

**SESSION DE 2007****Concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés****Section : sciences physiques**

Option : physique

Composition de physique

**Durée : 5 heures**

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit..

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

**NB :** *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

**Tournez la page S.V.P.**

# **Propagation d'une onde électromagnétique dans le domaine optique**

Le sujet traite de quelques aspects des phénomènes de propagation optique dans différents milieux.

La partie I est une introduction à l'optique géométrique qui débouche sur une première étude des fibres optiques à saut puis à gradient d'indice. La partie II est consacrée à l'étude de la propagation d'une onde électromagnétique dans les milieux diélectriques linéaires homogènes et isotropes, avec comme finalité l'application au guidage d'une onde. La partie III traite ensuite de la propagation optique dans les milieux non isotropes uniaxes, et enfin la partie IV aborde l'optique non linéaire.

La partie I est totalement indépendante du reste de la composition. Les autres parties utilisent des définitions communes, mais peuvent être abordées de manière indépendante.

La plus grande importance sera accordée à la qualité de la rédaction et de la présentation, et les réponses aux questions qualitatives devront être claires, argumentées, pouvant s'appuyer sur un ou plusieurs exemples.

On rappelle que la célérité de la lumière dans le vide est  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  et que la permittivité diélectrique du vide est  $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F m}^{-1}$ .

## **Partie I : Optique géométrique**

**I-1-** Définir avec soin l'approximation de l'optique géométrique.

**I-2-** Définir un « rayon lumineux ». Quelles sont les trois propriétés fondamentales vérifiées par les rayons lumineux dans le cadre de l'optique géométrique ?

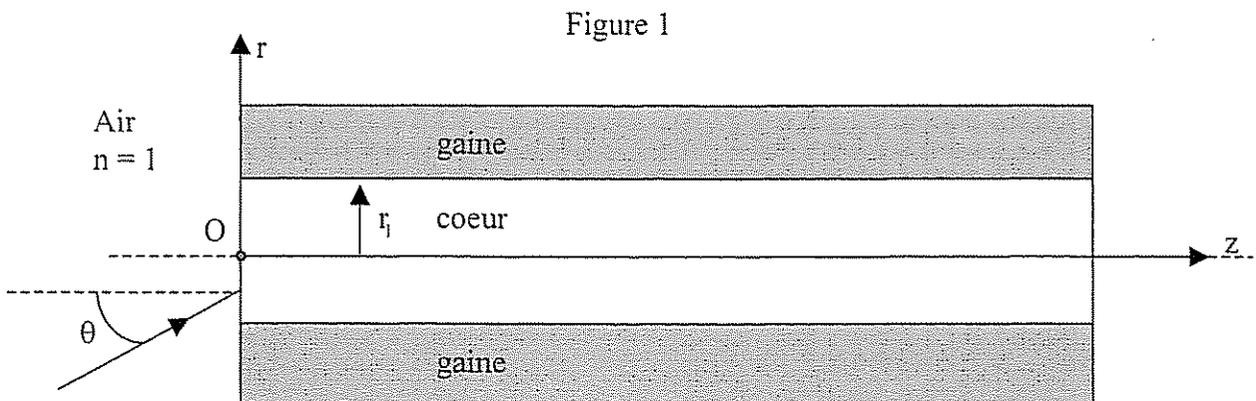
### **I-3- Principe de Fermat**

Considérons un milieu transparent et isotrope, d'indice en un point P quelconque noté  $n(P)$ , et une courbe  $\mathcal{C}$  dans ce milieu joignant deux points A et B. On désigne par  $ds$  un élément de longueur de cette courbe.

- a- Donner sommairement la signification de chacun des termes « transparent » et « isotrope ».
- b- Définir le « chemin optique »  $L(\mathcal{C})$  le long de la courbe  $\mathcal{C}$ , et en donner le sens physique.
- c- Énoncer le principe de Fermat et donner, en argumentant, une expression mathématique de cet énoncé.

#### I-4- Conséquences du principe de Fermat. Lois de Snell-Descartes

- a- Montrer que le principe de Fermat permet de retrouver la loi de propagation rectiligne dans un milieu homogène, en donnant rapidement la signification du terme « homogène », ainsi que le principe de retour inverse de la lumière.
- b- Considérons un segment rectiligne  $[AB]$ , dont les extrémités A et B subissent des déplacements élémentaires  $d\vec{A}$  et  $d\vec{B}$ . En notant  $\vec{u}$  le vecteur unitaire porté par  $[AB]$  et dirigé de A vers B, montrer que :  $dAB = \vec{u} \cdot (d\vec{B} - d\vec{A})$
- c- En utilisant le résultat précédent, retrouver à partir du principe de Fermat les première et deuxième lois de Snell-Descartes, aussi bien pour la réflexion que pour la réfraction d'un rayon lumineux à la surface d'un dioptre séparant deux milieux transparents, isotropes et homogènes, d'indices  $n_1$  pour le milieu d'incidence et  $n_2$  pour le milieu de réfraction.
- d- Qu'appelle-t-on « angle de réfraction limite » ? Dans quel cas peut-on envisager un phénomène de réflexion totale ?
- e- **Application : la fibre optique à saut d'indice**



Une fibre optique est fabriquée à base de verres ou de plastiques supposés transparents et isotropes. La fibre à saut d'indice est constituée d'un cœur cylindrique homogène de rayon  $r_1$ , d'indice  $n_1$  et d'axe Oz, et d'une gaine cylindrique d'indice  $n_2$  entourant le cœur et de même axe

(cf figure 1). On introduit  $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$ . Dans la pratique,  $n_1$  et  $n_2$  ont des valeurs très voisines, et  $|\Delta| \approx 10^{-2}$ .

On considère, dans l'air d'indice 1, un rayon incident dont le plan d'incidence contient l'axe Oz, et qui arrive sur l'entrée de la fibre avec une incidence  $\theta$  (voir figure 1).

- $\alpha$ - Comment faut-il choisir  $n_1$  et  $n_2$  pour que la lumière soit guidée, c'est à dire pour que la réflexion totale puisse se produire ?
- $\beta$ - Montrer alors que, si  $\theta$  reste inférieur à un angle  $\theta_{\max}$ , un rayon peut être guidé dans le cœur. On appelle ouverture numérique O.N. la quantité  $\sin \theta_{\max}$ . Exprimer l'O.N. en fonction de  $n_1$  et  $\Delta$ . Faire l'application numérique avec  $\Delta = 10^{-2}$  et  $n_1 = 1,50$ .
- $\gamma$ - Que se passe-t-il si on courbe fortement la fibre ?
- $\delta$ - Une impulsion lumineuse arrive à  $t = 0$ , au point O sur la fibre précédente, sous la forme d'un faisceau conique convergent d'axe Oz, de demi-angle au sommet  $\theta_i < \theta_{\max}$ . Pour une fibre de longueur L, calculer l'élargissement temporel  $\Delta t$  de cette impulsion à la sortie de la fibre. On donne  $L = 10$  m,  $\theta_i = 8^\circ$ . Faire l'application numérique.

### I-5- Extension à un milieu non homogène : loi fondamentale de l'optique géométrique

En utilisant les lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction dans un milieu isotrope non homogène, on peut aboutir à la loi fondamentale de l'optique géométrique :  $\frac{d(n\bar{u})}{ds} = \overline{\text{grad } n}$  où  $\bar{u}$  est le vecteur unitaire tangent au rayon lumineux,  $n$  l'indice du milieu et  $s$  l'abscisse curviligne le long de ce rayon, en un point donné de ce dernier.

En introduisant  $\vec{v}$ , vecteur unitaire porté par la normale principale au rayon et orienté dans sa concavité, et  $R > 0$ , rayon de courbure de ce rayon au point considéré, on peut montrer que la loi fondamentale de l'optique géométrique permet d'aboutir à l'expression plus simple suivante :

$$\frac{n}{R} = \vec{v} \cdot \overline{\text{grad } n}$$

a- En s'appuyant sur un exemple concret bien choisi, discuter du sens physique de cette dernière formule. Décrire une expérience de laboratoire permettant une illustration simple de ce phénomène.

**b- Application : la fibre optique à gradient d'indice**

On reprend le cadre de l'application précédente (question I-4-e), mais, afin de remédier en particulier à l'élargissement des impulsions, on remplace le cœur par un milieu inhomogène

d'indice  $n(r)$  vérifiant l'équation suivante :  $n^2(r) = n_1^2 \left\{ 1 - 2\Delta \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right\}$  pour  $r < r_1$ , où  $r$

désigne la distance du point considéré à l'axe Oz. La gaine reste homogène d'indice  $n_2$ , et on a encore  $n_1 = n(r=0) = 1,50$  et  $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} = 10^{-2}$ .

On considère un rayon lumineux pénétrant dans la fibre en O avec l'incidence  $\theta$  et se propageant dans un plan axial (le plan d'incidence contient l'axe Oz) et dans le cœur.

$\alpha$ - On introduit  $\alpha$ , angle formé en un point par le rayon lumineux et l'axe Oz. Que peut-on dire de la quantité  $n \cos \alpha$  ? Établir alors l'équation de la trajectoire de ce rayon lumineux en fonction de  $r_1$ ,  $\theta_0 = \text{Arcsin} \left( \frac{\sin \theta}{n_1} \right)$  et  $\Delta$ . Quelle est la nature de cette trajectoire ? Montrer que le rayon coupe l'axe (Oz) en des points régulièrement espacés d'une longueur  $d$  qu'on exprimera en fonction de  $r_1$ ,  $\Delta$  et  $\theta_0$ .

$\beta$ - Dans les conditions précédentes, quelle est la condition sur  $\theta$  pour que le rayon se propage effectivement dans le cœur de la fibre ? En déduire l'ouverture numérique en fonction de  $\Delta$  et  $n_1$ . Faire l'application numérique et commenter.

- $\gamma$ - En considérant une impulsion lumineuse identique à celle de l'application précédente, l'élargissement  $\Delta t'$  de cette impulsion à la sortie d'une fibre à gradient d'indice de longueur  $L$  est donné par  $\Delta t' = \frac{n_1 L}{c} \left( \frac{1}{2 \cos \theta_0} - 1 + \frac{\cos \theta_0}{2} \right)$ . Faire l'application numérique pour  $L = 10$  m et  $\theta_i = 8^\circ$  et conclure .
- $\delta$ - Donner des exemples pratiques d'utilisation de fibres optiques.

## Partie II : Propagation dans un milieu diélectrique non magnétique

### A- Etude générale macroscopique

#### II-A-1- Définitions générales

- Expliquer ce qu'on entend par « charges libres » et « charges liées » dans un milieu matériel.
- Définir un milieu diélectrique et le vecteur polarisation  $\vec{P}$  en un point de ce milieu (on n'omettra pas de donner l'unité de cette grandeur).
- Dans un milieu diélectrique non magnétique, rappeler sans justification les relations qui relient le vecteur polarisation  $\vec{P}$  et les densités volumiques de charges et de courants liés (notés respectivement  $\rho_{\text{liés}}$  et  $\vec{j}_{\text{liés}}$ ) en un point de ce milieu.
- Rappeler les équations de Maxwell dans un tel milieu en introduisant le vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  dont on donnera la définition et l'unité.
- On considère deux milieux diélectriques non magnétiques, séparés par une surface  $\Sigma$ . Ecrire sans démonstration les relations de passage entre ces deux milieux, concernant les champs électrique  $\vec{E}$ , magnétique  $\vec{B}$  et le vecteur  $\vec{D}$ .

#### II-A-2- Cas particulier d'un milieu diélectrique parfaitement isolant, non magnétique, linéaire, homogène et isotrope

Dans toute la suite, on appellera ( $\mathcal{M}$ ) un tel milieu.

Un milieu est dit parfaitement isolant si les densités de charges et de courants libres sont nulles en tout point et pour tout temps :  $\rho_{\text{libres}} = 0$ ,  $\vec{j}_{\text{libres}} = \vec{0}$ .

- a- Donner la signification de chacun des termes « linéaire », « homogène » et « isotrope ». Pourquoi est-il judicieux d'étudier un tel milieu en réponse sinusoïdale, en utilisant la notation complexe ?
- b- Donner la définition et l'unité de la susceptibilité diélectrique complexe  $\chi_e(\omega)$  et de la permittivité diélectrique complexe  $\underline{\epsilon}(\omega)$  à la pulsation  $\omega$ . Quelle relation relie ces deux grandeurs ?

### II-A-3- Propagation des ondes électromagnétiques dans ( $\mathcal{M}$ )

Nous allons nous intéresser ici à la propagation, dans ( $\mathcal{M}$ ) de permittivité diélectrique complexe  $\underline{\epsilon}(\omega)$ , d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique décrite en notation complexe par les champs électrique  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0(M) \exp(-i\omega t)$  et magnétique  $\vec{B}(M, t) = \vec{B}_0(M) \exp(-i\omega t)$ , en un point M du milieu et à l'instant t. On rappelle que  $i^2 = -1$ .

- a- Déterminer les équations de propagation des champs complexes  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  dans ce milieu (équations découplées vérifiées séparément par  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$ ).
- b- En déduire, en précisant la forme choisie pour les fonctions  $\vec{E}_0(M)$  et  $\vec{B}_0(M)$ , la relation de dispersion dans ce milieu (on introduira un vecteur d'onde  $\vec{k}$  a priori complexe).
- c- Définir l'indice complexe  $\underline{n}(\omega) = n_r(\omega) + i n_i(\omega)$ . Donner l'interprétation physique de  $n_r(\omega)$  et de  $n_i(\omega)$ . Caractériser les zones du spectre où ( $\mathcal{M}$ ) est transparent.
- d- Quelle est la structure du champ électromagnétique dans le milieu ?  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  sont-ils nécessairement en phase ?
- e- Déterminer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting  $\vec{R}$  dans ce milieu. Commenter le résultat obtenu.

## B- Réflexion et réfraction d'une onde plane à la surface de séparation de deux milieux $(\mathcal{M})_1$ et $(\mathcal{M})_2$ transparents

Une onde plane monochromatique, polarisée rectilignement et de pulsation  $\omega_i$ , est incidente à la surface de séparation  $\Sigma$  entre deux milieux diélectriques linéaires homogènes isotropes parfaitement isolants non magnétiques  $(\mathcal{M})_1$  et  $(\mathcal{M})_2$ , transparents, d'indices réels respectifs  $n_1$  pour le milieu d'incidence  $(\mathcal{M})_1$  et  $n_2$  pour le milieu de réfraction  $(\mathcal{M})_2$ .

### II-B-1- Lois de Snell-Descartes

Montrer que les lois de Snell-Descartes (réflexion et réfraction) peuvent être déduites de l'écriture des relations de passage des champs au niveau de  $\Sigma$ .

### II-B-2- Formules de Fresnel

On se place dans le cas où l'onde incidente est polarisée parallèlement au plan d'incidence. On appelle  $r_{//}$  et  $t_{//}$  respectivement les coefficients de réflexion et de transmission pour l'amplitude du champ électrique,  $i_1$  l'angle d'incidence et  $i_2$  l'angle de réfraction.

a- Quelles sont les quantités conservées à la traversée de la surface  $\Sigma$ ? On justifiera brièvement la réponse.

b- On donne :

$$|r_{//}| = \left| \frac{\tan(i_2 - i_1)}{\tan(i_2 + i_1)} \right| = \left| \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} \right|$$

$$\text{et } |t_{//}| = \left| \frac{2 n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} \right|.$$

Définir et déterminer dans ce cas les coefficients de réflexion  $R_{//}$  et de transmission  $T_{//}$  en puissance. Commenter.

Dans le cas où le champ électrique est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, on aboutit aux coefficients de réflexion  $r_{\perp}$  et de transmission  $t_{\perp}$  en amplitude suivants :

$$|r_{\perp}| = \left| \frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_2 + i_1)} \right| \quad |t_{\perp}| = \left| \frac{2 (\cos i_1) (\sin i_2)}{\sin(i_1 + i_2)} \right|$$

- c- Définir ce qu'on appelle l'angle de Brewster  $i_B$ , et donner son expression. Que se passe-t-il lorsqu'on envoie sur  $\Sigma$  une onde plane non polarisée sous l'incidence de Brewster ?
- d- Dans le cas de la réflexion totale, retrouve-t-on l'onde dans le milieu d'indice  $n_2$  ? Si oui, sous quelle forme ? (aucune démonstration n'est demandée).

### II-B-3- Application au guidage d'une onde

Pour simplifier l'étude, on se place dans une géométrie bidimensionnelle qui rend bien compte des propriétés fondamentales des fibres à saut d'indice : une couche d'épaisseur  $r_1$  d'indice réel  $n_1$ , immergée dans un milieu diélectrique d'indice réel  $n_2 < n_1$  (cf figure 2). Le guide est éclairé par une onde monochromatique de pulsation  $\omega$ .

Dans chacune des couches, on cherche un champ électrique complexe de la forme  $\vec{E}(x, y, z, t) = A(x) \exp[i(\alpha z - \omega t)] \vec{e}_y$ , dit transverse électrique et noté T.E ( $\alpha$  désigne une constante réelle positive et  $A(x)$  une fonction réelle de  $x$ ).

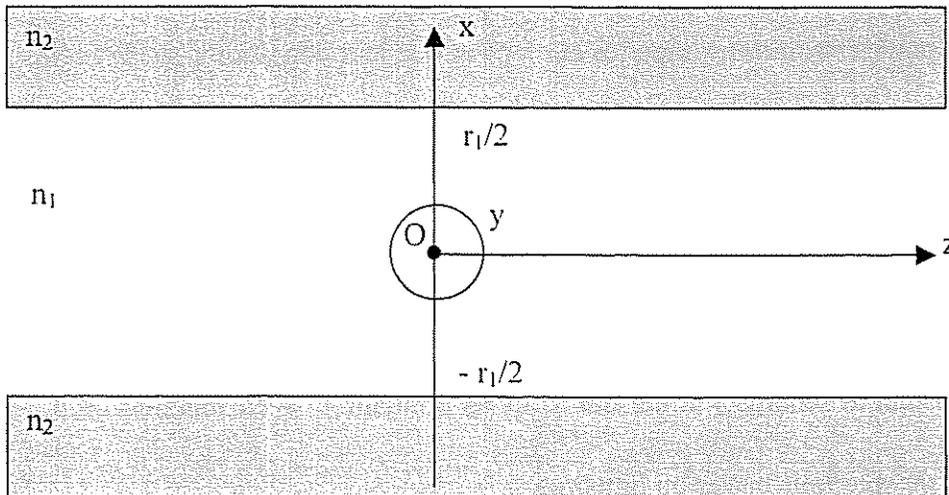


Figure 2

- a- Écrire l'équation de propagation du champ électrique complexe  $\vec{E}(x, y, z, t)$  dans chacune des couches.

En déduire, dans chaque couche, une relation entre  $A$ ,  $\frac{d^2 A}{dx^2}$ ,  $\alpha$  et  $k_j = n_j \frac{\omega}{c}$  avec  $j = 1, 2$ .

- b- Que doivent vérifier  $A$  et  $\frac{dA}{dx}$  aux interfaces  $x = \pm \frac{r_1}{2}$ ? Montrer que la symétrie du problème permet de chercher des solutions paires ou impaires.
- c- Discuter, dans chaque tranche, de la nature des solutions de l'équation différentielle obtenue à la question a- en fonction de la valeur de  $(k_j^2 - \alpha^2)$ .
- d- Montrer qu'il n'existe pas de solutions au problème pour  $k_1 < \alpha$  et que le guidage de l'onde par la fibre impose la condition  $k_2 < \alpha$ .
- e- On suppose dans la suite  $k_2 < \alpha \leq k_1$  et on cherche à déterminer entièrement les modes guidés dans la fibre optique. On pose  $\beta^2 = k_1^2 - \alpha^2$  et  $\gamma^2 = -k_2^2 + \alpha^2$ , avec  $\beta$  et  $\gamma$  supposés positifs. Ecrire la forme générale d'une solution paire et montrer qu'une telle solution n'est possible que si :

$$\gamma \frac{r_1}{2} = \beta \frac{r_1}{2} \tan\left(\beta \frac{r_1}{2}\right).$$

- f- Procéder de même pour les solutions impaires et montrer que leur condition d'existence est :

$$\gamma \frac{r_1}{2} = -\beta \frac{r_1}{2} \cotan\left(\beta \frac{r_1}{2}\right).$$

- g- Pourrait-on à ce niveau développer une analogie avec un système quantique simple ?
- h- Représenter sur un même schéma l'allure des graphes donnant  $\gamma \frac{r_1}{2}$  en fonction de  $\beta \frac{r_1}{2}$  pour les deux types de solutions paires ou impaires.

En utilisant la relation :

$$\left(\gamma \frac{r_1}{2}\right)^2 + \left(\beta \frac{r_1}{2}\right)^2 = r_1^2 \frac{k_1^2 - k_2^2}{4}$$

trouver le principe d'une détermination graphique des valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$  pour les modes guidés T.E. de la fibre. Montrer qu'il existe toujours un mode T.E. et que le nombre  $N$  de ces modes est donné par :

$$N = 1 + \text{Ent} \left( \frac{\omega r_1}{\pi c} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right)$$

où  $\text{Ent}(u)$  représente la partie entière de  $u$ .

- i- Qu'appelle-t-on fibre optique « monomode » ? Quelle est la valeur maximale du rayon d'une telle fibre ?
- j- Ecrire la condition d'existence du  $p^{\text{ième}}$  mode T.E. guidé et vérifier qu'il existe pour ce mode une pulsation de coupure  $\omega_{pc}$  qu'on déterminera. Décrire qualitativement ce qui se passe lorsqu'on envoie à l'entrée du guide d'onde une onde de pulsation  $\omega$  inférieure à la plus petite pulsation de coupure non nulle.

## **Partie III : Propagation dans les milieux non isotropes: biréfringence d'un milieu uniaxe**

### **A- Etude générale**

Dans cette partie, nous nous intéresserons à la propagation d'une onde plane monochromatique polarisée rectilignement dans un milieu diélectrique parfaitement isolant transparent, linéaire, homogène, non magnétique mais électriquement anisotrope.

#### **III-A-1- Introduction du tenseur diélectrique**

- a- Définir le terme « anisotrope ». Qu'est-ce que le phénomène de biréfringence ?
- b- Quelle est la relation générale liant le vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  et le champ électrique  $\vec{E}$  dans ce milieu ? Comment s'exprime cette relation dans une base principale notée (O, X, Y, Z) ? On notera  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  et  $\epsilon_z$  les permittivités diélectriques principales. Qu'appelle-t-on alors milieu uniaxe ?

#### **III-A-2- Structure de l'onde dans un milieu anisotrope**

Une onde plane monochromatique polarisée rectilignement se propage dans un tel milieu. Le champ électrique complexe associé est de la forme:  $\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ , avec  $\vec{k} = k \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est la direction de propagation de l'onde dans le milieu ( $k$  réel).

- a- Réécrire les équations de Maxwell en utilisant la notation complexe. En déduire la structure de l'onde dans le milieu. On précisera sur un schéma les positions relatives des différents vecteurs réels  $\vec{u}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ . Auquel des deux vecteurs  $\vec{E}$  ou  $\vec{D}$  doit-on identifier la vibration lumineuse pour conserver la transversalité du champ électromagnétique par rapport à la direction de propagation  $\vec{u}$  ?
- b- Définir sur le schéma précédent le plan d'onde et le plan de polarisation et représenter le vecteur de Poynting  $\vec{R}$ . Commenter en comparant avec le cas des milieux isotropes.
- c- Montrer que les vecteurs  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  et  $\vec{k}$  vérifient la relation suivante :

$$k^2 \vec{E} - \mu_0 \omega^2 \vec{D} = (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k}$$

Que représente la quantité  $\omega/k$  ? on rappelle la formule :  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

- d- On considère à présent le cas particulier d'une propagation le long de la direction (OX) qui correspond à une des directions principales du milieu :  $\vec{u} = \vec{e}_x$ .

$\alpha$ - Montrer que  $\vec{E}$  devient également transverse .

$\beta$ - Dans le cas où  $\vec{E}$  est polarisé rectilignement suivant OY, donner la vitesse  $v_Y$  de

propagation de cette onde en fonction de  $c$  et  $n_Y = \sqrt{\frac{\epsilon_Y}{\epsilon_0}}$  . Reprendre la question si

$\vec{E}$  est polarisé rectilignement selon OZ, en introduisant la vitesse de propagation

$v_Z$  et  $n_Z = \sqrt{\frac{\epsilon_Z}{\epsilon_0}}$  . Commenter.

### B- Lames cristallines uniaxes taillées parallèlement à leur axe optique

Dans ce qui suit, on ne s'intéresse plus qu'aux milieux uniaxes pour lesquels deux des permittivités

diélectriques sont égales :  $\epsilon_X = \epsilon_Y$  . On appelle alors indice ordinaire  $n_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_X}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_Y}{\epsilon_0}}$  et indice

extraordinaire  $n_E = \sqrt{\frac{\epsilon_Z}{\epsilon_0}}$  .

Les lames cristallines « à retard » sont des lames minces taillées dans des milieux uniaxes parallèlement à leur axe optique OZ.

On envoie sur une telle lame une onde plane monochromatique en incidence normale : on se trouve donc être dans la configuration où la direction de propagation  $\vec{u}$  est orthogonale à l'axe optique OZ.

On prendra  $\vec{u} = \vec{e}_x$ .

**III-B-1-** Qu'appelle-t-on lignes neutres de la lame biréfringente ? Quelles sont leurs propriétés ? Donner leur direction dans la base principale précédemment définie, ainsi que les indices les caractérisant.

**III-B-2-** Présenter le principe d'une expérience simple permettant de déterminer expérimentalement la direction des lignes neutres d'une lame cristalline.

**III-B-3-** On se place dans le cas où  $n_0 < n_E$ . Quel est alors l'axe lent ? l'axe rapide ?

**III-B-4-** On envoie sur cette lame, sous incidence normale, une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide, polarisée rectilignement dans une direction faisant l'angle  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) avec l'axe lent. L'épaisseur de la lame est notée  $e$ . Dans quelles conditions l'onde émergente est-elle polarisée rectilignement ? Préciser alors les directions de polarisation possibles. Quel type de polarisation obtiendrait-on en général ?

**III-B-5-** Quel est l'effet d'une telle lame sur une lumière non polarisée ?

**III-B-6-** Qu'appelle-t-on lame  $\lambda/2$  ? lame  $\lambda/4$  ? Application numérique : calculer l'épaisseur minimale d'une lame demi-onde de quartz, pour la radiation jaune du sodium ( $\lambda = 589\text{nm}$ ). On donne pour cette radiation  $\Delta n = n_E - n_0 = 0,0091$ .

**III-B-7-** Donner un montage simple permettant de réaliser un « polariseur circulaire », puis un « analyseur circulaire ».

**III-B-8-** Proposer un montage, utilisant un polariseur et une lame bien choisie, faisant anti-reflet pour une onde plane monochromatique arrivant sous incidence normale sur une surface réfléchissante. On ne demande pas une démonstration détaillée des propriétés du montage.

**III-B-9-** On éclaire en lumière blanche et en incidence normale une lame biréfringente placée entre un analyseur et un polariseur croisés. Pour un même cristal, quand l'épaisseur de la lame augmente, on observe, sur un écran placé après la lame, d'abord une tache colorée, (dont la teinte varie avec

l'épaisseur), puis une tache blanc « grisâtre ». Expliquer simplement le phénomène. Obtient-on, pour une lame mince, la même couleur si l'analyseur et le polariseur, au lieu d'être croisés, sont parallèles ?

### C- Déterminations expérimentales d'une biréfringence

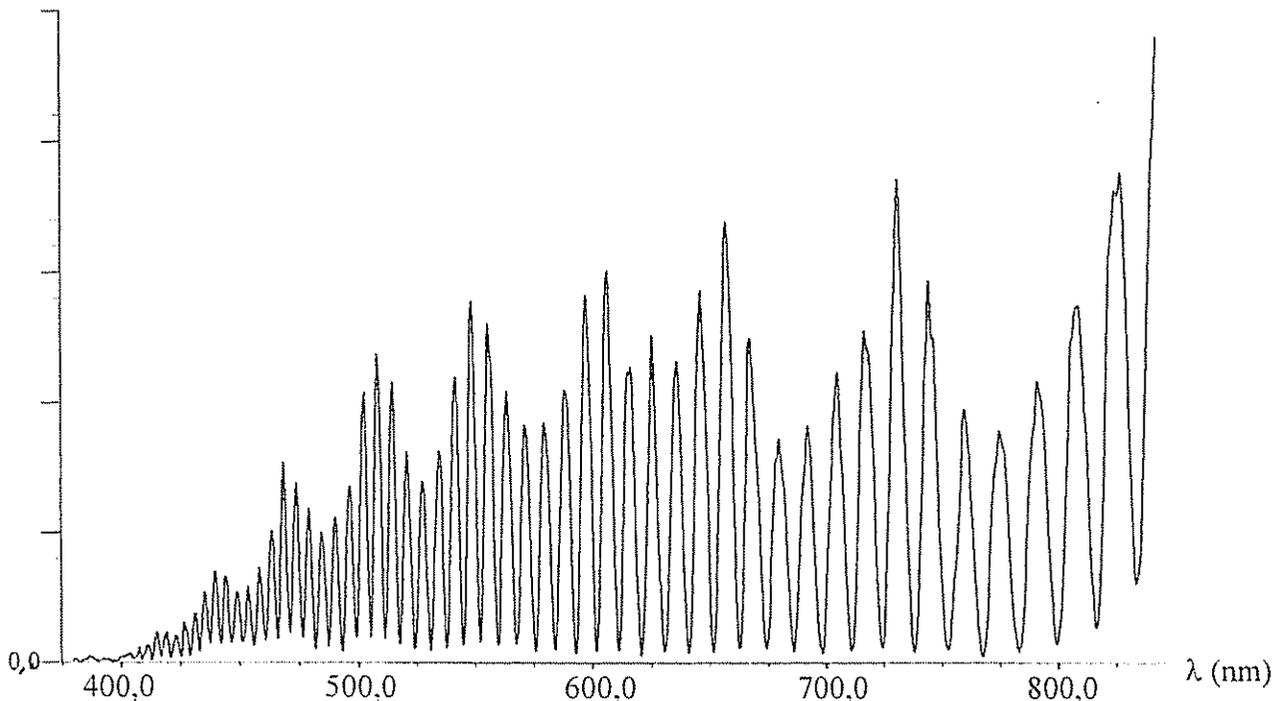
On s'intéresse ici aux techniques expérimentales permettant de déterminer la valeur de la biréfringence  $|n_E - n_0|$  pour une lame biréfringente donnée, taillée parallèlement à son axe optique.

#### III-C-1- Méthode du spectre cannelé pour une lame « épaisse »

- a- Rappeler le montage expérimental permettant d'obtenir un spectre cannelé avec un contraste maximum à partir d'une lame biréfringente « épaisse » (on utilisera un polariseur et un analyseur croisés).
- b- Montrer comment l'analyse du spectre cannelé obtenu permet de remonter à la détermination de la biréfringence  $|n_E - n_0|$  de la lame.
- c- Le spectre représenté figure 3 représente l'intensité lumineuse en fonction de la longueur d'onde, obtenue au cours de l'expérience précédente, pour une lame biréfringente de nature inconnue, entre polariseur et analyseur croisés. Exploiter ce graphe expérimental et, sachant que  $e = 4,0$  mm, déterminer la biréfringence de la lame utilisée.

Intensité  
(unité arbitraire)

Figure 3



**III-C-2-** Connaissez-vous une autre méthode de détermination de la biréfringence d'une lame ?

**III-C-3-** Peut-on rendre certains matériaux isotropes biréfringents ? Si oui, comment ? Ces effets sont-ils utilisés dans la pratique ? Précisez.

**III-C-4-** Citer des exemples de milieux biréfringents non cristallins.

## **Partie IV : Propagation dans les milieux diélectriques homogènes, isotropes, isolants, transparents, non magnétiques et non linéaires**

### **A- Généralités**

Dans cette partie, nous nous intéressons à la réponse non linéaire d'un tel milieu à une onde électromagnétique.

**IV-A-1-** Citer deux phénomènes physiques qui découlent de cette non linéarité. Avec quel type de source lumineuse peut-on observer ces phénomènes ?

**IV-A-2-** On suppose que le champ  $\vec{E}$  (réel) dans le milieu non linéaire est une superposition d'ondes planes progressives monochromatiques de différentes pulsations  $\omega_j$ , se propageant dans la direction Oz, polarisées rectilignement le long de Ox et dont l'amplitude varie en fonction de z :

$$\vec{E} = \sum_j \vec{E}_j(\vec{k}_j, \omega_j) = \vec{e}_x \operatorname{Re} \left\{ \sum_j \underline{A}_j(z) \exp(i(k_j z - \omega_j t)) \right\}$$

ou encore : 
$$\vec{E} = \frac{\vec{e}_x}{2} \left\{ \sum_j \left[ \underline{A}_j(z) \exp(i(k_j z - \omega_j t)) + \underline{A}_j^*(z) \exp(-i(k_j z - \omega_j t)) \right] \right\}$$

$\vec{e}_x$  étant le vecteur unitaire de l'axe Ox,  $\underline{A}_j^*$  le complexe conjugué de  $\underline{A}_j$ , et  $k_j = \frac{n(\omega_j)}{c} \omega_j$  le module du vecteur d'onde de l'onde de pulsation  $\omega_j$  dans le milieu, avec  $n(\omega_j)$  indice (réel) du milieu transparent à la pulsation  $\omega_j$ .

Dans un milieu non linéaire, la polarisation  $\vec{P}$  (réelle) induite dans le milieu contient une partie linéaire et une partie non linéaire :  $\vec{P} = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL}$ .

La partie linéaire  $\bar{P}_L$  (réelle) dans le milieu diélectrique homogène isotrope transparent isolant et non magnétique considéré, en présence du champ électrique réel décrit ci-dessus, prend la forme suivante :

$$\bar{P}_L = \sum_j \epsilon_0 \chi(\omega_j) \bar{E}_j(\bar{k}_j, \omega_j)$$

où  $\chi(\omega_j)$  est la susceptibilité linéaire, supposée uniforme et réelle, du matériau à la pulsation  $\omega_j$ .

On suppose d'autre part que la polarisation non linéaire  $\bar{P}_{NL}$  (réelle) s'écrit sous la forme suivante:

$$\bar{P}_{NL} = \sum_j \bar{P}_{NL,j}(\bar{k}_j, \omega_j) = \bar{e}_x \operatorname{Re} \left\{ \sum_j \underline{B}_j(z) \exp(i(k_j z - \omega_j t)) \right\}$$

ou encore :

$$\bar{P}_{NL} = \frac{\bar{e}_x}{2} \left\{ \sum_j \left[ \underline{B}_j(z) \exp(i(k_j z - \omega_j t)) + \underline{B}_j^*(z) \exp(-i(k_j z - \omega_j t)) \right] \right\}$$

Montrer à partir des équations de Maxwell que, pour chaque pulsation présente dans le milieu, le champ réel monochromatique  $\bar{E}_j(\bar{k}_j, \omega_j)$  correspondant obéit, dans un milieu diélectrique transparent homogène, isotrope, isolant, non magnétique et non linéaire, à l'équation suivante:

$$\bar{\Delta} \bar{E}_j - \frac{n(\omega_j)^2}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}_j}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \bar{P}_{NL,j}}{\partial t^2}$$

**IV-A-3-** Montrer alors qu'à l'approximation de l'enveloppe lentement variable, où les amplitudes  $\underline{A}_j(z)$  varient sur des distances caractéristiques grandes devant la longueur d'onde,  $\underline{A}_j(z)$  obéit à l'équation de propagation :

$$\frac{d\underline{A}_j(z)}{dz} = i \frac{\omega_j^2}{2 \epsilon_0 c^2 k_j} \underline{B}_j(z) \quad \text{équation (1)}$$

### B- Interaction à trois ondes

On considère un milieu non linéaire situé entre les plans de cote  $z = 0$  et  $z = L$  dans lequel la contribution **réelle** due à la non-linéarité du milieu induite par le champ électrique **réel**  $\bar{E}$  est de la forme :

$$\bar{P}_{NL} = 2 d (\bar{E} \cdot \bar{E}) \bar{e}_x$$

où  $d$  est la susceptibilité non linéaire quadratique ou encore coefficient non linéaire.

#### IV-B-1- Équation de propagation

Le champ appliqué à l'entrée du milieu non linéaire ( $z = 0$ ) est la superposition de deux ondes planes progressives de pulsation  $\omega_1$  et  $\omega_2$  (avec  $\omega_1 > \omega_2$ ). Soient  $\underline{A}_1(z)$  et  $\underline{A}_2(z)$  leurs amplitudes complexes dans le milieu.

- a- Justifier l'apparition dans le milieu d'ondes planes progressives monochromatiques de pulsations  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  et  $\omega'_3 = \omega_1 - \omega_2$ .

Dans la suite, on ne s'intéressera plus qu'à l'onde de pulsation  $\omega_3$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_3 = k_3 \vec{e}_z$ .

- b- Montrer que  $\underline{B}_3(z) = 2d \underline{A}_1(z) \underline{A}_2(z) \exp(i \Delta k z)$ , avec  $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$ , et déduire de (1) l'équation de propagation de l'amplitude complexe  $\underline{A}_3(z)$  de cette onde.  $\Delta k$  est par la suite appelé désaccord de phase.
- c- On suppose que les modules des amplitudes  $\underline{A}_1(0)$  et  $\underline{A}_2(0)$  des ondes incidentes à l'entrée du cristal sont très grands, et on néglige la variation de  $\underline{A}_1(z)$  et  $\underline{A}_2(z)$  dans toute la traversée du cristal :  $\underline{A}_1(z) \approx \underline{A}_1(0)$ ,  $\underline{A}_2(z) \approx \underline{A}_2(0)$ . Trouver l'expression de l'amplitude  $\underline{A}_3(L)$  du champ produit par l'interaction non linéaire à l'autre extrémité du cristal.
- d- On appelle longueur de cohérence la grandeur  $l_c = \frac{2\pi}{\Delta k}$ . Quelle est sa signification physique ?
- e- À quelle condition sur  $\Delta k$  a-t-on transfert d'énergie maximal entre les ondes incidentes et l'onde générée ? On parle alors d'*accord de phase*. Quelle est l'explication physique de l'existence de ce transfert maximal ?

#### IV-B-2- Doublage de fréquence

On envoie à l'entrée du cristal une seule onde de pulsation  $\omega_1$  et d'amplitude  $\underline{A}_1(0)$ .

- a- Montrer à partir des résultats de la question précédente qu'il y a génération d'une onde dite *harmonique*, de pulsation double  $\omega_3 = 2\omega_1$ .

- b- Comment s'écrit la condition d'accord de phase en fonction des indices  $n_1$  et  $n_3$  du milieu aux pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_3 = 2 \omega_1$  ?
- c- On peut montrer qu'à l'accord de phase, les équations de propagation des amplitudes complexes  $\underline{A}_1(z)$  et  $\underline{A}_3(z)$  des deux champs en interaction s'écrivent

$$\frac{d\underline{A}_1(z)}{dz} = i K \underline{A}_1^*(z) \underline{A}_3(z) \qquad \frac{d\underline{A}_3(z)}{dz} = i K [\underline{A}_1(z)]^2$$

où  $K$  est une constante réelle et où  $\underline{A}_1^*$  représente le complexe conjugué de  $\underline{A}_1$ . Justifier la deuxième équation à partir des résultats de la question IV-B-1- et en déduire l'expression de  $K$  en fonction du coefficient non linéaire  $d$  et des autres constantes du problème.

- d- Déduire des équations de propagation que la quantité  $|\underline{A}_1(z)|^2 + |\underline{A}_3(z)|^2$  est indépendante de  $z$ . Donner l'interprétation physique d'un tel résultat.
- e- Montrer que, si à l'entrée du cristal  $\underline{A}_3(0) = 0$  et si  $\underline{A}_1(0)$  est réel (égal à  $A_1(0)$ ), alors les solutions des équations de propagation ci-dessus s'écrivent :

$$\underline{A}_1(z) = \frac{A_1(0)}{\text{ch}(z/D)} \qquad \underline{A}_3(z) = i A_1(0) \text{th}(z/D)$$

où  $D$  est une longueur que l'on déterminera. Les notations  $\text{ch}$  et  $\text{th}$  représentent respectivement les fonctions cosinus hyperbolique et tangente hyperbolique.

Tracer les intensités des deux ondes dans le cristal en fonction de  $z$ . Dans quelles conditions faut-il se placer pour transformer la quasi-totalité de l'onde incidente en onde de fréquence double ?

- f- Application numérique : l'onde incidente, de longueur d'onde dans le vide  $\lambda = 1 \mu\text{m}$ , a une puissance par unité de surface de  $10^9 \text{ W m}^{-2}$ , le cristal a un coefficient non-linéaire  $d$  de  $10^{-22}$  S.I. et les indices  $n_1$  et  $n_3$  valent approximativement 1,5. Quelle est la valeur numérique de la longueur  $D$  ? Quelle est la puissance par unité de surface de l'onde de fréquence double à la sortie du cristal pour cette longueur ?

**FIN**