

SESSION 2013

AGRÉGATION CONCOURS EXTERNE

Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : PHYSIQUE

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

Dualité onde - particule du champ électromagnétique

Nous nous intéressons ici à diverses interprétations de phénomènes électromagnétiques. Après avoir revu les bases de l'électromagnétisme classique de Maxwell (partie A), nous présentons plusieurs expériences qui peuvent être interprétées en associant au champ électromagnétique des grandeurs mécaniques typiquement matérielles : énergie, quantité de mouvement, moment cinétique (Partie B). Nous montrons également dans cette partie B que, pour les ondes électromagnétiques, ces grandeurs mécaniques peuvent être identifiées avec celles de particules discrètes, nécessairement relativistes : les photons.

Les preuves expérimentales de l'existence des photons sont beaucoup plus récentes qu'on ne le pense souvent puisqu'elles datent du dernier quart du vingtième siècle. Les « preuves » traditionnelles : effet photoélectrique (partie C.I) et effet Compton (partie C.II) peuvent en effet être interprétées sans qu'il soit nécessaire de quantifier le champ électromagnétique. La partie C.III étudie le principe simplifié des expériences de corrélation qui ont, les premières, apporté une preuve indiscutable de la quantification du rayonnement.

Les parties sont très largement indépendantes entre elles. Il arrive que le même symbole soit utilisé pour représenter des grandeurs différentes, lorsque cela ne présente aucun risque d'ambiguïté.

Rappels et conventions

Sauf indication contraire, toutes les grandeurs cinématiques et dynamiques sont évaluées dans un référentiel (R) , galiléen, d'origine O , d'axes cartésiens Ox, Oy, Oz , associés à la base orthonormée directe $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$.

La position d'un point M est repérée par le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$; le temps est repéré par t .

Les coordonnées cylindriques d'axe Oz sont notées (ρ, θ, z) et la base cylindrique locale : $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.

Les coordonnées sphériques sont notées (r, θ, φ) , et la base locale associée : $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$. L'angle θ est l'angle entre Oz et OM .

Tous les raisonnements seront menés dans l'approximation non relativiste, sauf dans la partie C.II.

Rappels de cinématique et de dynamique relativiste:

En dynamique relativiste la quantité de mouvement $\vec{p}$ et l'énergie E d'une particule de masse m de vitesse $\vec{v}$ sont données par les relations :

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \text{ et } E = m\gamma c^2, \text{ avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

On rappelle la relation: $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$.

Transformation de Lorentz: Dans le cas d'un référentiel (R') en translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_z$ relativement au référentiel (R) , les coordonnées (x, y, z, t) d'un événement dans (R) sont reliées à (x', y', z', t') , coordonnées de cet événement dans (R') , par:

$$x' = x; y' = y; z' = \gamma(z - \beta ct); t' = \gamma(t - \beta z/c),$$

où l'on a posé $\beta = V/c$ et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Conventions de représentation complexe et valeurs moyennes:

Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ est noté j . Le nombre complexe conjugué de z est noté z^* .

Les grandeurs réelles sinusoïdales de la forme $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ sont associées à la représentation complexe $\underline{f}(t) = A \exp(j(\omega t + \varphi))$.

La valeur moyenne d'une fonction $f(t)$, T -périodique, est noté et définie par : $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$.

On rappelle la relation $\langle f(t) \times g(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{f}(t) \times \underline{g}^*(t))$, qui relie la valeur moyenne temporelle du produit $f(t) \times g(t)$ aux représentations complexes de ces grandeurs.

Données numériques :

- Masse de l'électron : $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg ;
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8$ m.s⁻¹ ;
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4 \times \pi \times 10^{-7}$ H.m⁻¹ ;
- Constante de Planck : $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J.s ;
- Charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C ;
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m⁻¹.

A. Généralités.

1. Equations de Maxwell.

a. Rappeler les équations de Maxwell vérifiées par les champs électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$, magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$, la densité volumique de charge $\rho(\vec{r}, t)$ et la densité volumique de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$.

b. Exprimer la force de Lorentz subie par une particule ponctuelle de charge q , de vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel considéré, soumise aux champs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Cette expression est-elle encore valable si la vitesse de la particule est proche de c ?

2. Energie associée au champ électromagnétique. Vecteur de Poynting.

Dans le vide, le champ électromagnétique est associé à une densité volumique d'énergie électromagnétique donnée par :

$$w_{em}(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(\vec{r}, t).$$

a. A l'aide de cette relation, retrouver l'expression de l'énergie électrique stockée par unité de surface dans un condensateur constitué de deux plans conducteurs infinis, distants de a , respectivement chargés avec les charges

surfaciques constante σ et $-\sigma$. En déduire l'expression de la capacité C_s d'un tel condensateur par unité de surface. L'expression du champ $\vec{E}$ pourra être donnée sans démonstration.

b. De même, retrouver l'expression de l'énergie magnétique stockée par unité de longueur d'un solénoïde infini ayant n spires circulaires de rayon a par unité de longueur et parcouru par une intensité I_0 constante. En déduire l'expression de l'inductance propre Λ par unité de longueur d'un tel solénoïde. L'expression du champ $\vec{B}$ pourra être donnée sans démonstration.

A partir des équations de Maxwell, il est possible d'établir (on ne demande pas de le faire) l'équation:

$$\operatorname{div}(\vec{S}(\vec{r}, t)) + \frac{\partial w_{em}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t),$$

où l'on a introduit le vecteur de Poynting :

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E}(\vec{r}, t) \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)}{\mu_0}.$$

c. Donner l'unité de $\vec{S}(\vec{r}, t)$ en fonction des unités de puissance et de longueur.

d. On considère une surface fermée (Σ) , de normale extérieure $\vec{n}_{ext}$, délimitant dans l'espace un volume (V) . Ce volume contient, à l'instant t , une énergie électromagnétique $W_{em}(t)$. Exprimer $\frac{dW_{em}}{dt}$ en fonction du flux sortant du vecteur de Poynting à travers (Σ) et de l'intégrale de volume : $\iiint_{(V)} \vec{J} \cdot \vec{E} dV$. Interpréter physiquement l'équation ainsi obtenue.

3. Ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques.

a. Donner, en fonction de t et z , l'expression *la plus générale* du champ électrique *réel* associé à une onde électromagnétique plane monochromatique progressive de pulsation ω , se propageant dans le vide dans la direction $\vec{e}_z$. On notera la norme du vecteur d'onde $k = \frac{\omega}{c}$ et on introduira autant de paramètres que nécessaire, en les définissant avec soin. Aucune justification n'est attendue.

b. Préciser cette expression pour les cas particuliers suivants, en notant E_0 l'amplitude des variations de la composante selon $\vec{e}_x$ du champ électrique et en choisissant l'origine des temps de sorte que $\vec{E}(z=0, t=0) \cdot \vec{e}_x = E_0$:

(i) Onde plane polarisée rectilignement selon $\vec{e}_x$. Cette onde sera désignée « onde (r) » dans la suite.

(ii) Onde plane polarisée circulairement dans le sens droit. Cette onde sera désignée « onde (d) » dans la suite.

(iii) Onde plane polarisée circulairement dans le sens gauche. Cette onde sera désignée « onde (g) » dans la suite.

c. Déterminer le champ magnétique associé aux ondes (r), (d) et (g) définies ci-dessus.

d. Déterminer la densité d'énergie $w_{em}(z, t)$ et le vecteur de Poynting $\vec{S}(z, t)$ instantanés associée aux ondes (r), (d) et (g) définies ci-dessus. Les résultats seront exprimés en fonction de $E_0, \epsilon_0, \omega, t, z, c$.

e. Déterminer pour chacune des ondes (r), (d) et (g) ci-dessus, les grandeurs moyennes $\langle \vec{S} \rangle$ et $\langle w_{em} \rangle$.

Quelle relation simple existe entre $\langle \vec{S} \rangle$, $\langle w_{em} \rangle$ et c ? Quelle interprétation peut-on lui donner?

f. Dans le cas d'un laser communément disponible dans un laboratoire de lycée, donner des ordres de grandeur numériques pour $\|\langle \vec{S} \rangle\|$, $\langle w_{em} \rangle$, et les amplitudes E_0 et B_0 des champs.

B. Grandeurs mécaniques associées au champ électromagnétique.

De même qu'il est possible d'affecter au champ électromagnétique une densité d'énergie, on peut montrer que le champ électromagnétique est associé à une densité volumique de quantité de mouvement :

$$\vec{\pi}_{em} = \epsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B})$$

et à une densité volumique de moment cinétique (relativement au point O)

$$\vec{\ell}_{em} = \vec{r} \wedge \vec{\pi}_{em}.$$

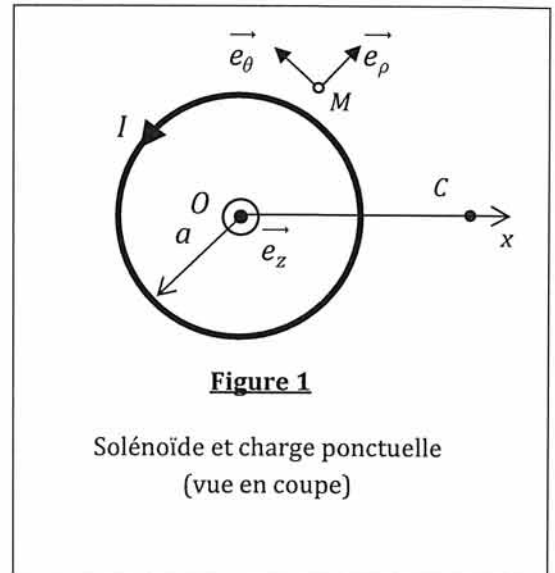
Nous étudions, dans cette partie B, différentes conséquences de ces propriétés, tout d'abord dans l'approximation quasi-statique (parties B. I et B.II) puis dans le cas d'ondes électromagnétiques (parties B.III et B.IV).

I. Transfert de quantité de mouvement entre le champ électromagnétique et une charge ponctuelle.

On considère un solénoïde, constitué de spires circulaires jointives de rayon a , d'axe Oz . Le solénoïde, de longueur totale ℓ comprend $N = n\ell$ spires. Il est parcouru par un courant d'intensité I_0 constante.

On utilise les coordonnées cylindriques d'axe Oz , (ρ, θ, z) , associées à la base locale usuelle $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ (figure 1).

Tous les calculs de champ seront menés en négligeant les effets de bords, c'est-à-dire en assimilant le solénoïde considéré à un solénoïde de longueur infinie.



1. Champ magnétostatique.

a. A l'aide d'arguments de symétrie, déterminer la direction du champ magnétostatique créé par le solénoïde.

b. Qualitativement, à quelle(s) condition(s) est-il légitime de négliger les effets de bords ? Quelle est alors, dans cette approximation, l'expression du champ magnétique en fonction de μ_0, n, I_0 , à l'intérieur (i.e. si $\rho < a$) et à l'extérieur (i.e. si $\rho > a$) du solénoïde (la démonstration n'est pas demandée)?

2. Champ électrique induit par variation de l'intensité.

L'intensité dans le solénoïde, $I(t)$, dépend maintenant du temps, avec un temps caractéristique de variation τ .

a. A l'aide d'arguments de symétrie, montrer que le champ électrique induit par les variations de $I(t)$, est orthoradial ; on le notera $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(\rho, t)\vec{e}_\theta$.

b. Dans l'approximation quasi-stationnaire magnétique, exprimer $E(\rho, t)$ dans les régions $\rho > a$ et $\rho < a$ en fonction de $\rho, n, \frac{dI}{dt}$, a et μ_0 .

c. Quelle(s) condition(s) doit vérifier τ pour que l'approximation quasi stationnaire soit, a priori, acceptable ?

3. Transfert de quantité de mouvement à une particule chargée.

Une particule de charge q et de masse m est placée en un point C extérieur au solénoïde tel que $\overrightarrow{OC} = d\overrightarrow{e_x}$ (avec $d > a$, voir figure 1). Initialement, la particule est immobile et le solénoïde est parcouru par un courant d'intensité I_0 . Entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$, on fait passer l'intensité dans le solénoïde de la valeur I_0 à 0 , suffisamment rapidement pour que la charge ne se déplace pratiquement pas ; ensuite, l'intensité reste nulle. L'approximation des régimes quasi stationnaires reste valable.

a. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour la particule et déterminer sa vitesse finale (après l'instant τ).

b. Trouver une condition sur τ pour qu'il soit effectivement justifié de ne pas tenir compte du déplacement de la particule pendant la phase transitoire.

Donner une estimation quantitative de cette condition pour $d = 2a$, $n = 10^4 \text{ m}^{-1}$, $I_0 = 1 \text{ A}$, la charge étant un électron.

Quelle condition doit vérifier le diamètre du solénoïde pour que les approximations du calcul précédent soient justifiées ?

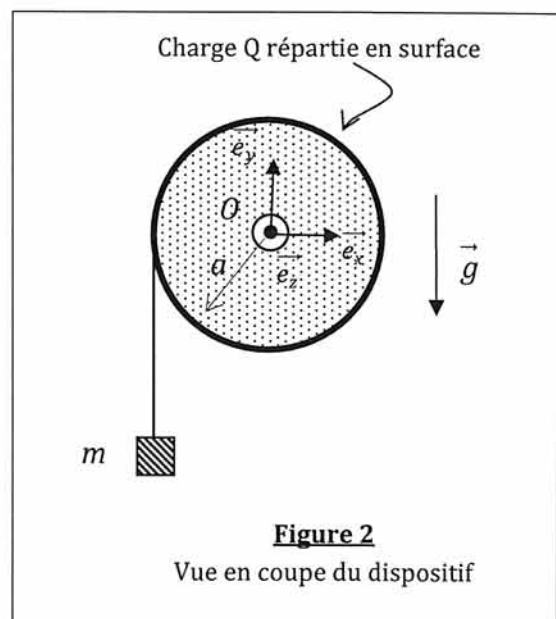
c. Exprimer la quantité de mouvement totale du champ électromagnétique, $\vec{P}_{em}$ pour l'expérience considérée aux instants $t < 0$ et $t > \tau$. Pour évaluer la contribution du champ électrique créé par la charge q elle-même, on pourra utiliser l'intégrale suivante, étendue aux points M appartenant au volume intérieur du solénoïde :

$$\iiint_{(M \in \text{Volume Intérieur du Solénoïde})} \frac{\overrightarrow{CM}}{CM^3} dV = -2\pi \frac{a^2}{d} \overrightarrow{e_x}.$$

d. Comparer la quantité de mouvement initiale du champ à la quantité de mouvement finale de la particule et commenter.

II. Energie et moment cinétique dans un système électromécanique.

On envisage dans cette partie un dispositif constitué d'un cylindre solide, d'axe Oz , de rayon a , de longueur ℓ_0 , chargé uniformément en surface avec une charge totale Q . Le cylindre, dont le moment d'inertie relativement à l'axe est noté I_{Oz} , peut tourner sans frottement autour de l'axe Oz : immobile à $t = 0$, il est mis en rotation à une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega(t)\overrightarrow{e_z}$ par la chute d'une masse m , accrochée à un fil de masse négligeable qui se déroule sans glisser autour du cylindre (figure 2). L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_y}$. Le cylindre est initialement immobile.



Comme dans la partie B.I., tous les calculs de champ seront menés

- dans l'approximation des régimes quasi-permanents,
- et en négligeant les effets de bords, c'est-à-dire en assimilant le cylindre à un cylindre de longueur infinie.

1. Mise en équation mécanique.

Dans cette question, on ne tient compte d'aucun effet électromagnétique. On désignera par (Σ) le système mécanique constitué du cylindre, de la masse m et du fil. Le référentiel d'étude est le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

- Exprimer le moment cinétique $L_{z,mec}$ par rapport à Oz de (Σ) ainsi que son énergie cinétique $E_{c,mec}$, en fonction de I_{Oz}, m, a, ω .
- Déterminer le moment M_z par rapport à l'axe Oz de l'ensemble des actions exercées sur (Σ) .
- En déduire l'expression de la vitesse angulaire de rotation, $\omega(t)$ en fonction du temps.

2. Champ électromagnétique et moment induit.

- Montrer que la densité surfacique de courant associée à la rotation du cylindre est donnée par $\vec{J}_S = \frac{Q\omega}{2\pi\ell_0} \vec{e}_\theta$.
- En déduire le champ magnétique créé par le cylindre.
- Comme ω dépend du temps, le champ magnétique créé n'est pas stationnaire. De même qu'à la partie B.I. précédente, il apparaît donc un champ électrique orthoradial $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(\rho, t) \vec{e}_\rho$ dont on donnera en tout point l'expression en fonction de $Q, a, \mu_0, \frac{d\omega}{dt}, \ell_0$ et ρ .
- Montrer que le moment $M_{z,el}$, par rapport à Oz , des forces électriques auxquelles le cylindre est soumis du fait du champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ est de la forme $M_{z,el} = -I_{em} \frac{d\omega}{dt}$, où I_{em} sera exprimée en fonction de Q, a, μ_0, ℓ_0 . Commenter le fait que ce couple tend toujours à freiner la rotation du cylindre.
- Déterminer - en négligeant les effets de bord - le champ statique $\vec{E}_{stat}$ que créerait en tout point le cylindre chargé s'il était immobile. Les forces électriques associées à ce champ contribuent-elles au moment des forces relativement à l'axe Oz ?

3. Grandeurs mécaniques associées au champ électromagnétique.

- Montrer que l'on peut écrire $M_z = \frac{d}{dt}(L_{z,mec} + L_{z,em})$, où $L_{z,em} = I_{em}\omega$. Donner une interprétation physique de la quantité $L_{z,em}$.
- Le moment cinétique total $\vec{L}_{em}$ associé au champ électromagnétique s'écrit $\vec{L}_{em} = \iiint_{\text{Tout l'espace}} \vec{\ell}_{em} d\tau$, où $\vec{\ell}_{em}$ est la densité volumique de moment cinétique donnée en préambule de la partie B.

Par des arguments de symétrie, montrer que le champ orthoradial associé aux variations temporelles du champ magnétique à une contribution nulle au moment cinétique total $\vec{L}_{em}$.

c. Ecrire sous forme d'une intégrale la contribution associée au champ électrique statique, $\vec{E}_{stat}$ au moment cinétique $\vec{L}_{em}$.

On peut montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ créé par un solénoïde allongé de longueur ℓ (finie), d'axe Oz , comprenant n spires par unité de longueur parcourues par l'intensité I vérifie :

$$\iiint_{(Extérieur)} \vec{r} \wedge \left(\frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho \wedge \vec{B} \right) dV = \mu_0 n I \pi a^2 \ell \vec{e}_z,$$

l'intégrale étant étendue au volume extérieur au solénoïde.

En déduire, en fonction de $Q, a, \mu_0, \omega, \ell_0$, la composante sur $\vec{e}_z$ du moment cinétique total $\vec{L}_{em}$ associé au champ électromagnétique dans l'expérience étudiée. Commenter en comparant ce résultat à celui du B.II.3.a. ci-dessus.

d. Comparer l'énergie $\frac{1}{2} I_{em} \omega^2$ à l'énergie magnétique W_{mag} associée au champ électromagnétique dans ce système.

e. Montrer que la quantité $\mathcal{E} = mgy + E_{c,mec} + W_{mag}$, où y est l'altitude de la masse m , est constante au cours du mouvement.

En déduire une analyse de l'expérience en termes de transferts d'énergie entre le champ électromagnétique le système matériel.

III. Transfert de quantité de mouvement par une onde électromagnétique.

1. Réflexion d'une onde plane sur un plan conducteur parfait.

Une onde électromagnétique plane de champ électrique complexe $\vec{E}_{inc} = E_0 \exp(j(\omega t - kz)) \vec{e}_x$ se propage en incidence normale sur un conducteur parfait immobile occupant le demi espace $z > 0$ (figure 3).

a. Que peut-on dire des champs électrique et magnétique au voisinage extérieur immédiat ($z = 0^-$) du plan conducteur ?

b. Déterminer les champs électriques et magnétiques réels résultants dans la région $z < 0$.

c. Déterminer la densité de courant de surface réelle $\vec{J}_S$ qui apparaît sur le plan $z = 0$.

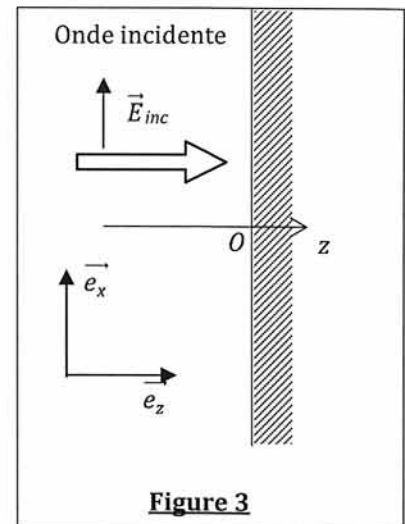


Figure 3

2. Pression de radiation.

Nous souhaitons déterminer la force qui s'exerce sur la surface métallique. Pour cela, nous faisons momentanément l'hypothèse que le conducteur se comporte comme un milieu ohmique de conductivité γ finie mais très élevée.

a. A quelle condition sur γ , ω et ε_0 la densité de courant de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est-elle négligeable devant la densité $\vec{J}$ du courant de conduction ? Nous admettons que cette condition est vérifiée.

b. Justifier que, dans le conducteur, le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B(z,t)\vec{e}_y$.

c. Exprimer la force volumique qui s'exerce dans le conducteur en fonction de $\vec{J}$ et $\vec{B}$, puis en fonction de $B(z,t)$ et $\frac{\partial B}{\partial z}(z,t)$. En déduire que, le champ magnétique dans le conducteur étant supposé nul à une profondeur infinie, la force subie par le conducteur correspond à une pression, dite, ici, pression de radiation, valant : $P_{rad} = \frac{B(0^-,t)^2}{2\mu_0}$.

L'expression ci-dessus de la pression de radiation, indépendante de la conductivité γ du conducteur, reste valable pour un conducteur parfait.

d. Exprimer la pression moyenne s'exerçant sur le conducteur en fonction de E_0 et ε_0 , puis de la puissance moyenne par unité de surface transportée par le faisceau incident (notée I_{inc}), et c .

e. Calculer numériquement la force s'exerçant sur un miroir frappé en incidence normale par un faisceau laser de puissance moyenne 1mW. Commenter.

3. Interprétation corpusculaire

La force évaluée à la question précédente peut être interprétée comme une force de pression cinétique résultant de chocs de particules, les photons, sur la face plane du miroir. Pour le montrer, nous considérons un faisceau homocinétique de n photons identiques par unité de volume, ayant une vitesse $\vec{v}_i = v\vec{e}_z$, portant chacun la quantité de mouvement incidente $\vec{p}_i = p\vec{e}_z$ et subissant un choc élastique sur le plan $z=0$, après lequel la quantité de mouvement devient $\vec{p}_f = -p\vec{e}_z$. Les photons sont sans interactions entre eux.

a. Effectuer un bilan de quantité de mouvement pour déterminer la pression P_{cin} exercée par le faisceau de photons sur la paroi réfléchissante en fonction de n, p, v .

b. Chaque particule possède une énergie ε . Exprimer la puissance moyenne qui traverse une section unité du faisceau incident par unité de surface, notée I_{cin} en fonction de n, ε, v .

Le faisceau de photons doit, *en moyenne*, transporter la même énergie que l'onde électromagnétique incidente, être associé à la même densité volumique d'énergie et exercer sur le miroir la même force que l'onde électromagnétique précédemment étudiée.

c. Déterminer la vitesse v des particules et le rapport p/ε en fonction de c .

d. Pourquoi l'existence de telles particules n'est-elle pas compréhensible dans le cadre de la mécanique non relativiste ? Quelle est nécessairement la masse des particules ?

IV. Transfert de moment cinétique. Forces de diffusion.

1. Rayonnement dipolaire : dipôle de direction fixe.

Un dipôle électrique variable, de moment dipolaire $\vec{p}(t) = p(t)\vec{e}_z$, situé en O, crée, en un point situé à grande distance par rapport à l'extension spatiale du dipôle, un champ magnétique qui s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} \frac{dp}{dt}(t - r/c) + \frac{1}{rc} \frac{d^2 p}{dt^2}(t - r/c) \right] \vec{e}_\varphi.$$

a. Justifier la direction de ce champ à l'aide d'arguments de symétrie. Commenter sa dépendance en fonction de la quantité $t - r/c$.

On suppose que le dipôle varie sinusoïdalement selon la loi : $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$.

b. Trouver une condition sur r pour que, dans l'expression du champ magnétique, le terme dont l'amplitude varie en $1/r$ ait une amplitude au moins 100 fois supérieure à celle du terme en $1/r^2$.

Nous admettons dans la suite que cette condition est vérifiée (approximation de la « zone de rayonnement »); le champ magnétique est donc simplement :

$$\vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi c} p_0 \omega^2 \frac{1}{r} \cos(\omega(t - r/c)) \vec{e}_\varphi.$$

c. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ associé à cette onde.

d. En déduire l'expression du vecteur de Poynting moyen, $\langle \vec{S}(M, t) \rangle$, et exprimer la puissance moyenne

$\langle P_{\text{ray}} \rangle$ qui traverse une sphère de rayon R , en fonction de μ_0, c, p_0, ω . On donne : $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$.

Le résultat obtenu pour $\langle P_{\text{ray}} \rangle$ est indépendant de R . Commenter.

2. Rayonnement créé par un dipôle tournant.

Un électron de charge $-e$, situé en M , tourne dans le plan Oxy autour d'une charge $+e$, immobile au point O, avec un mouvement circulaire uniforme de rayon a et de vitesse angulaire de rotation ω (orientée par $\vec{e}_z$). Le vecteur position de l'électron est $\vec{OM} = a(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y)$.

a. Montrer que le rayonnement de ce système peut être considéré comme celui créé par deux dipôles dépendant du temps, $\vec{p}_1(t)$ et $\vec{p}_2(t)$, respectivement dirigés selon les directions fixes $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

b. Exprimer le champ électrique et décrire l'état de polarisation de l'onde rayonnée aux points suivants, situés à la distance r du point O, dans la zone de rayonnement:

(i) Point A de coordonnées : $x = r, y = z = 0$.

(ii) Point D, de coordonnées $x = y = 0, z = r$.

(iii) Point F, de coordonnées $x = y = 0, z = -r$.

c. Montrer que le vecteur de Poynting moyen $\langle \vec{S} \rangle$ de l'onde est, en tout point, la somme des vecteurs de Poynting moyens $\langle \vec{S}_1 \rangle$ et $\langle \vec{S}_2 \rangle$ respectivement créés par $\vec{p}_1(t)$ et $\vec{p}_2(t)$.

d. En déduire que la puissance moyenne totale rayonnée, notée $\langle P_t \rangle$, est : $\langle P_t \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 a^2 e^2}{6\pi c}$.

3. Force et couple de diffusion.

On décrit dans cette partie le mouvement d'un électron lié à un atome (centré au point O) dans le modèle de la charge élastiquement liée. Dans ce modèle, l'électron, situé en M , est soumis, en plus de la force de Lorentz, aux actions suivantes :

- une force de rappel $\vec{f}_{rapp} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}$ qui modélise l'attraction du reste de l'atome sur l'électron;
- une force dissipative $\vec{f}_{AL} = \alpha m_e \frac{d^3 \vec{r}}{dt^3}$ (force d'Abraham-Lorentz), qui modélise la dissipation d'énergie mécanique de l'électron associée à l'émission de rayonnement et dans laquelle la quantité α , homogène à un temps, est une constante.

L'atome, placé dans le vide, est exposé à une onde plane de longueur d'onde très grande devant ses dimensions, de vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z$, et de champ électrique complexe $\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) e^{j(\omega t - kz)}$.

On admet que la perturbation apportée par la force d'Abraham Lorentz est faible : la quantité $\frac{\alpha \omega^3}{\omega_0^2}$ est considérée comme un infiniment petit du premier ordre.

a. Quel est l'état de polarisation de l'onde incidente ?

Déterminer le champ magnétique associé à cette onde. Justifier que ses effets sur le mouvement de l'électron puissent être négligés en première approximation devant ceux du champ électrique.

b. Dans cette hypothèse, et en admettant que l'analyse est effectuée dans l'approximation de Rayleigh, où l'on a $\omega \ll \omega_0$, déterminer le déplacement complexe $\vec{r}(t)$ de l'électron en régime harmonique établi, en fonction de $E_0, \omega_0, \omega, t, \alpha$ et des constantes physiques de l'électron.

c. En déduire la puissance moyenne $\langle P_{AL} \rangle$ de la force $\vec{f}_{AL}$. Déduire des résultats de la question B.IV.2.d que l'on a nécessairement : $\alpha = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c m_e}$.

d. Montrer que l'atome est soumis à une force magnétique moyenne $\langle \vec{F}_{mag} \rangle = \langle -e\vec{v} \wedge \vec{B} \rangle$ non nulle que l'on exprimera en fonction de $\langle P_{AL} \rangle$ et c .

e. A partir de l'expression du couple subi par un dipôle de moment $\vec{p}$ plongé dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$, déduire l'expression du couple moyen $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ auquel l'atome est soumis de la part de l'onde, en fonction de $\langle P_{AL} \rangle$ et ω .

f. Quelle serait la valeur de $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ si :

- l'onde incidente était polarisée circulairement dans l'autre sens que celui considéré jusqu'ici ;
- l'onde incidente était polarisée rectilignement ?

4. Interprétation corpusculaire et moment cinétique intrinsèque du photon.

Les résultats de la question B.IV.3. peuvent, comme la pression de radiation vue plus haut, être interprétés en termes corpusculaires. On peut en effet considérer que l'atome est placé dans un faisceau homocinétique de photons, d'énergie ε , d'impulsion $\vec{p} = p\vec{e}_z$, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ déterminée plus haut. Le transfert d'énergie entre l'onde incidente et l'atome est décrit comme la disparition (absorption) de photons.

a. A l'aide d'un bilan énergétique, déterminer le nombre N_{abs} de photons qui sont absorbés par l'atome par unité de temps du fait de la diffusion, en fonction de $\langle P_t \rangle$ et ε .

b. Relier $\langle \vec{F}_{mag} \rangle$ à N_{abs} et $\vec{p}$ en effectuant un bilan de quantité de mouvement.

Vérifier que ce résultat est compatible avec la relation entre p et ε , établie en question B.III.3.b.

c. A partir d'un bilan de moment cinétique, montrer que les photons possèdent un moment cinétique intrinsèque $\vec{\ell} = \ell\vec{e}_z$, que l'on exprimera en fonction de $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ et N_{abs} . En déduire une relation très simple entre ℓ , ε et ω .

d. Quel serait le moment cinétique pour une polarisation circulaire dans le sens opposé à celui étudié jusqu'ici? Qu'en serait-il pour une polarisation rectiligne?

5. Mise en rotation de particules biréfringentes par transfert de moment cinétique.

Les techniques de manipulation de particules de taille micrométrique ou submicrométrique à l'aide de « pincettes optiques » permettent de mettre en évidence expérimentalement le moment cinétique intrinsèque d'un rayon lumineux. Les figures 4.a, b, c¹ schématisent des photographies successives d'une particule biréfringente (grain de calcite) exposée à un rayonnement laser, dit exciteur, se propageant selon le vecteur $\vec{u}$ perpendiculaire au plan de la photographie, polarisé circulairement, de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 780\text{nm}$. A cette longueur d'onde, le grain de calcite peut être considéré comme transparent.

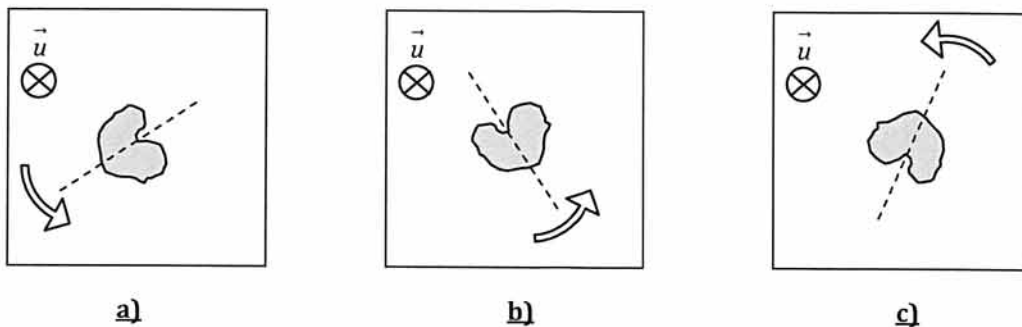


Figure 4

Photographies successives d'un grain de calcite

L'intervalle entre chaque photographie est de 200 ms. La particule a une dimension de l'ordre de $10\text{ }\mu\text{m}$. Son orientation est repérée par un segment pointillé. Elle se déplace dans l'eau (masse volumique $\rho = 1.0 \times 10^3\text{ kg.m}^{-3}$, coefficient de viscosité : $\eta = 9,0 \times 10^{-4}\text{ Pa.s}$).

Dans toute cette question B.IV.5., on attend des réponses en ordre de grandeur, basées sur des raisonnements simples s'appuyant au besoin sur les résultats des questions précédentes. Le modèle corpusculaire est ici très bien adapté à l'analyse des phénomènes.

¹ d'après D.N. Mootho et al., "Beth's experiment using optical tweezers", Am. J. Phys. 69(3), 271, Mars 2001

a. Que signifie, en quelques mots, le terme «biréfringent»? Qu'appelle-t-on «ligne neutre» d'une lame biréfringente?

Quel type de lame biréfringente doit-on utiliser de façon à obtenir une onde polarisée circulairement à partir d'un laser polarisé rectilignement? Comment cette lame doit-elle être orientée relativement à la direction de polarisation du laser?

Le grain de calcite considéré dans l'expérience se comporte comme une lame demi - onde : un rayonnement polarisé circulairement est transformé, après traversée de la lame, en un rayonnement de polarisation circulaire en sens inverse.

b. Justifier qualitativement que le rayonnement laser incident exerce un couple sur la particule. Prévoir le sens de ce couple en fonction du sens de la polarisation circulaire. Le rayonnement utilisé dans l'expérience est-il polarisé circulairement à gauche ou à droite?

c. Si on double la puissance P_0 transportée par le laser exciteur à travers le grain de calcite, comment est modifiée la norme du couple subi par la particule?

d. On constate expérimentalement que la particule acquiert une vitesse angulaire de rotation Ω constante, après une brève phase transitoire. Expliquer pourquoi.

Compte tenu de la valeur du nombre de Reynolds adapté à la situation, justifier que la vitesse angulaire Ω doit être approximativement proportionnelle à P_0 .

Par un raisonnement en ordre de grandeur basé sur une analyse dimensionnelle, estimer numériquement la puissance P_0 utilisée dans l'expérience.

Commenter le résultat, sachant que la diode laser utilisée dans l'expérience délivre une puissance totale de 50 mW.

e. Quel est l'effet d'une lame demi-onde sur une onde polarisée rectilignement? En déduire le couple subi par le grain de calcite si le laser exciteur est polarisé rectilignement.

f. Expérimentalement, on constate que lorsque laser est polarisé rectilignement, le grain de calcite tend à s'orienter selon l'une ou l'autre de deux directions perpendiculaires entre elles, puis reste fixe. Interpréter ce résultat. Le grain de calcite correspond-il vraiment exactement à une lame demi-onde?

C. Les preuves expérimentales de la notion de photon.

Toutes les situations analysées dans la partie B peuvent être interprétées à la fois dans une description ondulatoire et dans une approche corpusculaire des ondes électromagnétiques. Au début du vingtième siècle, l'étude expérimentale de l'effet photoélectrique et de la diffusion des rayons X par les électrons (effet Compton) ont été considérées - et sont encore souvent présentées - comme des preuves du comportement corpusculaire de la lumière. Pourtant, ces deux expériences peuvent également être interprétées à partir de modèles classiques, semi-classiques ou « semi- quantiques » dans lesquels le rayonnement n'est pas quantifié, mais où la matière se comporte de façon quantique.

Cette partie étudie ces deux phénomènes, leurs explications traditionnelles en termes de photons, ainsi que leurs interprétations alternatives qui ne font pas appel à cette notion.

Elle se termine par l'analyse d'expériences plus récentes qui établissent sans ambiguïté le comportement discret, essentiellement quantifié, de la lumière.

I. Effet photoélectrique.

L'effet photoélectrique consiste en l'extraction d'électrons d'un métal par la lumière. Il est mis en évidence expérimentalement à l'aide du dispositif décrit en figure 5. La photodiode est une ampoule où règne un vide poussé, à l'intérieur de laquelle se trouvent une cathode et une anode métalliques. Un circuit électrique externe

impose une différence de potentiel U entre l'anode et la cathode et on mesure l'intensité I du courant traversant le circuit.

La cathode est éclairée par un faisceau lumineux monochromatique de fréquence $f = \frac{c}{\lambda}$: elle reçoit au total une puissance lumineuse incidente moyenne P_0 . Une fraction de cette puissance est communiquée aux électrons du métal, dont certains sont arrachés et parviennent jusqu'à l'anode, créant ainsi un photocourant. Il est par ailleurs connu qu'un électron peut être extrait du métal si on lui communique une énergie au moins égale à Φ_{ext} , travail d'extraction du métal considéré.

L'allure des caractéristiques $I(U)$ obtenues pour deux valeurs de puissance incidente est représentée figure 5.

L'étude expérimentale d'une cellule à cathode de césium sur tungstène conduit aux observations suivantes :

- **(o1)** Le photocourant est nul si la fréquence de la lumière est inférieure à une valeur de seuil f_0 .
- **(o2)** L'intensité du photocourant obtenue aux grandes valeurs positives de U varie proportionnellement à P_0 .
- **(o3)** Le photocourant s'annule lorsque pour une tension négative $U = -U_0$, U_0 étant appelé potentiel d'arrêt.
- **(o4)** La valeur du potentiel d'arrêt ne dépend pas de P_0 .
- **(o5)** Le potentiel d'arrêt est une fonction affine de la fréquence f de la lumière incidente :
 $U_0 = a \times (f - f_0)$, avec $a = 4,14 \times 10^{-15}$ V/Hz et $f_0 = 3,29 \times 10^{14}$ Hz.

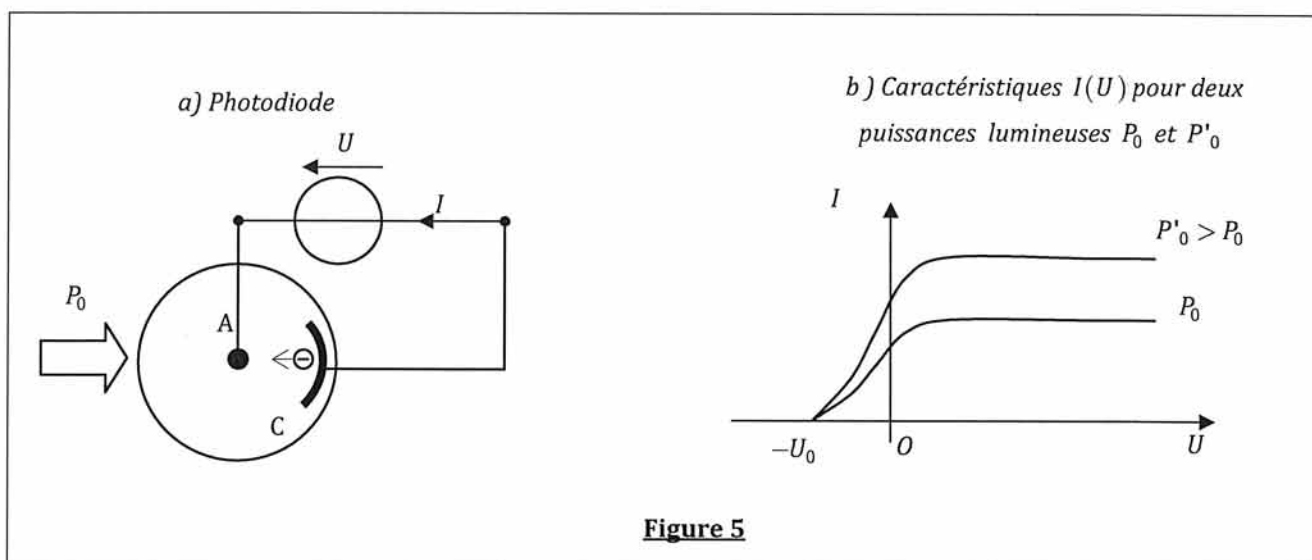


Figure 5

1. Principe et interprétation corpusculaire.

On cherche à interpréter les observations (o1) à (o5) en supposant que la lumière monochromatique incidente est un faisceau homocinétique de photons d'énergie ε .

a. Etablir une relation entre l'énergie cinétique E_c d'un électron (après extraction par un photon), Φ_{ext} et ε .

En déduire :

- (i) Une justification de l'existence d'un potentiel d'arrêt ;
- (ii) que l'énergie d'un photon peut être reliée à sa fréquence par $\varepsilon = H f$, où H est une constante à exprimer en fonction de a et e ;
- (iii) la valeur numérique en eV du travail d'extraction Φ_{ext} pour le métal étudié.

b. Expliquer qualitativement l'existence d'une saturation d'intensité aux grandes valeurs de U , ainsi que l'observation (o2).

c. A quel physicien est due cette interprétation ? Connaissez-vous l'année de publication de cette analyse ? Quel autre physicien l'a testée expérimentalement en grand détail ?

2. Réalisation expérimentale en travaux pratiques.

Il est possible de mesurer le rapport h/e avec un matériel simple et peu onéreux, bien adapté à une séance de travaux pratiques.

On dispose pour cela d'une lampe à vapeur de mercure et de filtres interférentiels permettant de sélectionner chacune des raies spectrales principales émises par la lampe.

La détermination directe du potentiel d'arrêt utilisant le montage décrit sur la figure 5 est délicate car elle nécessite la mesure de courants d'intensités extrêmement faibles. Il est plus simple de réaliser le montage de la figure 6 où la photodiode est directement connectée à un condensateur de capacité $C_0 = 100 \text{ pF}$.

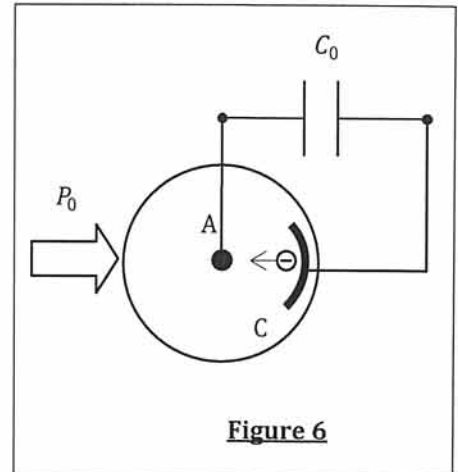


Figure 6

a. Le condensateur étant initialement déchargé, montrer que la tension aux bornes du condensateur finit par se stabiliser à la valeur du potentiel d'arrêt $-U_0$.

Donner un ordre de grandeur du temps nécessaire à l'obtention d'une tension constante en fonction de la résistance $R_d = 1 / \left(\frac{dI}{dU} \right) (-U_0)$ et de C_0 . Faites l'application numérique pour en prenant $R_d = 10^9 \Omega$.

b. Montrer que pour mesurer la tension U_0 on doit utiliser un voltmètre d'impédance d'entrée très supérieure à R_d . Un oscilloscope courant peut-il convenir ?

c. On trouve sur le marché des amplificateurs opérationnels présentant une impédance d'entrée de l'ordre de $10^{11} \Omega$. Faites le schéma d'un montage utilisant un tel amplificateur opérationnel, qui permette de résoudre le problème rencontré au C.I.2.b.

3. Une interprétation sans photons.

En 1969, Lamb et Scully² ont proposé une explication de l'effet photoélectrique compatible avec tous les résultats expérimentaux (o1) à (o5), qui ne fait pas appel à la notion de photon mais qui suppose que le métal se comporte de façon quantique.

Pour simplifier, ils considèrent l'effet photoélectrique associé à un atome isolé. Dans son état fondamental, $|g\rangle$, l'énergie d'un électron de l'atome est $-E_g$, avec $E_g > 0$ (l'état d'énergie nulle est un état ionisé dans lequel l'électron est immobile). Les états non liés de l'atome forment un quasi-continuum : ils sont repérés par un indice k et notés $|k\rangle$ (Voir figure 7)

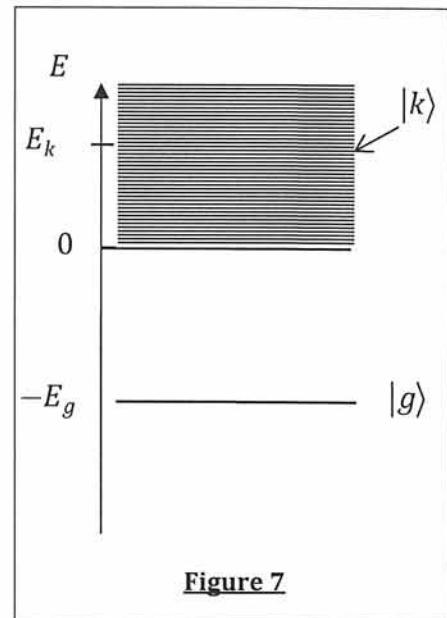


Figure 7

Le champ électrique de l'onde lumineuse, quasi-uniforme à l'échelle de l'atome, est donné par $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$.

Initialement, l'électron est dans l'état $|g\rangle$. La théorie quantique des perturbations dépendant du temps permet d'établir que la probabilité d'observer l'électron dans l'état $|k\rangle$ au bout d'un temps t est donnée par :

$$\mathcal{P}_k(\omega, t) = 4 \left| X_{kg} \frac{eE_0}{\hbar} \right|^2 \frac{\sin^2 \left[\left(\frac{E_k + E_g}{\hbar} - \omega \right) \frac{t}{2} \right]}{\left(\frac{E_k + E_g}{\hbar} - \omega \right)^2}, \quad (1)$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ et X_{kg} l'élément de matrice $\langle k | \hat{x} | g \rangle$ de l'opérateur « position » sur l'axe Ox.

² Lamb W.E., Scully M.O., "The Photoelectric effect without photons", « Polarisation, matière et rayonnement », Volume anniversaire en l'honneur d'Alfred Kastler (Presses Universitaires de France, Paris 1969), 363-369

a. La relation (1) est établie en supposant que l'Hamiltonien de perturbation dû au champ de l'onde est donné par l'opérateur $\hat{V}_{pert} = eE_0\hat{x}\cos(\omega t)$, pour $t > 0$ et $\hat{V}_{pert} = 0$ pour $t < 0$. Justifier ce choix.

b. A un instant t fixé, pour un état k donné, représenter graphiquement la probabilité $\mathcal{P}_k(\omega, t)$ en fonction de ω . En déduire que $\mathcal{P}_k(\omega, t)$ est négligeable sauf si ω est dans un intervalle de largeur $\delta\omega$, à déterminer en ordre de grandeur en fonction de t , centré sur $\omega_{kg} = \frac{E_k + E_g}{\hbar}$. Quel intervalle de temps t_H doit-on attendre pour que l'on ait $\delta\omega / \omega_{kg} < 0,01$. Donner un ordre de grandeur pertinent.

c. Montrer que la relation (1) permet d'interpréter qualitativement l'observation expérimentale (o1) et exprimer la fréquence f_0 en fonction de E_g et $\hbar$.

On introduit la fonction $\tilde{\delta}^{(t)}(E) = \frac{2\hbar}{\pi t} \frac{\sin^2\left(\frac{Et}{2\hbar}\right)}{E^2}$, vérifiant $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}^{(t)}(E) dE = 1$. A la limite $t \rightarrow \infty$, la fonction $\tilde{\delta}^{(t)}(E)$ tend vers la distribution de Dirac : $\delta(E)$.

d. En notant $\rho(E_k)$ la densité d'états du continuum au voisinage de E_k (c'est-à-dire le nombre d'états par unité d'énergie au voisinage de E_k), montrer que la probabilité d'observer une ionisation de l'atome (et donc un effet photoélectrique) peut s'écrire (règle d'or de Fermi) :

$$\mathcal{P}_d(\omega, t) = K E_0^2 \rho(\hbar\omega - E_g) \times t, \quad (2)$$

où K est un facteur de proportionnalité à exprimer en fonction des grandeurs déjà introduites.

e. Interpréter les observations (o2) à (o5) à partir de la relation (2). Notre modèle de détecteur peut-il être considéré comme suffisant pour en comprendre l'effet photoélectrique en dépit du fait que le traitement de l'onde lumineuse ne fait pas intervenir de quantifications des champs électromagnétiques ?

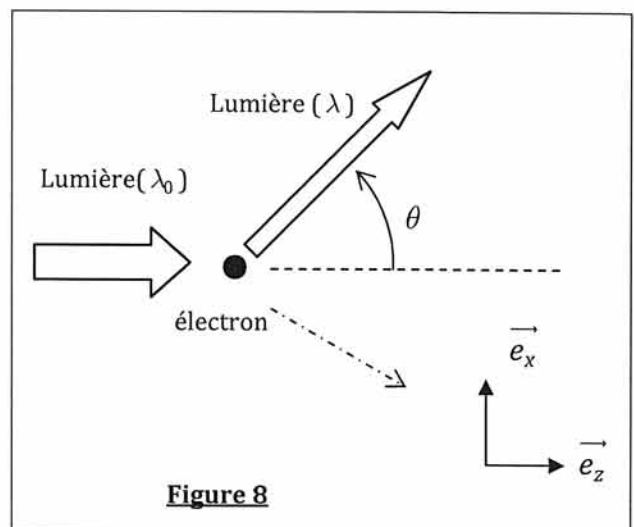
II. Effet Compton

Un électron libre est soumis à une onde lumineuse plane, du domaine spectral des rayons X (voir figure 8), de longueur d'onde λ_0 . En 1923, les études expérimentales de A.H. Compton ont montré que le rayonnement diffusé dans une direction faisant un angle θ par rapport à la direction du rayonnement incident a une longueur d'onde vérifiant :

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_c \times (1 - \cos\theta), \quad (3)$$

où λ_c , appelée « longueur d'onde Compton » de l'électron est un paramètre de valeur numérique $\lambda_c = 2,42 \times 10^{-12}$ m.

Cette partie propose deux explications de ce fait expérimental, faisant appel à la théorie de la relativité restreinte. La première, due à Compton lui-même, s'appuie sur la notion de photon. La deuxième, également compatible avec les observations expérimentales reste purement ondulatoire.



1. Calcul corpusculaire

Dans le référentiel du laboratoire, le rayonnement incident est traité comme constitué de photons d'énergie $\varepsilon_0 = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$ et de quantité de mouvement $\vec{p}_0 = \frac{h}{\lambda_0} \vec{e}_z$. Après diffusion, le photon possède l'énergie $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ et la

quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{u}$, avec $\vec{u} = \cos\theta \vec{e}_z + \sin\theta \vec{e}_x$. Initialement l'électron est immobile et, après interaction, il est éventuellement relativiste et possède une énergie E_e et une quantité de mouvement $\vec{P}_e$.

a. Ecrire la relation qui exprime la conservation de l'énergie du système « photon + électron » au cours de leur interaction.

b. Ecrire la conservation de la quantité de mouvement du système « photon + électron ».

c. En déduire que λ et λ_0 sont bien reliés par la relation (3), et déterminer le paramètre λ_c en fonction de constantes fondamentales. Dans quel domaine spectral se trouve λ_c ? Commenter.

2. Interprétation quasi-classique : l'effet Compton considéré comme un effet Doppler.

Le modèle proposé considère une onde électromagnétique incidente polarisée circulairement. Dans le référentiel du laboratoire (R) , elle est associée au champ électrique $\vec{E} = E_0(\vec{e}_x - j\vec{e}_y)\exp(j\Phi)$, où $\Phi = \omega_0\left(t - \frac{z}{c}\right)$ est la phase de l'onde.

Nous allons montrer qu'il existe un référentiel (R') , en translation uniforme à une vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_z$ dans (R) , dans lequel le mouvement de l'électron est un simple mouvement circulaire, en régime établi. Dans un tel référentiel, le champ électrique devient, par transformation de Lorentz : $\vec{E}' = E_0\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2}(\vec{e}_x - j\vec{e}_y)\exp(j\Phi)$, où l'on a posé $\beta = \frac{V}{c}$.

a. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}'$ de l'onde dans (R') .

b. Déterminer la pulsation ω_0' dans le référentiel (R') en fonction de ω_0 et β .

c. En considérant que l'électron est soumis à la seule force de Lorentz, montrer que le mouvement circulaire uniforme dans (R') associé au rayon vecteur complexe :

$$\vec{r}' = r_0' \times (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) \exp(j\omega_0' t'),$$

répond aux équations du mouvement dans (R') et trouver une relation entre r_0' , E_0 , β , m_e , e , ω_0' et c .

Déterminer explicitement r_0' dans l'hypothèse où le mouvement de l'électron est non relativiste dans (R') .

Après une éventuelle phase transitoire l'électron acquiert ce mouvement circulaire dans le référentiel (R') : il émet donc une onde électromagnétique de pulsation ω_0' , comme cela a été vu au B.IV.

Un observateur éloigné, situé au point A fixe dans (R) , dans une direction repérée dans (R) par l'angle θ (correspondant à un angle θ' dans (R')), voir figure 8, reçoit une onde assimilable à une onde plane, de pulsation ω . On admet les relations suivantes :

$$\omega = \frac{\omega_0'}{\sqrt{1-\beta^2}}(1 + \beta \cos\theta') \quad (4),$$

$$\cos\theta = \frac{\beta + \cos\theta'}{1 + \beta \cos\theta'} \quad (4'),$$

qui découlent de l'invariance de la phase de l'onde plane dans un changement de référentiel.

d. En déduire que la longueur d'onde apparente en A , λ , vérifie la relation :

$$\lambda = \lambda_0 \times (1 + \xi \times (1 - \cos\theta)),$$

où ξ est un paramètre à exprimer en fonction de β .

Les équations de conservations de la quantité de mouvement et de l'énergie dans (R) et dans (R') permettent³ (raisonnement non demandé), d'établir que ξ est de la forme $\xi = \zeta f_0 / m_e c^2$, où ζ est une constante fondamentale.

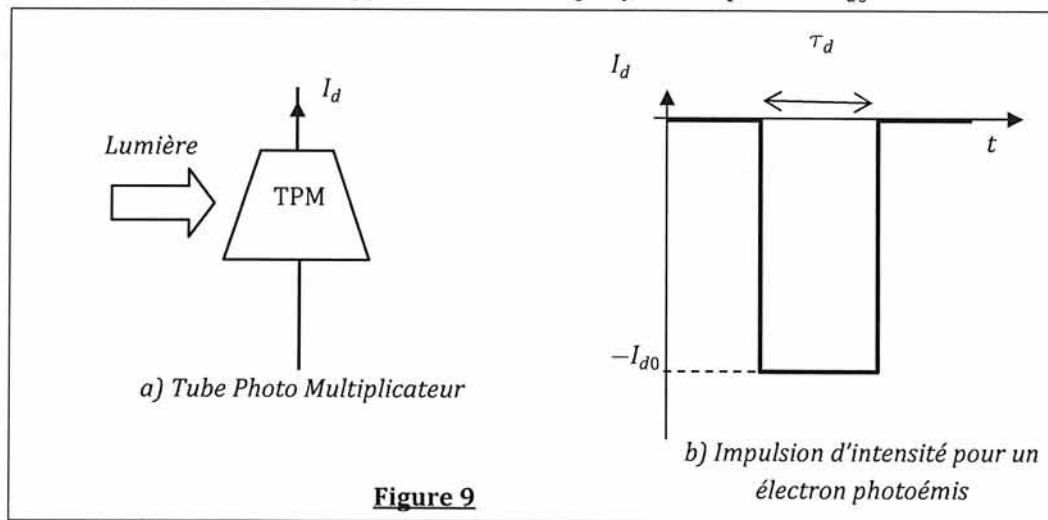
e. En déduire que ce modèle est compatible avec la loi expérimentale (3) et déterminer la valeur numérique de ζ .

f. Ce modèle est-il remis en cause si la polarisation de l'onde incidente n'est pas circulaire ?

III. Enfin des photons !

1. Détecteurs photoélectriques.

L'effet photoélectrique, étudié en partie C.I. est à la base de détecteurs très sensibles, les tubes photomultiplicateurs (TPM), qui peuvent être modélisés comme des générateurs de courant dans lesquels chaque électron photoémis crée une impulsion de courant de durée τ_d , de l'ordre de quelques nanosecondes (on prendra $\tau_d = 10\text{ns}$ dans les applications numériques), et d'amplitude $-I_{d0}$ schématisée sur la figure 9.



Le détecteur est éclairé par un faisceau monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 633\text{ nm}$.

a. Dans le modèle corpusculaire, N_d photons frappent en moyenne le détecteur par unité de temps, et une fraction κ de ces photons génère un photoélectron. Les photons obéissent à une statistique de Poisson : la probabilité de recevoir un photon par unité de temps est indépendante du temps (et vaut donc N_d).

(i) Quelle est l'intensité moyenne $\langle I_d \rangle$ délivrée par le détecteur ?

(ii) Supposons qu'un photon soit reçu à l'instant $t = 0$. Déterminer la probabilité $\pi(t)$ qu'aucun nouveau photon ne soit reçu entre l'instant initial et t .

(iii) En déduire une condition sur $N_d \tau_d$ pour que plus de 99% des impulsions de photocourant correspondent à un photon unique.

(iv) Quelle doit être la puissance lumineuse maximale frappant le détecteur pour qu'il en soit ainsi ?

b. Dans le modèle ondulatoire semi classique où la lumière est considérée comme une onde, la théorie de Lamb et Scully permet d'établir que la probabilité de photoémission d'un électron par unité de temps peut s'écrire $\pi_d = \eta P_{inc}$, où η est un facteur de proportionnalité et P_{inc} la puissance lumineuse incidente sur le détecteur.

A quelle condition sur P_{inc}, η, τ_d le détecteur délivrera-t-il des impulsions discrètes correspondant dans 99 % des cas à un électron unique ?

c. Peut-on distinguer les modèles corpusculaires et ondulatoires en utilisant simplement des sources de très faible intensité ?

³ J.N. Dodd, Eur. J. Phys. **4** (1983) 205-211

2. Détecteur de coïncidences.

On considère le montage de la figure 10 dans lequel les diodes (sans seuil) et les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire. Il comprend en outre deux tubes photomultiplicateurs (TPM1 et TPM2) identiques, qui délivrent, selon la puissance lumineuse reçue, des impulsions de courant identiques à celle de la figure 9

La tension de saturation positive des amplificateurs est notée V_{sat} . La tension constante V_C vaut $V_{sat} / 2$.

a. Trouver une relation entre R, I_{d0} et V_{sat} pour qu'une impulsion de courant délivrée par un des tubes photomultiplicateurs (figure 9) entraîne une saturation en tension de l'amplificateur opérationnel connecté au tube. Nous supposons que cette condition est réalisée pour les deux détecteurs.

b. On admet que chaque tube émet une impulsion de même durée τ_d . Pour le tube TPM1 l'impulsion débute en $t = 0$, et pour le tube TPM2, elle débute à l'instant $t = \Delta t$.

Représenter la tension V_A en fonction du temps dans les deux cas : $|\Delta t| > \tau_d$ et $|\Delta t| < \tau_d$.

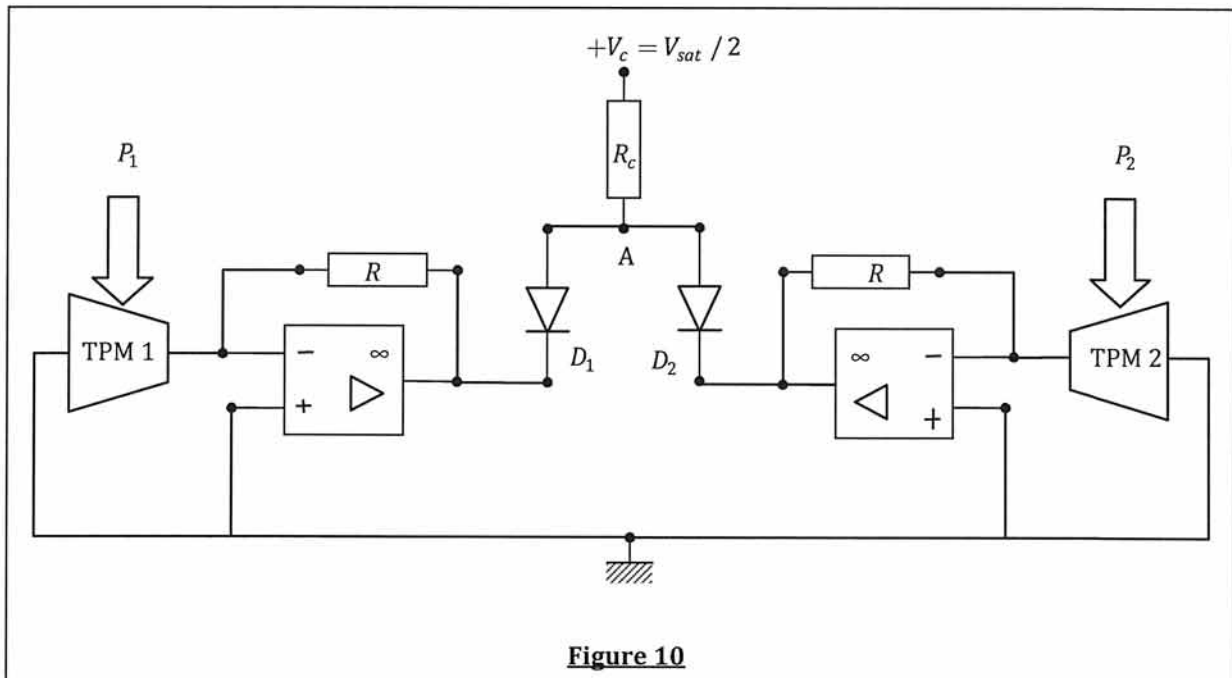


Figure 10

Lorsque la tension V_A est non nulle, on dit que l'on observe une *coïncidence* entre les impulsions délivrées par les deux tubes. De tels événements sont alors très faciles à dénombrer à l'aide d'un simple compteur.

3. Une preuve de l'existence des photons.

La première expérience inexplicable dans le modèle ondulatoire a été réalisée en 1977⁴, en étudiant la fluorescence d'atomes de sodium excités de façon permanente par un laser à colorant. Le dispositif permet de s'assurer que le rayonnement émis provient d'un unique atome de sodium. Ce rayonnement est ensuite envoyé vers une lame séparatrice qui permet d'éclairer deux détecteurs (voir figure 11).

Les chemins optiques depuis la source vers les deux détecteurs TPM1 et TPM2 sont égaux.

Pour simplifier l'analyse, nous admettons que la lame semi-réfléchissante est parfaite : elle est sans perte et l'intensité des deux faisceaux émergents est identique.

⁴ H. J. Kimble*, M. Dagenais, and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **39**, 691-695 (1977)

Pendant un intervalle de temps T_{exp} , on compte les impulsions délivrées par les deux détecteurs (notés N_1, N_2 respectivement pour TPM1 et TPM2), ainsi que le nombre de coïncidences entre les signaux des deux détecteurs (noté N_c).

a. Déterminer, en fonction de N_c, N_1, N_2 et T_{exp}, τ_d le coefficient d'anticorrélation α_{12} défini par

$$\alpha_{12} = \frac{\mathcal{P}_c}{\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2},$$

où $\mathcal{P}_i$ est la probabilité d'observer un électron photoémis par TPMi dans un intervalle de temps τ_d et $\mathcal{P}_c$ celle d'observer une corrélation dans le même temps.

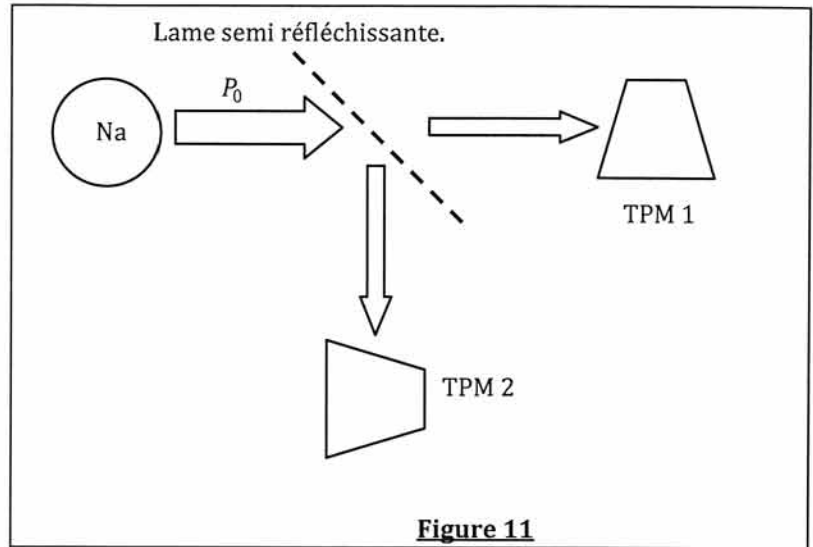


Figure 11

Nous commençons par analyser l'expérience d'un point de vue semi-classique où le rayonnement est décrit comme une onde, et où les détecteurs sont exposés à une puissance constante (valant $P_0 / 2$).

b. Exprimer $\mathcal{P}_i$ en fonction de η, P_0, τ_d .

Les photoélectrons sont émis aléatoirement, de façon indépendante par les deux détecteurs. Quelle est alors la valeur attendue pour α_{12} ?

c. En réalité, la source lumineuse considérée n'est pas rigoureusement stable et la puissance P_0 varie de façon aléatoire au cours du temps. Exprimer alors α_{12} en fonction de $\langle P_0^2 \rangle$ et $\langle P_0 \rangle^2$.

En déduire que l'on a toujours, dans le cas du modèle semi-classique, l'inégalité $\alpha_{12} \geq 1$.

d. Quelle est la valeur attendue de α_{12} si le rayonnement émis par l'atome de sodium est considéré comme un ensemble de particules discrètes, émises une par une, qui ne peuvent pas être détectées simultanément en deux endroits différents ?

Les mesures expérimentales conduisent à $\alpha_{12} \ll 1$: ce résultat est inexplicable de façon semi classique - le rayonnement est quantifié.