'indice  $n_2$  occupe le demi-espace des  $x$  négatifs.

1.3.2. Décrire avec précision la structure de l'onde transmise.

1.3.3. Application numérique. Définir et évaluer une grandeur typique qui mesure l'atténuation de l'amplitude de l'onde transmise. On prendra  $n_1 \sin \theta_1 = 1,445$ ;  $n_2 = 1,443$  et  $\lambda = 1,31 \mu\text{m}$ .

1.3.4. Décrire une expérience qui met en évidence l'onde transmise.

## 1.4. Etude de l'onde réfléchi dans le cas de la réflexion totale.

1.4.1. Donner l'expression du coefficient de réflexion  $\underline{r}_\perp$  en amplitude complexe en fonction de  $j$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  et  $\theta_1$ .

1.4.2. Déterminer  $|\underline{r}_\perp|$  et  $\varphi_r = \arg(\underline{r}_\perp)$ . Tracer les courbes représentatives de ces deux grandeurs en fonction de  $\theta_1$  pour  $n_1 = 1,447$  et  $n_2 = 1,443$ . Précisez la valeur de  $\varphi_r$  pour  $n_1 \sin \theta_1 = 1,445$ .

## **2. Onde électromagnétique guidée dans une fibre optique.**

On va maintenant étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu tel que celui décrit au début de la PARTIE C, de forme cylindrique et d'axe  $Oz$ .

Parmi les divers modes de propagation possibles : transverses électriques ( T.E. ), transverses magnétiques ( T.M. ) et hybrides ( H.E. ou E.H. ), on se limitera dans un premier temps à l'étude des modes ( T.E. ).

## 2.1. Onde transverse électrique.

Dans le cas d'une onde ( T.E. ), le champ électrique  $\mathbf{E}$  est partout perpendiculaire à Oz. Il s'écrit en notation complexe :  $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_s(r, \varphi) e^{j(\omega t - \beta z)}$  avec  $\mathbf{E}_s(r, \varphi) \cdot \mathbf{e}_z = 0$ . Par contre le champ magnétique  $\mathbf{B}$  n'est pas transverse, il s'écrit en notation complexe :  $\underline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_s(r, \varphi) e^{j(\omega t - \beta z)} + B_z(r, \varphi) \mathbf{e}_z e^{j(\omega t - \beta z)}$  avec  $\mathbf{B}_s(r, \varphi) \cdot \mathbf{e}_z = 0$  et  $j^2 = -1$ .

Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques ( r, φ, z), on pourra se référer à la figure 1 du début de l'énoncé du problème. On précise que β est réel positif et  $\mu_0 \epsilon \omega^2 \neq \beta^2$ . ω est la pulsation de l'onde et λ sa longueur d'onde **dans le vide**.

2.1.1. En utilisant les équations de Maxwell, ainsi que les formules d'analyse vectorielle rappelées dans les données regroupées au début du problème, établir les relations :

$$\mathbf{E}_s = j \frac{\omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{grad} B_z}{\mu_0 \epsilon \omega^2 - \beta^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_s = -j \frac{\beta \mathbf{grad} B_z}{\mu_0 \epsilon \omega^2 - \beta^2}.$$

2.1.2. En utilisant l'équation de propagation relative à  $\mathbf{B}$  projetée selon z, montrer que  $B_z$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \varphi^2} + \left( -\beta^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) B_z = 0.$$

2.1.3. On cherche une solution à l'équation précédente sous la forme  $B_z = F(r)G(\varphi)$  ; F(r) est une fonction de la variable r et G(φ) une fonction de la variable φ. Montrer que F(r) vérifie

$$\text{l'équation différentielle} \quad \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \left( -\frac{m^2}{r^2} - \beta^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) F = 0 \quad \text{où } m \text{ est un entier}$$

naturel. Préciser la structure de la fonction G(φ).

## 2.2. Etude d'une fibre optique à saut d'indice.

On désire appliquer les résultats précédents à l'étude d'une fibre optique à saut d'indice formée d'un cœur diélectrique cylindrique de rayon a, d'indice  $n_1$  et d'une gaine diélectrique de grand rayon, d'indice  $n_2$  légèrement inférieur à  $n_1$ . Elle est décrite sur la figure 6.

gaine d'indice  $n_2$

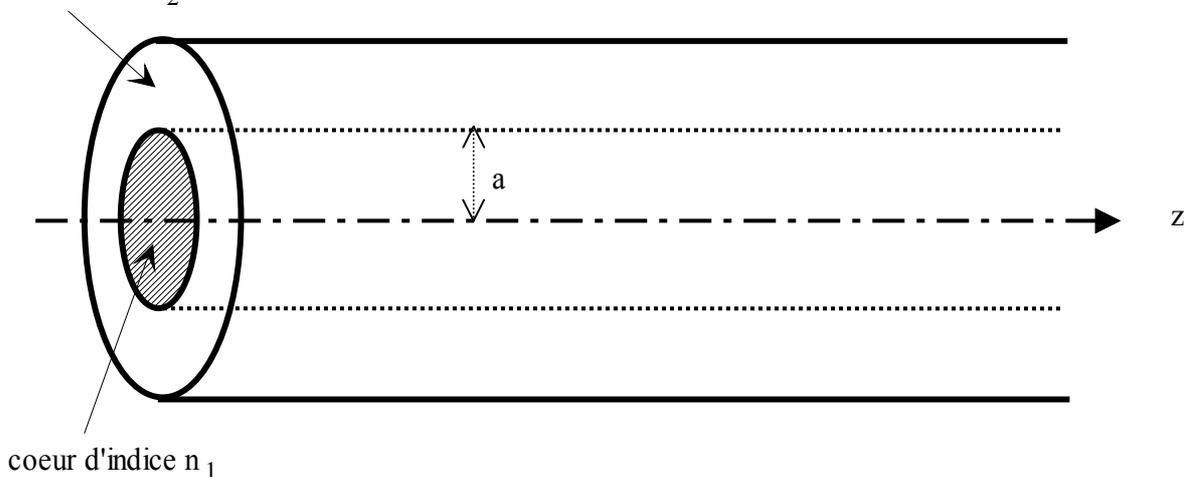


figure 6 ( l'échelle transversale n'est pas respectée )

Une onde électromagnétique est guidée si  $\frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} - \beta^2 > 0$  et  $\frac{\omega^2 n_2^2}{c^2} - \beta^2 < 0$ .

On pose  $\frac{u^2}{a^2} = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} - \beta^2$ ,  $\frac{v^2}{a^2} = \beta^2 - \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2}$  et  $V^2 = u^2 + v^2$ .  $V$ ,  $u$  et  $v$  sont des quantités

positives.

Par analogie avec les notations précédentes, les champs électromagnétiques sont définis de la manière suivante :

- dans le cœur ( $r < a$ ) :

$$\underline{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{E}_{S1}(r, \varphi) e^{j(\omega t - \beta z)} \text{ et } \underline{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_{S1}(r, \varphi) e^{j(\omega t - \beta z)} + B_{z1}(r, \varphi) \mathbf{e}_z e^{j(\omega t - \beta z)} \text{ avec}$$

$$\mathbf{E}_{S1}(r, \varphi) \cdot \mathbf{e}_z = 0, \mathbf{B}_{S1}(r, \varphi) \cdot \mathbf{e}_z = 0.$$

- dans la gaine ( $r > a$ ) :

$$\underline{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{E}_{S2}(r, \varphi) e^{j(\omega t - \beta z)} \text{ et } \underline{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{B}_{S2}(r, \varphi) e^{j(\omega t - \beta z)} + B_{z2}(r, \varphi) \mathbf{e}_z e^{j(\omega t - \beta z)} \text{ avec}$$

$$\mathbf{E}_{S2}(r, \varphi) \cdot \mathbf{e}_z = 0, \mathbf{B}_{S2}(r, \varphi) \cdot \mathbf{e}_z = 0.$$

**2.2.1.** Vérifier que  $B_{z1}(r, \varphi) = B_{01} J_m(u \frac{r}{a}) \cos(m\varphi)$  est solution de l'équation différentielle de la question **C.2.1.2.** écrite pour le cœur d'indice  $n_1$ .  $J_m(x)$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $m$  dont quelques propriétés sont rappelées dans les données regroupées au début du problème.

On **admet** de même que  $B_{z2}(r, \varphi) = B_{02} K_m(v \frac{r}{a}) \cos(m\varphi)$  est solution de l'équation différentielle de la question **C.2.1.2.** écrite pour la gaine d'indice  $n_2$ .  $K_m(x)$  est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre  $m$  dont quelques propriétés sont rappelées dans les données regroupées au début du problème.

**2.2.2.** Analyse des relations de passage à l'interface gaine - cœur.

**2.2.2.α.** Rappeler les relations de passage relatives au vecteur champ électrique en  $r = a$ . On ne cherchera pas à calculer explicitement les composantes des vecteurs champs électriques.

**2.2.2.β.** Rappeler de même celles relatives au vecteur champ magnétique en  $r = a$ . On ne cherchera pas à calculer explicitement les composantes des vecteurs champs magnétiques.

On **admet** alors que l'on peut déduire de ces relations que  $m = 0$  et que  $u$  et  $v$  vérifient la relation

suivante :

$$\frac{1}{u} \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = -\frac{1}{v} \frac{K_1(v)}{K_0(v)}.$$

### 2.2.3. Notion de mode.

Les courbes de la figure 7 représentent d'une part la fonction  $\frac{1}{u} \frac{J_1(u)}{J_0(u)}$  et d'autre part la fonction

$$-\frac{1}{\sqrt{V^2 - u^2}} \frac{K_1(\sqrt{V^2 - u^2})}{K_0(\sqrt{V^2 - u^2})} \text{ pour } V = 12,9.$$

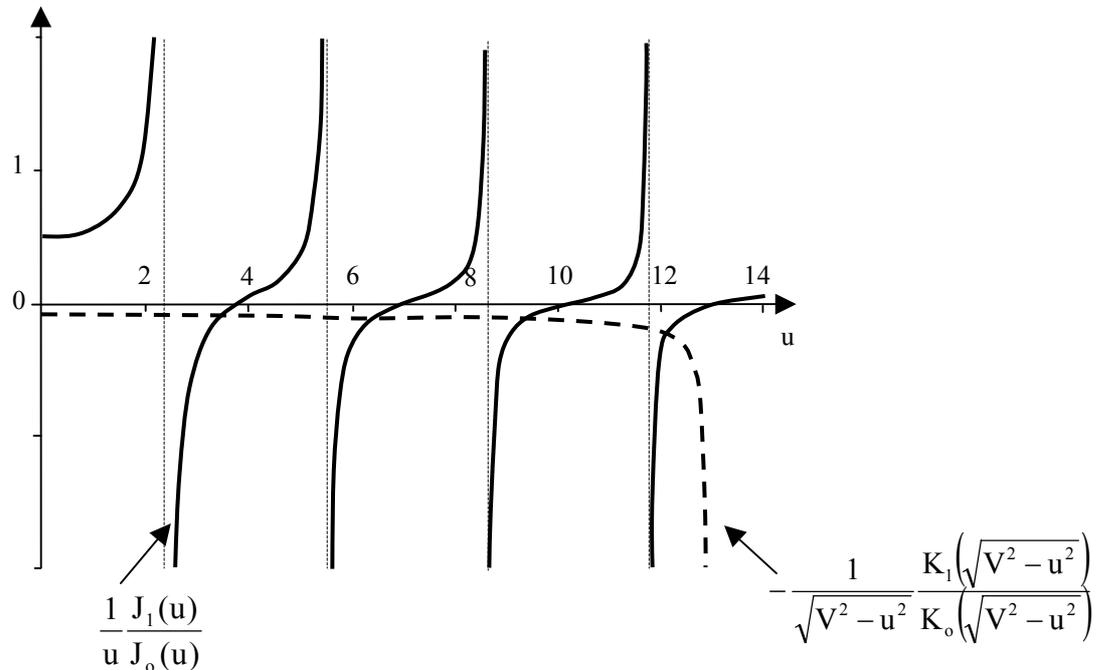


figure 7

**2.2.3.α.** Déterminer la valeur de  $a$  sachant que  $\lambda = 1,31 \mu\text{m}$  ;  $n_1 = 1,447$  et  $n_1 - n_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ .

**2.2.3.β.** Dénumérer le nombre de modes ( T.E. ) possibles dans cette fibre.

**2.2.3.γ.** En remarquant que l'on a toujours  $u$  inférieure à  $V$ , montrer qu'il existe une longueur d'onde de coupure  $\lambda_C$  au dessus de laquelle la propagation d'un mode ( T.E. ) est impossible.

**2.2.3.δ.** Calculer  $\lambda_C$  pour  $a = 4,5 \mu\text{m}$  ;  $n_1 = 1,447$  et  $n_1 - n_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ . On utilise cette fibre avec une longueur d'onde  $\lambda = 1,31 \mu\text{m}$ , calculer  $V$  et conclure.

### 3. Dispersion dans une fibre optique.

Les fibres optiques permettent d'acheminer des signaux électromagnétiques. Elles sont très utilisées dans le domaine des télécommunications et des propriétés comme l'atténuation et la dispersion sont très importantes.

Nous nous proposons d'aborder dans cette question l'étude de deux causes de dispersion.

On admet qu'il existe un mode de propagation dit hybride noté  $HE_{11}$ , qui existe à toute longueur d'onde ( alors que tous les autres modes possèdent une longueur d'onde de coupure ).

Une relation de structure semblable mais différente de celle de la question C.2.2.2. relie  $u$  et  $v$ , grandeurs définies à la question C.2.2. On ne cherchera pas à établir cette relation.

On se place dans le cas où seul le mode  $HE_{11}$  est susceptible de se propager, la fibre est alors dite monomode.

### 3.1. Définition de la dispersion.

3.1.1. Définir la vitesse de phase de l'onde électromagnétique en fonction de  $\omega$  et  $\beta$ .

3.1.2. Définir de même la vitesse de groupe  $v_g$  en fonction de  $\omega$  et  $\beta$ . En donner la signification physique.

Dans une fibre optique de longueur  $L$ , le temps de propagation de groupe  $\tau_g = \frac{L}{v_g}$  est le temps mis par un signal quasi monochromatique pour parcourir la longueur  $L$  de la fibre. On définit alors le coefficient de dispersion  $D$  de la fibre par la relation :  $D = \frac{1}{L} \frac{d\tau_g}{d\lambda}$ .

### 3.2. Dispersion due au matériau.

Pour évaluer la dispersion  $D_m$  due au matériau diélectrique, on suppose que  $\beta \approx \frac{2\pi}{\lambda} n_1$ . L'indice  $n_1$  du cœur de la fibre dépend de la longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide de l'onde électromagnétique.

3.2.1. Expliciter la vitesse de groupe en fonction de  $c$ , vitesse la lumière dans le vide,  $\lambda$ ,  $n_1$  et  $\frac{dn_1}{d\lambda}$ .

3.2.2. En déduire l'expression de  $D_m$  en fonction de  $c$ ,  $\lambda$  et  $\frac{d^2n_1}{d\lambda^2}$ .

3.2.3. Evaluer numériquement  $D_m$  pour de la silice pure sachant que, pour  $\lambda = 1,31 \mu\text{m}$ ,  $\frac{d^2n_1}{d\lambda^2} = -7,5 \cdot 10^8 \text{ m}^{-2}$ . On donnera  $D_m$  en  $\text{ps} \cdot \text{km}^{-1} \cdot \text{nm}^{-1}$ .

### 3.3. Dispersion due au guide.

On suppose dans cette question que les indices  $n_1$  et  $n_2$  ne dépendent pas de la longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide.

On pose  $B = \frac{v^2}{V^2}$ ,  $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_2}$ ,  $\frac{u^2}{a^2} = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} - \beta^2$ ,  $\frac{v^2}{a^2} = \beta^2 - \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2}$  et  $V^2 = u^2 + v^2$ .

On suppose  $\Delta \ll 1$ .

3.3.1. Etablir la relation :  $\beta \approx \frac{2\pi}{\lambda} n_2 (1 + B\Delta)$ . On pourra commencer par évaluer  $B$ .

3.3.2. En déduire que  $\frac{1}{v_g} \approx \frac{n_2}{c} \left( 1 + \Delta \frac{d(VB)}{dV} \right)$ .

3.3.3. Donner enfin l'expression de la dispersion  $D_G$  due au guide en fonction de  $c$ ,  $\lambda$ ,  $n_1 - n_2$  et  $V \frac{d^2(VB)}{dV^2}$ .

**3.3.4.** Evaluer numériquement  $D_G$  en  $\text{ps.km}^{-1}.\text{nm}^{-1}$  pour  $n_1-n_2 = 4.10^{-3}$ ,  $\lambda = 1,31 \mu\text{m}$  en sachant que  $V = 2,32$  et  $V \frac{d^2(VB)}{dV^2} \approx 0,24$ .

### **3.4. Conclusion**

On étudie une liaison par fibre optique d'une longueur de  $L = 100 \text{ km}$ , la source lumineuse est une diode laser de longueur d'onde  $\lambda = 1,31 \mu\text{m}$  et de largeur spectrale  $\Delta\lambda = 0,1 \text{ nm}$ .

**3.4.1.** Dans le cas où l'on ne prend en compte qu'une seule cause de dispersion, évaluer le débit maximal de cette liaison. On l'exprimera en bit/s.

**3.4.2.** Que peut-on espérer pouvoir réaliser en prenant en compte ces deux causes de dispersion ?