



MINISTÈRE  
DE L'ÉDUCATION  
NATIONALE

EAE PHP 1

SESSION 2019

---

## **AGREGATION CONCOURS EXTERNE**

**Section : PHYSIQUE-CHIMIE  
Option : PHYSIQUE**

**COMPOSITION DE PHYSIQUE**

Durée : 5 heures

---

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

## INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

| Concours | Section/option | Epreuve | Matière |
|----------|----------------|---------|---------|
| EAE      | 1500A          | 101     | 0385    |

# (...)STABILITÉS

Le problème comporte 6 parties (indexées par les lettres **A**, **B**, **C**, **D**, **E** et **F**) totalement indépendantes entre elles.

## Formulaire

On rappelle les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{a}{2} \right)$$

## A-Oscillateur harmonique

On considère un pendule élastique constitué d'un point matériel M de masse  $m$  astreint à se déplacer sur un axe horizontal  $Ox$ . L'axe  $Ox$  est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. L'origine des abscisses O constitue une extrémité d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  dont l'autre extrémité est fixée au point M. Initialement le point M est lâché sans vitesse initiale depuis un point d'abscisse  $x_0 > l_0$ . On considère que le mouvement de M sur l'axe  $Ox$  s'effectue sans aucun frottement.

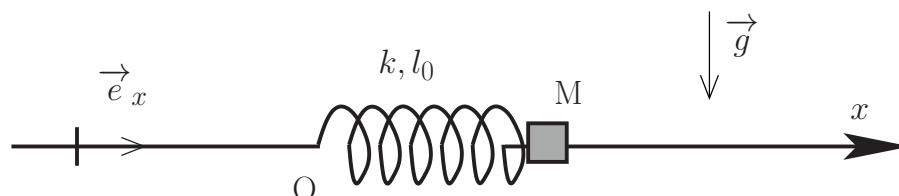


FIGURE 1 – Pendule élastique horizontal

1. Montrer que l'équation du mouvement de M peut se mettre sous la forme

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0$$

où  $\omega_0$  s'exprimera en fonction de  $k$  et  $m$ .

2. Quelle(s) est (sont) la (les) force(s) qui travaille(nt) au cours du mouvement de M. Montrer qu'elle(s) dérive(nt) d'une énergie potentielle  $E_p(x)$  qu'on exprimera en rappelant au préalable les propriétés générales d'une fonction énergie potentielle.

3. Tracer l'allure de cette fonction  $E_p(x)$  et en déduire le domaine des valeurs de  $x$  accessibles au cours du mouvement.

4. Résoudre l'équation obtenue à la question 1. et vérifier la compatibilité du résultat avec celui de la question

précédente.

5. On généralise l'étude précédente dans le cas où le point M, toujours astreint à se déplacer sur l'axe horizontal  $Ox$  est soumis à une résultante de forces qui dérive d'une énergie potentielle  $E(x)$ . On suppose qu'une position d'équilibre  $x_e$  existe pour M. Quelle propriété possède l'énergie potentielle en  $x = x_e$ ? En étudiant les petits mouvements de M autour de sa position d'équilibre, obtenir une condition sur  $\frac{d^2E}{dx^2}(x_e)$  pour que cet équilibre soit stable. Que peut-on dire alors de  $E(x)$  en  $x_e$ ?

6. Dans l'exemple du pendule élastique précédent, où est sa position d'équilibre? Est-elle stable ou instable?

## B-Oscillateur anharmonique : stabilité, instabilité, métastabilité

On considère la nouvelle configuration du pendule représentée en figure 2. Le point M est toujours astreint à se déplacer sur l'axe horizontal  $x'Ax$  en ne subissant aucun frottement. L'origine des  $x$  est prise en A. L'étude se fera dans le référentiel galiléen où l'axe  $Ax$  est fixe.

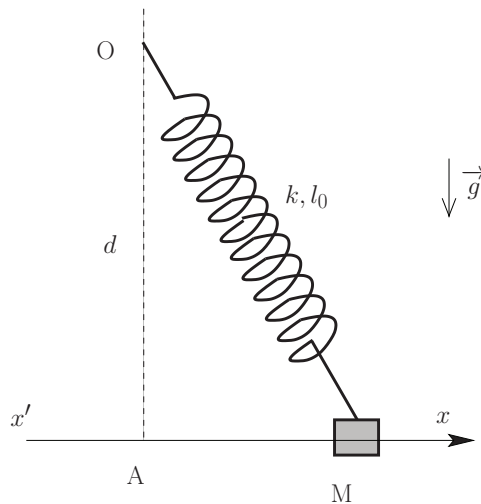


FIGURE 2 – Oscillateur anharmonique

7. Montrer que la résultante des forces s'appliquant sur M dans le référentiel d'étude dérive d'une énergie potentielle  $E'_p(x)$  qu'on calculera puis qu'on mettra sous la forme suivante (à une constante près) :

$$E'_p(x) = \frac{1}{2}kl_0^2 \left( \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2} - 1 \right)^2 \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{d}{l_0}$$

8. Préciser les positions d'équilibre dans les cas  $\alpha < 1$  et  $\alpha > 1$ .

9. Tracer, dans chacun des cas  $\alpha < 1$  et  $\alpha > 1$ , l'allure de la fonction  $E'_p(x)$ . Qu'en déduire quant à la stabilité des différentes positions d'équilibre?

10. On considère le cas  $\alpha > 1$ . Déterminer l'équation des petits mouvements autour de la (les) position(s) d'équilibre stable(s). Montrer que ce mouvement se ramène à celui d'un oscillateur harmonique dont on exprimera la période  $T_{\text{sup}}$  en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $\alpha$ .

11. On considère le cas  $\alpha < 1$ . Déterminer l'équation des petits mouvements autour de la (les) position(s) d'équilibre stable(s). Montrer que ce mouvement se ramène à celui d'un oscillateur harmonique dont on exprimera la période  $T_{\text{inf}}$  en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $\alpha$ .

**12.** Interpréter brièvement la valeur obtenue pour  $T_{\text{inf}}$  quand  $\alpha = 0$ . Proposer aussi une explication physique pour les valeurs obtenues pour  $T_{\text{sup}}$  et  $T_{\text{inf}}$  quand  $\alpha \rightarrow 1$ .

### C- Un exemple d'état métastable : liquide surfondu

Le but est ici de comprendre comment un liquide peut exister sous forme liquide alors qu'il se trouve à une température inférieure à sa température de solidification et comment une légère perturbation peut permettre de rompre cet équilibre.

**13.** On considère ici un système fermé ( $\Sigma$ ) et évoluant en contact avec le milieu extérieur assimilé à un thermostat à la température constante  $T_0$  et à un réservoir de pression à la pression  $P_0$ . On note  $U$  l'énergie interne du système ( $\Sigma$ ),  $S$  son entropie et  $V$  son volume. On suppose que le système subit une transformation au cours de laquelle il ne peut recevoir de l'énergie du milieu extérieur que sous forme de transfert thermique et de travail des forces pressantes (pas d'autre forme de travail possible). Montrer qu'au cours de la transformation

$$\Delta(U + P_0 V - T_0 S) \leq 0$$

En déduire que la fonction  $G^* = U + P_0 V - T_0 S$  joue le rôle de potentiel thermodynamique pour les évolutions monothermes et monobares. En particulier comment caractérise-t-on les états d'équilibre du système à l'aide de cette fonction ?

**14.** On considère maintenant un système diphasé ( $\Sigma_d$ ) en équilibre avec le même milieu extérieur qui impose sa température  $T_0$  et sa pression  $P_0$ . Le système ( $\Sigma_d$ ) est constitué de glace solide et d'eau liquide. La température  $T_0$  est inférieure à la température  $T_f$  de fusion de la glace à la pression  $P_0$ . On considère le système représenté ci-dessous où un germe solide (glace) sphérique de rayon  $r$  se trouve dans un volume d'eau liquide. La masse totale du système (liquide + glace) vaut  $m$ .

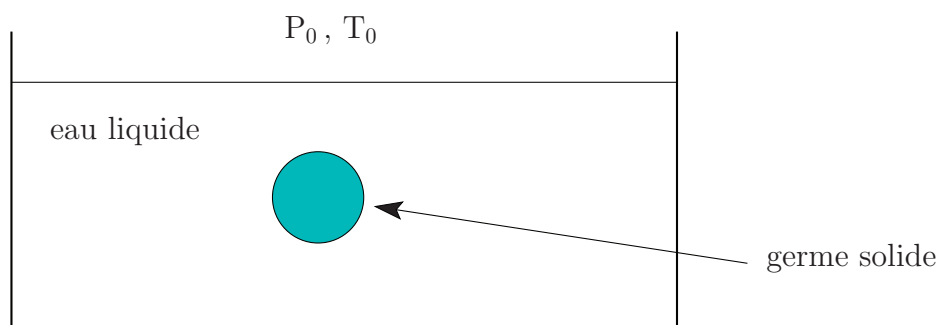


FIGURE 3 – Germe de glace dans de l'eau liquide

On s'intéresse à la fonction enthalpie libre  $G = U + PV - TS$  du système. Pour le système considéré les fonctions  $G$  et  $G^*$  sont-elles différentes ? Exprimer l'enthalpie libre  $G$  du système en fonction des enthalpies libres massiques de l'eau liquide  $g_l$ , de la glace  $g_s$  à la température  $T_0$  et à la pression  $P_0$ , de  $r$ ,  $m$  et  $v_s$  où  $v_s$  est le volumique massique de la glace à la température  $T_0$ .

**15.** Dans les conditions de l'expérience l'eau devrait être entièrement solide, déterminer alors le signe de  $g_s - g_l$ .

**16.** Pour expliquer la présence d'un germe solide, on tient alors compte du coefficient  $\gamma$  de tension superficielle à l'interface, glace/eau liquide. Cela conduit à ajouter un terme d'énergie de surface  $4\pi\gamma r^2$  à l'expression de l'enthalpie libre du système  $G$ .

Donner la nouvelle expression de l'enthalpie libre  $G$  du système et représenter l'allure du graphe donnant les

variations de  $G$  en fonction de  $r$ . Mettre en évidence un rayon  $r_c$  non nul qui rend  $G$  extrémal. On exprimera  $r_c$  en fonction  $g_l - g_s$ ,  $\gamma$  et  $v_s$ .

**17.** Sans apport d'énergie, quelle est l'évolution du système considéré au départ. On pourra étudier deux cas selon que  $r > r_c$  ou  $r < r_c$ . En déduire qu'on peut aussi faire cesser la surfusion de l'eau par ajout de « germes » de glace solide.

**18.** On suppose que la pression  $P_0$  est la pression atmosphérique et  $T_0 = 255,15 \text{ K}$  soit  $-18^\circ\text{C}$ . Pour cette température et cette pression  $|g_s - g_l| = 22,0 \text{ kJ.kg}^{-1}$ ,  $v_s = 917 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\gamma = 2,20.10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$ . Calculer  $r_c$  et commentez cette valeur.

**19.** Expliquer alors qu'on peut sortir une bouteille d'eau liquide d'un congélateur où la température vaut  $-18^\circ\text{C}$  à la pression atmosphérique et par une simple agitation, que l'eau de la bouteille se solidifie instantanément.

## D- Instabilité paramétrique

On étudie l'instabilité d'un oscillateur paramétrique dont un exemple très connu est le grand encensoir de la cathédrale de Saint-Jacques-de-Compostelle qu'on peut voir sur la figure 4.



FIGURE 4 – L'encensoir de Saint-Jacques-de-Compostelle (source : <https://commons.wikimedia.org>)

Cet encensoir de plus de 50 kg constitue un pendule suspendu sous le transept de la cathédrale. Le pendule est tout d'abord écarté de sa position d'équilibre verticale puis au cours des oscillations, un dispositif mécanique permet de faire varier la longueur  $l$  de la corde qui le soutient. Sous l'action de huit tireurs (*tiraboleiros*), cette longueur est périodiquement diminuée puis augmentée de façon à faire croître rapidement l'amplitude des oscillations du pendule.

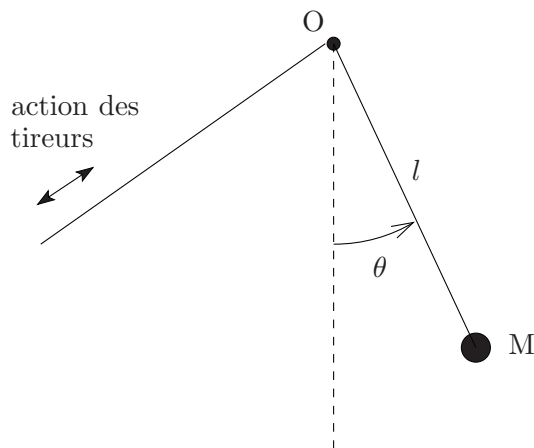


FIGURE 5 – Action des tireurs sur le pendule

Juan Sanmartin Losada décrit ce dispositif dans le texte ci-dessous extrait d'un article de la revue *Pour la science* (Dossier Hors série « Le chaos » paru en janvier 1995, pages 55 à 57) :

.....

## La physique de l'encensoir

Selon la légende, Galilée comprit les lois du pendule en regardant les oscillations d'un lustre dans une église italienne : il aurait certainement été plus inspiré par les formidables oscillations entretenues de l'encensoir de la cathédrale de Saint-Jacques-de-Compostelle.

Depuis sept siècles, un mécanisme ingénieux fait osciller cet encensoir géant, qui témoigne des connaissances empiriques des mécaniciens du Moyen Age. Suspendu par une corde attachée au haut de la croisée de la cathédrale, l'encensoir gigantesque est dévié, d'une poussée, de sa position de repos verticale. Pendant qu'il se balance, huit hommes tirent sur une corde qui soulève l'encensoir lorsque celui-ci passe par la verticale et relâchent la corde quand l'encensoir est au plus haut. Les tireurs, sous les ordres d'un conducteur, amplifient ainsi les oscillations de l'encensoir, jusqu'à ce que celui-ci monte à une hauteur de 21 mètres, décrive un arc de 65 mètres de longueur, et passe en vrombissant à la vitesse de 68 kilomètres à l'heure en un point situé à ras du sol.

Le dispositif mécanique a été amélioré depuis le XIIIe siècle. La structure supérieure actuelle, une carcasse en fer, a été édifiée en 1602, en remplacement du bâti en bois d'origine, qui masquait trop la lumière. Vissée en quatre points sur les grands piliers de la croisée, le dispositif moderne a, en son centre, deux tambours de châtaignier, de 58 centimètres et 29 centimètres de diamètre, dont l'axe commun repose sur la carcasse métallique.

L'encensoir est aujourd'hui en laiton argenté. Plein de braises et d'encens, il pèse plus de 50 kilogrammes. La corde, dont une extrémité est nouée à l'encensoir, s'enroule d'abord autour du tambour de petit diamètre, puis autour du tambour de grand diamètre, et redescend vers le sol. Quand l'encensoir et la corde passent par la position verticale, les hommes tirent sur la corde qui fait tourner le petit tambour de plus d'un tour et demi, lequel entraîne le grand tambour et la même corde soulève ainsi l'encensoir d'environ trois mètres. Ce dispositif à double tambour amplifie les déplacements. Les tireurs relâchent la même longueur de corde lorsque l'encensoir atteint le point d'amplitude maximale. Après la poussée initiale, l'amplitude angulaire est

d'environ 13 degrés. En 80 secondes et 17 demi-périodes d'oscillation de l'encensoir, l'amplitude maximale de 82 degrés est atteinte, l'encensoir atteignant un point situé à un demi-mètre sous la voûte.

En variant la longueur de la corde à laquelle est pendu l'encensoir, les tireurs augmentent l'énergie d'oscillation du pendule, comme un enfant sur une balançoire qui s'accroupit et se relève cycliquement pour se balancer plus fort. Cette amplification, qui consiste à faire varier un paramètre d'un oscillateur, s'appelle amplification paramétrique. Dans le cas de l'encensoir, lorsque la longueur de la corde varie, la tension de la corde exerce un travail ; le travail est positif et augmente l'énergie quand la corde est raccourcie, négatif dans le cas contraire. Au cours d'un cycle complet d'allongement et de raccourcissement de la corde, le bilan du travail de la tension peut être positif ou négatif.

L'accélération radiale pendant le mouvement de tirage résulte du déséquilibre entre la tension de la corde, la force centrifuge et le poids de l'encensoir. Comme il n'y a pas de mouvement radial avant ou après le tirage, le travail de la tension au cours d'un cycle (sauf lors du tirage) est égal et de signe opposé à la somme des travaux des deux autres forces. Le tirage de la corde augmente l'énergie de l'encensoir car, dans la position basse, la vitesse de l'encensoir et la force centrifuge sont maximales et le poids de l'encensoir est dirigé le long de la corde ; en ce point la tension de la corde est maximale. Dans la position haute, la force centrifuge est nulle et la composante du poids le long de la corde est faible, aussi la tension de la corde est presque nulle quand le point d'amplitude maximale correspond à un angle d'oscillation approchant 90 degrés. Le gain d'énergie résultant du tirage est maximal quand le raccourcissement de la corde est effectué instantanément au point le plus bas de la trajectoire et l'allongement de la corde réalisé au point le plus haut de la trajectoire.

Dans ce cas, le gain d'énergie relatif au cours d'une demi-période d'oscillation, est égal au triple du raccourcissement de la corde, divisé par sa longueur totale. On notera que ce gain relatif ne dépend pas de l'amplitude, de sorte que la résistance de l'air, négligeable à basse amplitude, peut finalement l'emporter sur le gain en énergie dû au tirage. Le gain absolu est petit à basse amplitude, et l'amplification requiert un temps inhabituellement long quand la poussée initiale est faible. Ce phénomène est bien connu du sacristain qui dirige l'équipe de tireurs.

(...) Le pendule-encensoir est assimilable à un oscillateur harmonique : sa fréquence d'oscillation  $\nu$  est indépendante de l'amplitude des (petites) oscillations. La modulation introduite par le tirage de la corde est périodique de fréquence fondamentale  $2\nu$ . Un oscillateur modulé par une fonction sinusoïdale obéit à une équation dite de Mathieu ; une telle équation a une résonance et une instabilité paramétrique (augmentation de l'énergie) pour une excitation sinusoïdale de fréquence  $2\nu$  ; cette excitation sinusoïdale est moins efficace d'un facteur  $\pi/4$  que l'excitation optimale par tirage instantané. Pour une excitation arbitraire d'un oscillateur harmonique, la technique d'analyse de Fourier permet d'écrire une modulation périodique comme une somme de fonction de fréquences  $2\nu, 4\nu, 6\nu, \dots$ , avec des coefficients de Fourier appropriés. Si les amplitudes sont faibles, seule la modulation à la fréquence  $2\nu$  contribue au gain énergétique. Il s'agit alors de déterminer parmi toutes les fonctions d'excitation de période  $2\nu$  celle qui donne le plus grand premier coefficient de Fourier. La solution de ce problème est la fonction qui saute de façon discontinue, « instantanément », entre les valeurs maximale et minimale, la fonction échelon d'Heaviside. Pour cette fonction le premier coefficient est égal à la valeur du saut de la fonction (le raccourcissement de la corde) multiplié par  $4/\pi$ .

.....

**20.** Le texte indique (lignes 14 à 22) que grâce au système à deux tambours, les tireurs soulèvent l'encensoir de  $\Delta l = 3$  mètres. Faire un schéma du dispositif à deux tambours et, avec les données numériques du texte, évaluer la valeur  $\Delta l'$  de la longueur de corde tirée par les hommes. De même, en négligeant le moment d'inertie du système des deux tambours et la masse de la corde, exprimer la tension  $T'$  exercée par les hommes sur la corde en fonction des rayons des tambours ( $r'$  pour le petit,  $r$  pour le grand) et de la norme  $T$  de la

tension exercée par la corde sur l'encensoir. Quels sont l'intérêt et l'inconvénient d'utiliser ce système à deux tambours ?

**21.** Le texte parle à plusieurs reprises de force centrifuge. Préciser cette notion en donnant par exemple une définition de cette force. Est-elle de même nature que le poids ou la tension de la corde ?

**22.** On lit dans le texte aux lignes 33-34 : *L'accélération radiale pendant le mouvement de tirage résulte du déséquilibre entre la tension de la corde, la force centrifuge et le poids de l'encensoir.* Indiquer, en écrivant le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel adapté qu'on précisera, la correction qu'il faudrait apporter à cette affirmation ?

**23.** Justifiez l'affirmation du texte relative aux signes du travail exercé par la corde des lignes 29 à 31 en précisant de quelle énergie il est question.

**24.** On note maintenant  $E$  l'énergie de l'encensoir, l'énergie potentielle étant prise nulle au point le plus bas de la trajectoire. À partir de données numériques de l'énoncé, évaluez le rapport  $W_f/E$  de l'énergie  $W_f$  dissipée par les frottements sur un quart de période (entre le point le plus haut et le point le plus bas) sur l'énergie  $E$  de l'oscillateur. Qu'en conclure ?

**25.** Expliquer pourquoi le tirage de la corde introduit une modulation périodique de fréquence double de celle de l'oscillateur et pourquoi l'excitation sinusoïdale de fréquence  $2\nu$  est moins efficace d'un facteur  $\pi/4$  que l'excitation optimale par tirage instantané (lignes 53 à 61).

On propose dans la suite un modèle de l'action optimale des tireurs schématisé ci-dessous.

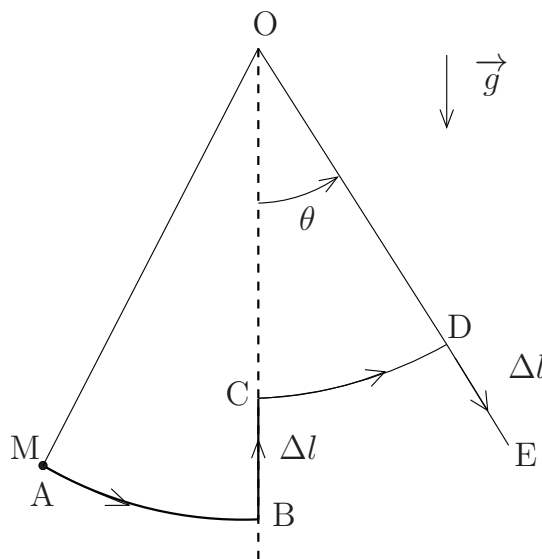


FIGURE 6 – Modèle simplifié du tirage

On suppose que par leur action, ils raccourcissent quasi-instantanément la longueur du pendule de  $\Delta l$  lorsque celui passe par la position verticale ( $\theta = 0$ , entre B et C) et qu'ils laissent la corde s'allonger quasi-instantanément de  $\Delta l$  lorsque le pendule a atteint son angle maximal (entre D et E) et que sa vitesse s'annule (cf. figure 6). On notera  $l_0$  la plus grande longueur de la corde ( $l_0 = OA = OB$  sur le schéma) et  $l_0 - \Delta l$  la plus petite longueur de corde ( $l_0 - \Delta l = OC = OD$  sur le schéma). On considérera de plus que  $\Delta l \ll l_0$ . On négligera aussi la masse de la corde devant celle, notée  $m$ , de l'encensoir, considéré comme ponctuel, situé en M, et suspendu en bout de corde. On néglige aussi dans un premier temps tout frottement.

**26.** En utilisant le théorème du moment cinétique, donner une relation entre les vitesses de l'encensoir  $v_B$  en

B,  $v_C$  en C et les longueurs  $l_0$  et  $l_0 - \Delta l$ .

**27.** Calculer aussi les variations d'énergie du pendule  $\Delta E_{BC}$  entre les points B et C et  $\Delta E_{DE}$  entre les points D et E en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $l_0$ ,  $\Delta l$  et  $\theta$ . On se limitera à des expressions d'ordre 1 en  $\Delta l$ .

**28.** Proposer alors une démonstration de l'affirmation du texte des lignes 43 et 44 : *Dans ce cas, le gain d'énergie relatif au cours d'une demi-période d'oscillation, est égal au triple du raccourcissement de la corde, divisé par sa longueur totale.*

**29.** Toujours dans le cadre de ce modèle, du fait du raccourcissement et de l'allongement successifs de la corde, l'amplitude des oscillations du pendule augmente comme schématisé sur la figure 7 suivante.

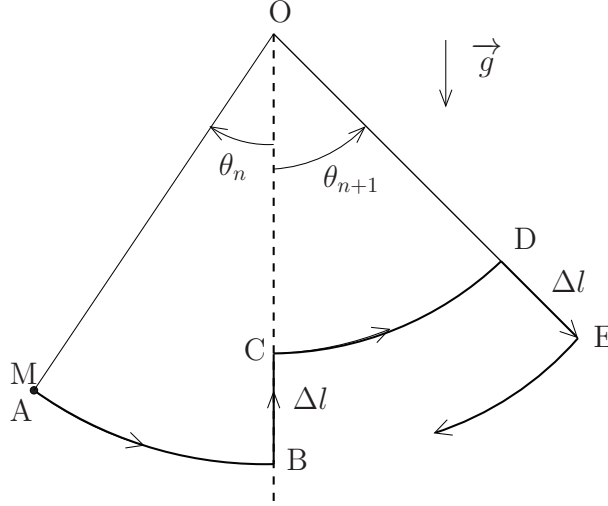


FIGURE 7 – Amplitudes successives de l'oscillateur

Déduire de ce modèle, une relation entre les angles maximaux successifs atteints,  $\theta_n$  et  $\theta_{n+1}$ , et  $l_0$  et  $\Delta l$ . Pour l'encensoir de Saint Jacques de Compostelle,  $l_0 = 21,5\text{ m}$  et  $\Delta l = 3\text{ m}$ . Montrer que ce modèle n'est pas compatible avec les observations décrites dans le texte ci-dessus aux lignes 23 à 25. Que pensez-vous du modèle proposé ? Quelles principales critiques peut-on lui faire ?

Les questions qui suivent ne font plus appel à la lecture du texte « La physique de l'encensoir ».

**30.** Un second modèle considère que l'action des tireurs a pour effet de faire varier quasi-sinusoidalement la distance entre l'extrémité O du pendule et le point fixe A, point lié à la cathédrale dont le référentiel sera considéré galiléen. Dans ce modèle la longueur OM est constante et sera notée  $l$ . On néglige encore le poids de la corde et la masse du point M est celle, notée  $m$ , de l'encensoir. Le modèle est représenté sur la figure 8. On notera, en utilisant le vecteur unitaire  $\vec{e}_z$  :  $\vec{AO} = z_O(t) \vec{e}_z = a \cos(\omega_f t) \vec{e}_z$ . Montrer que l'équation d'évolution pour l'angle  $\theta(t)$  que fait le pendule avec la verticale s'écrit sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 + h \cos(\omega_f t)) \sin \theta = 0$$

où  $\omega_0$  est une pulsation qu'on exprimera en fonction de l'accélération de la pesanteur  $g$  et de  $l$ . Ici  $h$  est un coefficient sans dimension qu'on exprimera en fonction de  $a$ ,  $g$  et  $\omega_f$  et qu'on supposera faible devant 1 dans la suite.

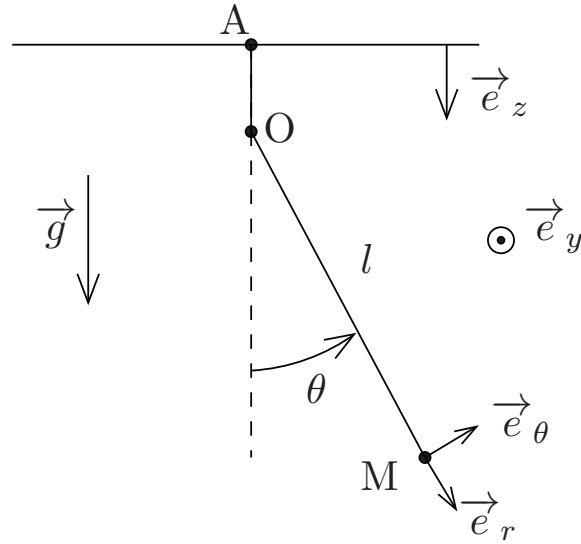


FIGURE 8 – Second modèle de l'encensoir

**31.** Pour un pendule simple la solution  $\theta = 0$  correspond à une position d'équilibre stable. On va étudier dans la suite la modification éventuelle de cette stabilité consécutive à la présence d'un facteur dépendant du temps dans l'équation différentielle régissant l'évolution de  $\theta$ . On s'intéresse donc aux mouvements de faible amplitude autour de  $\theta = 0$ . Dans ces conditions, donner une forme approchée de l'équation précédente.

La théorie de Floquet des équations linéaires à coefficients périodiques montre que les solutions de l'équation de la forme approchée de l'équation sont du type

$$\theta(t) = e^{\mu\omega_0 t} \cdot F(t)$$

où  $\mu$  est une constante et  $F(t)$  est une fonction périodique de pulsation  $\frac{\omega_f}{2}$ . Pour un coefficient  $h$  nul, la solution de l'équation d'évolution de  $\theta$  est du type  $\theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ . On utilise ici un calcul de perturbations pour  $h \ll 1$  tout en respectant la théorie de Floquet en cherchant une solution de la forme

$$\theta(t) = \theta_1 e^{\mu\omega_0 t} \cos\left(\frac{\omega_f}{2}t + \varphi\right)$$

En injectant cette solution dans l'équation obtenue à la question **31.**, on obtient

$$\mu^4 + 2\mu^2(1 + U^2) + (U^2 - 1)^2 - \frac{h^2}{4} = 0 \quad \text{en posant} \quad U = \frac{\omega_f}{2\omega_0}$$

**32.** Montrer qu'une instabilité (dite *instabilité paramétrique*) apparaît quand

$$h^2 > h_c^2 = 4(U^2 - 1)^2$$

**33.** On donne sur la figure 9 la courbe représentant  $h_c = 2|U^2 - 1|$  dans le plan  $(U, h)$ .

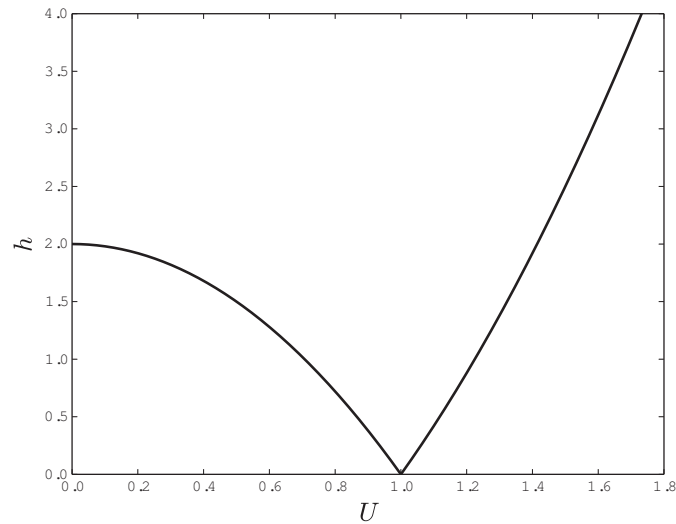


FIGURE 9 – Courbe  $h_c = 2|U^2 - 1|$

En recopiant sur votre copie l'allure de cette courbe, indiquer les zones où l'instabilité apparaît et celles où l'oscillateur est stable.

**34.** Commenter qualitativement l'influence de l'amplitude de l'excitation sur le déclenchement de l'instabilité en lien avec la pulsation  $\omega_f$ . Montrer que même pour des valeurs de  $h$  très faibles, l'instabilité peut apparaître quand  $\omega_f$  est proche de  $2\omega_0$ .

**35.** Dans cette question, on se place dans le cas où  $h$  est très légèrement supérieur à  $h_c$ . On écrit alors  $h^2 = h_c^2 + \varepsilon$  avec  $\varepsilon \ll 1$ . Montrer tout d'abord que  $\tau = 1/(\mu\omega_0)$  est un temps caractéristique d'établissement de l'instabilité. Ensuite, à l'aide de la question **32.** et de son préambule, donner une expression de  $\tau$  en fonction de  $\omega_0$ ,  $U$  et  $\varepsilon$ . Que devient ce temps quand  $\varepsilon$  tend vers 0 ? Proposer une interprétation physique de ce résultat en particulier dans le cas où  $\omega_f = 2\omega_0$ .

## E- Bistabilité optique

**36.** On étudie en préambule de cette partie un montage électronique présentant une bistabilité. Il s'agit d'un montage utilisant un amplificateur linéaire intégré (A.L.I.) fonctionnant en régime saturé représenté sur la figure 10.

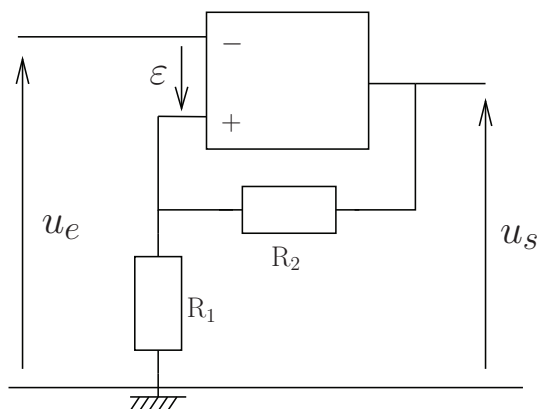


FIGURE 10 – Montage comparateur à hystérésis

On rappelle qu'en régime saturé, la tension de sortie de l'amplificateur vaut  $\pm V_{\text{sat}}$  selon le signe de  $\varepsilon$  :

$$\begin{cases} u_s = +V_{\text{sat}} & \text{si } \varepsilon > 0 \\ u_s = -V_{\text{sat}} & \text{si } \varepsilon < 0 \end{cases}$$

On note  $R_1$  et  $R_2$  les deux résistances utilisées dans le montage et on pose  $u_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} > 0$ .

On suppose qu'à l'instant initial  $u_e = u_i > u_0$  et  $u_s = -V_{\text{sat}}$ . Puis  $u_e$  diminue jusqu'à la valeur  $-u_i$  pour augmenter à nouveau jusqu'à la valeur  $u_i$ . Tracer la caractéristique de ce montage :  $u_s$  en fonction de  $u_e$  en repérant avec des flèches son sens de parcours. Donner, en les justifiant soigneusement, les valeurs remarquables prises par  $u_s$  au cours de ces variations de  $u_e$ .

**37.** Justifier alors le nom de cycle d'hystérésis donné à ce tracé.

Pourquoi peut-on alors parler de bistabilité du montage ?

La suite consiste à étudier la bistabilité optique et son application pour réaliser des interrupteurs optiques. Dans une première partie on étudiera un exemple de bistabilité dans un résonateur Fabry-Perot en présence d'un absorbant saturable. Dans une deuxième partie, on étudiera un interrupteur optique, réalisé en insérant un milieu non-linéaire dans l'un des bras d'un interféromètre de Mach-Zehnder.

On considère dans un premier temps le résonateur de Fabry-Perot schématisé en figure 11. Il est constitué de deux miroirs parallèles placés en  $x = 0$  et  $x = L$ , délimitant un milieu d'indice  $n$  et de coefficient d'absorption  $\alpha$ , que l'on supposera uniforme (i.e. indépendant de  $x$ ). Par simplicité on supposera que l'indice du milieu entourant le résonateur a également indice  $n$ . On appellera respectivement  $r$  et  $t$  les coefficients, supposés réels, de réflexion et de transmission en amplitude associés à chacune des deux interfaces, et  $R = r^2$  et  $T = t^2$  les coefficients de réflexion et de transmission en intensité, avec  $R + T = 1$ .

On rappelle que le coefficient d'absorption  $\alpha$  est défini par la loi de Beer-Lambert :  $I = I_0 e^{-\alpha l}$ , avec  $I_0$  l'intensité lumineuse incidente dans un milieu et  $I$  l'intensité de l'onde après avoir traversé une longueur  $l$  dans le milieu.

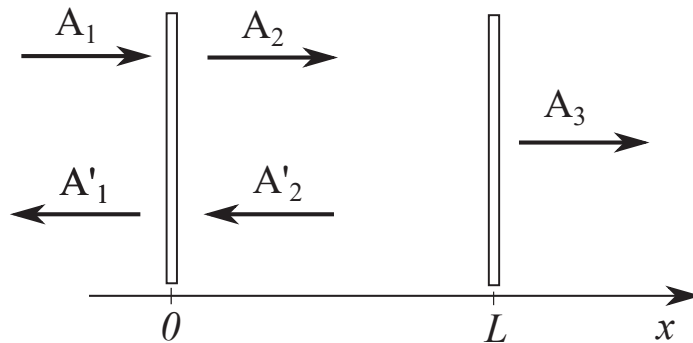


FIGURE 11 – Schéma d'un résonateur Fabry-Perot de longueur  $L$ .

**38.** Soit  $A_j$  et  $A'_j$  les amplitudes complexes des ondes planes progressives monochromatiques, selon les notations de la figure 11 ( $j \in \{1, 2, 3\}$ ). On cherche à exprimer, en  $x = 0$ , l'amplitude  $A_2$  de l'onde de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$  (de projection  $k$  selon  $Ox$ ) se propageant dans l'interféromètre dans la direction des  $x$  croissants (on choisit la convention d'écriture en  $e^{i(\omega t - kx)}$  pour une telle grandeur avec  $i^2 = -1$ ). Pour cela exprimer tout d'abord, et toujours en  $x = 0$ , l'amplitude  $A_{2i}$  de l'onde se propageant dans l'interféromètre dans

la direction des  $x$  croissants après un aller-retour dans la cavité. Exprimer ensuite, toujours en  $x = 0$ , l'amplitude  $A_{2p}$  de l'onde se propageant dans l'interféromètre dans la direction des  $x$  croissants après  $p$  aller-retours dans la cavité ( $p$  entier). En déduire que l'amplitude  $A_2$  recherchée est donnée par l'équation d'Airy :

$$A_2 = \frac{tA_1}{1 - r^2 e^{-(2ikL + \alpha L)}}$$

**39.** Montrer que l'intensité  $I_2 = \frac{1}{2} |A_2|^2$  de l'onde qui se propage dans le résonateur selon les  $x$  croissants s'écrit, toujours en  $x = 0$ ,

$$I_2 = \frac{T \frac{|A_1|^2}{2}}{(1 - R e^{-\alpha L})^2 + 4R e^{-\alpha L} \sin^2(kL)}$$

Simplifier cette expression quand les pertes sont faibles ( $\alpha L \ll 1$ ) et qu'on se situe à la résonance, c'est à dire que le produit  $kL$  est fixé pour obtenir l'intensité maximale. On se limitera à un développement limité à l'ordre 1 en  $\alpha L$ . C'est cette expression de  $I_2$  simplifiée qu'on considérera dans la suite.

**40.** Montrer alors que  $I_2$  peut s'écrire en fonction de  $C(\alpha) = \frac{R\alpha L}{1 - R}$  comme :

$$I_2 = \frac{1}{T} \frac{I_1}{(1 + C(\alpha))^2}$$

### Bistabilité d'absorption

On considère maintenant que le résonateur Fabry-Perot est rempli d'un absorbant saturable, caractérisé par une absorption qui dépend de l'intensité comme :

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + I/I_s}$$

avec  $I$  l'intensité dans le résonateur,  $I_s$  l'intensité de saturation et  $\alpha_0$  le coefficient d'absorption à faible puissance. Comme  $\alpha L \ll 1$ , la variation spatiale de l'intensité du champ dans la cavité est négligeable. On supposera donc l'intensité uniforme dans le résonateur dans la suite de cette partie *Bistabilité d'absorption*.

**41.** On se propose d'étudier les variations de l'intensité  $I_3$  à la sortie de la cavité en fonction des variations de l'intensité  $I_1$  en entrée. À la résonance, l'intensité totale à l'intérieur de l'interféromètre est  $I = I_2 + I'_2 \approx 2 \times I_2$ .

On caractérise la sortie du système par la grandeur  $\frac{I_3}{I_s}$  et on pose  $u = \frac{I}{I_s}$ . Montrer que  $\frac{I_3}{I_s} = \frac{T}{2} u$ .

On caractérise l'entrée du système par la grandeur  $\frac{I_1}{I_s}$ . Montrer que  $\frac{I_1}{I_s}$  s'écrit sous la forme  $\frac{I_1}{I_s} = \frac{T}{2} f(u)$  avec

$$f(u) = u \left( 1 + \frac{C(\alpha_0)}{1 + u} \right)^2.$$

**42.** Montrer qu'il existe une valeur critique  $C_c$  du paramètre  $C(\alpha_0)$  au dessus de laquelle la fonction  $f(u)$  présente des extrema. Déterminer cette valeur critique.

On donne ci-dessous l'allure de la courbe  $f(u)$  pour  $C(\alpha_0) > C_c$  et pour  $C(\alpha_0) < C_c$ .

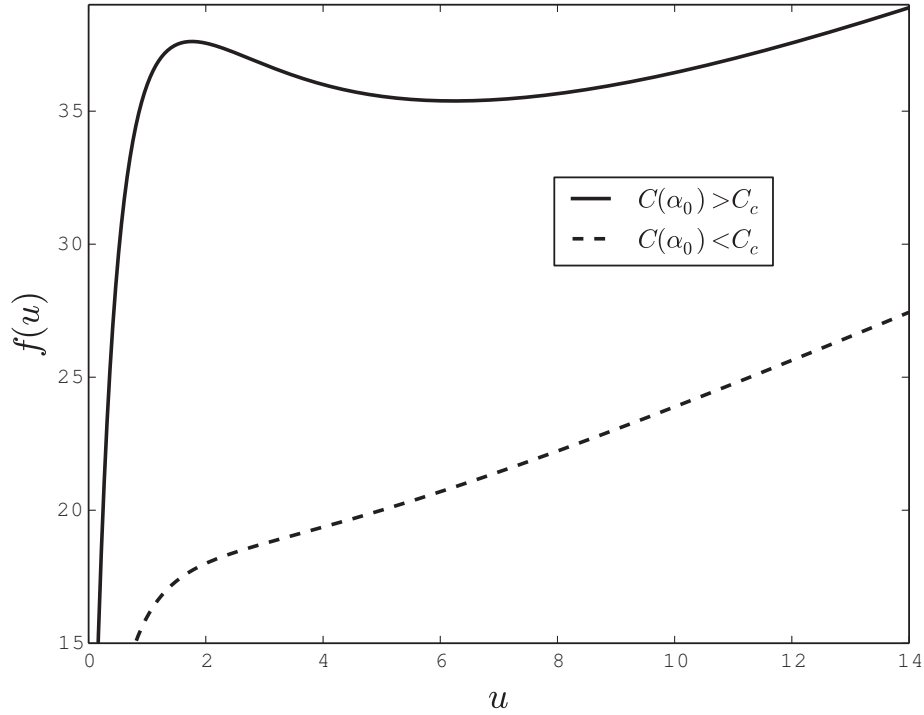


FIGURE 12 – Tracé de la fonction  $f(u)$  pour  $C(\alpha_0) > C_c$  et  $C(\alpha_0) < C_c$

**43.** Expliquer pourquoi un phénomène d'hystérésis peut être observé en considérant  $I_1$  comme valeur d'entrée et  $I_3$  comme valeur de sortie. On appellera  $I_b$  et  $I_h$ , avec  $I_b < I_h$ , les valeurs des intensités en entrée qui délimitent le cycle d'hystérésis.

**44.** On suppose que l'intensité en entrée dans l'interféromètre est  $I_1$  avec  $I_b < I_1 < I_h$ . Il y a alors deux points stables pour l'intensité en sortie. Proposer un protocole expérimental permettant de passer d'un état stable à l'autre.

### Interrupteurs optiques

Dans cette partie on s'intéressera à la bistabilité de dispersion, qui est obtenue en utilisant un milieu transparent ( $\alpha = 0$ ) non-linéaire dont l'indice dépend de l'intensité lumineuse comme  $n = n_0 + \gamma I$ , avec  $n_0$  l'indice de réfraction linéaire et  $\gamma$  le coefficient d'indice non linéaire supposé constant. Plus particulièrement on démontrera qu'un interféromètre de Mach-Zehnder, illustré en figure 13, contenant un milieu non-linéaire dans l'un de ses bras, peut fonctionner comme un interrupteur optique. Pour cela on rappellera d'abord le fonctionnement d'un interféromètre de Mach-Zehnder dans le cas où les deux bras sont identiques (i.e.  $n = n'$ ), ensuite on étudiera son fonctionnement dans le cas où  $n' \neq n$  et finalement le cas où  $n'$  dépend de l'intensité lumineuse.

L'interféromètre est constitué de deux lames séparatrices et de deux miroirs, comme illustré en figure 13. Les coefficients de réflexion et de transmission (respectivement  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$ ) en amplitudes des lames séparatrices sont liés aux coefficients de réflexion et de transmission ( $R$  et  $T$ ) en intensité par :  $\underline{r} = i\sqrt{R}$  et  $\underline{t} = \sqrt{T}$ , avec  $R + T = 1$ . Une source envoie un faisceau de lumière cohérente qui est collimatée afin de produire une onde plane progressive monochromatique. On appellera  $E_0$  l'amplitude du champ électrique,  $I_0$  l'intensité lumineuse

incidente définie par  $I_0 = \frac{1}{2}|E_0|^2$  et  $\omega$  la pulsation de l'onde.

On considère dans les questions 45. à 47. un interféromètre de Mach-Zehnder dans le cas  $n = n'$ .

45. Donner l'expression de l'amplitude du champ  $E_A$  à la sortie A de l'interféromètre.

46. Donner l'expression de l'amplitude du champ  $E_B$  à la sortie B de l'interféromètre.

47. Que valent les intensités mesurées par des détecteurs placés aux sorties A et B de l'interféromètre si  $R = T = 1/2$  ?

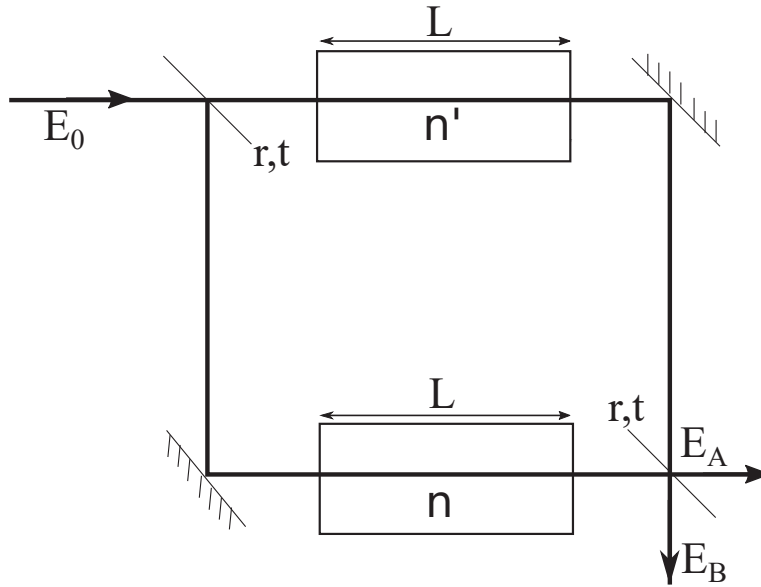


FIGURE 13 – Schéma de l'interrupteur optique.

On considérera dans la suite  $R = T = 1/2$  et on s'intéressera à un interféromètre de Mach-Zehnder pour lequel  $n \neq n'$ .

48. Soit maintenant  $n' = n + \Delta n$ . Calculer le déphasage  $\Delta\phi$ , induit par la différence d'indice, entre les ondes qui interfèrent.

49. Calculer les intensités lumineuses  $I_A$  et  $I_B$  mesurées respectivement aux sorties A et B de l'interféromètre en fonction de  $\Delta\phi$  et  $I_0$ . Commenter.

50. On considère maintenant que l'indice  $n'$  dépend de l'intensité lumineuse  $I$  dans le milieu d'indice  $n'$  :  $n' = n + \gamma I$ , avec  $\gamma$  une constante réelle. Calculer le déphasage  $\Delta\phi_{NL}$  dans ce cas.

51. Tracer  $I_A$  et  $I_B$  en fonction de  $\Delta\phi_{NL}$ .

52. Que se passe-t-il pour le déphasage  $\Delta\phi_{NL} = \pi$  ? Expliquer pourquoi le dispositif expérimental présenté peut être utilisé comme un « trieur d'impulsion », comme représenté en figure 14.

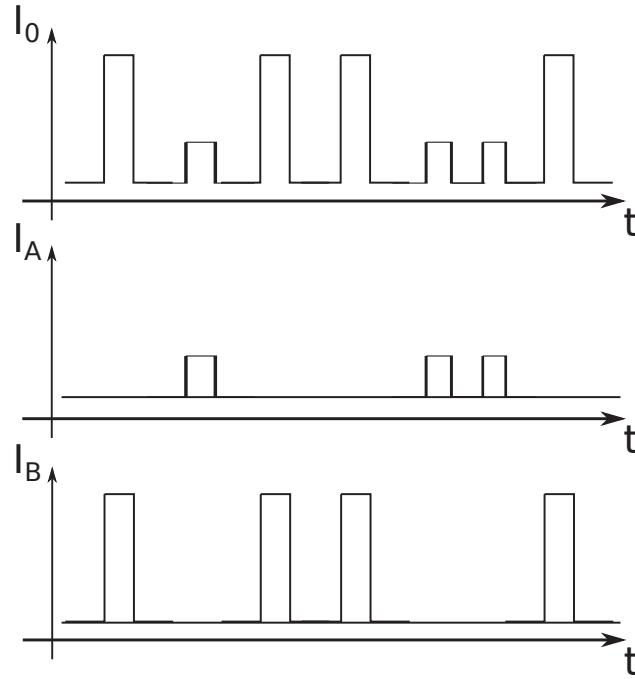


FIGURE 14 – Illustration de l'utilisation de l'interféromètre de Mach-Zehnder comme un « trieur d'impulsion ».

## F- Instabilité de Rayleigh-Bénard

Cette instabilité peut être observée dans une couche de fluide initialement au repos et soumise à un gradient vertical de température par exemple en confinant le fluide entre deux plaques horizontales et parallèles distantes de la distance  $a$  avec la plaque inférieure à une température  $T_0 + \Delta T$  plus élevée que celle de la plaque supérieure qu'on notera  $T_0$ . Expérimentalement on constate que lorsque  $\Delta T$  reste inférieure à une valeur critique, les transferts thermiques restent diffusifs sans mouvement macroscopique de fluide. Par contre lorsque  $\Delta T$  atteint et dépasse légèrement la valeur critique  $\Delta T_c$ , le fluide est mis en mouvement et des rouleaux contrarotatifs parallèles apparaissent entre les plaques, le diamètre de ces rouleaux est proche de la distance  $a$  entre les plaques. Une représentation bidimensionnelle de cette situation est donnée figure 15.

**53.** Quel est le phénomène physique « moteur » du mouvement ascendant ? Quels phénomènes physiques tendent à s'y opposer ?

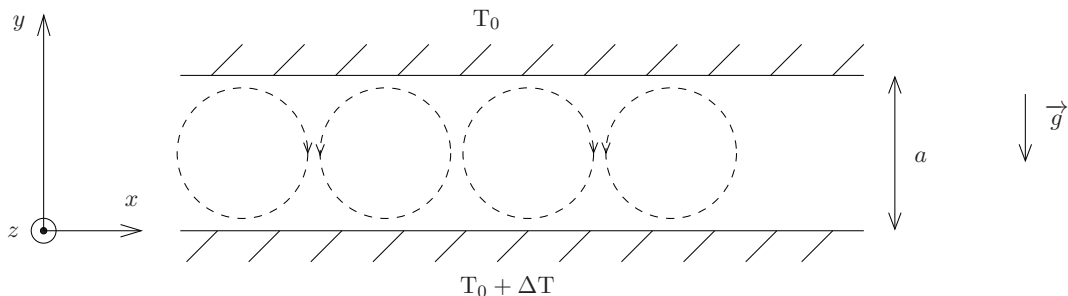


FIGURE 15 – Dispositif pour convection de Rayleigh-Bénard

**54.** On étudie dans cette question la diffusion thermique dans un fluide au repos de masse volumique  $\rho$ , de

capacité thermique massique  $c$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . Rappeler dans un premier temps la loi de Fourier pour la diffusion thermique en précisant bien ce que représente chacun des termes qui y apparaissent. En déduire l'équation, appelée parfois *équation de la chaleur* vérifiée par la température  $T(y, t)$  en l'absence de sources d'énergie dans le milieu. On pourra faire apparaître une constante  $D_{th}$ , homogène à un coefficient de diffusion, appelée diffusivité thermique qu'on exprimera en fonction de  $\rho$ ,  $c$  et  $\lambda$ .

Donner alors l'expression d'un temps caractéristique  $\tau_{th}$  du phénomène de diffusion thermique ayant lieu sur une distance caractéristique  $d$ . On exprimera ce temps en fonction de  $D_{th}$  et  $d$ .

**55.** Donner alors la loi  $T_{eq}(y)$  pour un fluide à l'équilibre entre les deux plaques en supposant le régime permanent atteint. On exprimera le résultat à l'aide de  $T_0$ ,  $\Delta T$ ,  $a$  et  $y$ .

**56.** On considère le même fluide et on note  $\eta$  sa viscosité dynamique. La vitesse du fluide vérifie l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

Donner la signification physique des cinq termes de cette équation.

Simplifiez alors cette équation dans le cas où les forces pressantes et de pesanteur se compensent (cas de la statique des fluides) et où le terme d'accélération convective peut-être négligé. Montrer alors que la vitesse locale vérifie une équation de diffusion et, par analogie avec la question précédente en déduire un temps caractéristique  $\tau_v$  du phénomène de diffusion visqueuse ayant lieu sur une distance caractéristique  $d$ .

**57.** On définit alors le nombre de Prandtl, noté  $Pr$ , comme le rapport des deux temps caractéristiques définis ci-dessus :

$$Pr = \frac{\tau_{th}}{\tau_v}$$

Exprimer ce nombre de Prandtl en fonction de la diffusivité thermique  $D_{th}$  et de la viscosité cinématique du fluide  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ .

Donner un ordre de grandeur des valeurs de  $\rho$  et  $c$  pour l'eau en précisant les unités utilisées. On donne aussi pour l'eau :  $\lambda = 0,6 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $\eta = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . En déduire une estimation de la valeur de  $Pr$  pour l'eau. Dans la suite on considérera des fluides à nombre de Prandtl élevé ( $Pr \gg 1$ ).

**58.** On note  $\rho_0$  la masse volumique du fluide étudié à la température  $T_0$ . On négligera, comme souvent pour les liquides, la variation de cette masse volumique avec la pression. Donner l'expression de la masse volumique  $\rho$  en fonction de la température  $T$  à l'aide de la masse volumique  $\rho_0$ , de  $T_0$  et du coefficient de dilatation isobare  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$  qu'on supposera indépendant de la température. Simplifier cette expression pour des températures  $T$  proches de  $T_0$  et montrer que

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0))$$

On appellera cette relation *équation d'état* du fluide.

**59.** On considère ici une particule fluide sphérique de rayon  $r \ll a$ . Initialement à l'équilibre à la cote  $y$  entre les deux plaques aux températures  $T_0$  pour celle du haut et  $T_0 + \Delta T$  pour celle du bas, on suppose qu'une infime fluctuation lui communique, à l'instant  $t$ , une vitesse verticale  $v$  positive vers le haut. À l'instant  $t + \delta t$ , pour des nombres de Prandtl élevés, sa température n'a pas eu le temps de varier, cette particule fluide se trouve alors dans un environnement plus froid et donc plus dense à  $y + \delta y = y + v\delta t$  et au repos. On note alors la température et la masse volumique du fluide environnant à l'équilibre :

$$T(y + \delta y) = T(y) + \delta T \quad \text{et} \quad \rho(y + \delta y) = \rho(y) + \delta \rho$$

En considérant la couche de fluide entre les deux plaques à l'équilibre, exprimer  $\delta T$  en fonction de  $\Delta T$ ,  $a$  et  $\delta y$  puis  $\delta \rho$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\rho_0$  et  $\delta T$ .

**60.** Donner une expression de la force dite de *flottabilité* de la particule fluide somme de son poids et de la poussée d'Archimède qu'elle subit à l'instant  $t + \delta t$ . On exprimera cette force sous la forme  $\vec{F}_B = F_B \vec{e}_y$  où  $F_B$  sera donné en fonction de  $r$ ,  $g$  et  $\delta\rho$ ,  $\vec{e}_y$  étant le vecteur unitaire orientant l'axe  $Oy$ . Montrer que cette force tend à entretenir le mouvement ascendant de la particule fluide.

On propose alors d'étudier dans la suite si cette fluctuation de vitesse s'amplifie ou s'atténue pour savoir si l'instabilité peut se développer ou non.

**61.** La particule se déplace et est alors soumise à une force de frottement visqueux qui s'exprime selon le formule de Stokes :  $\vec{F}_v = -6\pi\eta r \vec{v} = -F_v \vec{e}_y$  où  $\vec{v}$  est sa vitesse. Donner, une expression de la vitesse  $v$  atteinte par la particule fluide en régime permanent c'est à dire quand les deux forces précédentes s'équilibrent. On pourra exprimer cette vitesse en fonction de  $\alpha$ ,  $g$ ,  $\rho_0$ ,  $r$ ,  $\delta T$  et  $\eta$ . En déduire l'expression du temps caractéristique de déplacement de la particule sur la distance  $\delta y$ . On notera  $\tau_d$  ce temps et on l'exprimera en fonction de  $\alpha$ ,  $g$ ,  $\rho_0$ ,  $r$ ,  $\Delta T$ ,  $a$  et  $\eta$ .

**62.** Soit  $\tau'_{th}$  le temps caractéristique de diffusion thermique sur une taille caractéristique  $r$ . Proposer alors une inégalité que doivent vérifier  $\tau_d$  et  $\tau'_{th}$  pour que l'instabilité puisse s'établir dans la couche de fluide. En déduire alors une inégalité vérifiée par  $r$ ,  $a$ ,  $\alpha$ ,  $g$ ,  $\rho_0$ ,  $\Delta T$ ,  $\eta$  et  $D_{th}$ .

**63.** On considère que toute la couche de fluide est déstabilisée quand l'inégalité précédente est vérifiée pour tout  $r \leq \frac{a}{2}$ . En déduire que l'instabilité de Rayleigh-Bénard est établie dans la couche de fluide quand

$$Ra = \frac{\alpha g a^3 \Delta T}{\nu D_{th}} > Ra_c$$

avec  $\nu \simeq \frac{\eta}{\rho_0}$ .

On pourra donner la valeur numérique obtenue de  $Ra_c$  sachant qu'elle est erronée du fait du caractère simpliste du modèle (mouvement unidimensionnel notamment). Un calcul complet fournit, avec ces conditions aux limites,  $Ra_c = 1708$ .

Dans les questions qui suivent on propose d'obtenir une valeur de  $Ra_c$  à partir des équations de la mécanique des fluides appliquées au problème du fluide placé entre deux plaques fixes parallèles et horizontales maintenues aux températures  $T_0 + \Delta T$  selon le schéma déjà vu où on ne tient pas compte de dimensions finies en  $x$  et  $z$ . On note, que le fluide soit à l'équilibre ou non,  $p_0$  la pression du fluide en  $y = a$ , c'est à dire au niveau de la plaque supérieure où la température du fluide est  $T_0$  et sa masse volumique  $\rho_0$ . On note  $\vec{v}$  la vitesse en un point du fluide,  $p$  sa pression,  $T$  sa température et  $\rho$  sa masse volumique. L'équation d'état du fluide obtenue à la question **58**. reste bien entendu valable.

**64.** On considère l'écoulement incompressible, rappeler l'équation que vérifie alors  $\vec{v}$ .

**65.** Écrire l'équation de Navier-Stokes pour le fluide soumis aux forces de pesanteur, aux forces pressantes et aux forces visqueuses en y faisant figurer  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide.

**66.** On admet que l'équation dite « de la chaleur », vérifiée par la température  $T$  dans le fluide en mouvement, s'écrit, en supposant qu'il n'y pas de sources de chaleur dans le milieu

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) T \right) = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Interpréter chacun des termes de l'équation précédente.

On se place dans la suite dans le cadre de l'approximation dite de Boussinesq qui consiste à considérer que la viscosité cinématique  $\nu$ , la diffusivité thermique du fluide  $D_{th}$  et son coefficient de dilatation isobare  $\alpha$  sont

indépendants de la température mais que sa masse volumique en dépend selon l'équation d'état du fluide déjà vue.

**67.** En l'absence de convection, pour un fluide au repos  $\vec{v} = \vec{0}$ , on a obtenu à la question **55.** la loi donnant la température dans le fluide en fonction de  $y$ . En déduire la loi donnant la masse volumique à l'équilibre du fluide  $\rho_{\text{eq}}(y)$  en fonction de  $\rho_0$ ,  $\alpha$ ,  $\Delta T$ ,  $a$  et  $y$ . On considérera ici aussi que  $\Delta T \ll T_0$ .

**68.** De l'équation de Navier-Stokes, déduire la loi donnant la pression à l'équilibre du fluide  $p_{\text{eq}}(y)$ , en fonction de  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $\Delta T$  et  $y$ .

**69.** Quand la convection apparaît, on note  $\vec{v}$  la vitesse du fluide. On écrit aussi sa température  $T = T_{\text{eq}}(y) + \theta$  et sa pression  $p = p_{\text{eq}}(y) + \Pi$  en un point de coordonnées  $(x, y, z)$ . Les termes  $\vec{v}$ ,  $\theta$  et  $\Pi$  sont donc des termes correctifs à la situation d'équilibre dont on doit tenir compte en présence de convection. Montrer que  $\vec{v}$ ,  $\theta$  et  $\Pi$  vérifient les équations :

$$\begin{cases} \text{div } \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \theta = \frac{\Delta T}{a} \vec{v} \cdot \vec{e}_y + D_{\text{th}} \Delta \theta \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \frac{\rho_0}{\rho} \alpha \theta g \vec{e}_y - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} \Pi + \nu \Delta \vec{v} \end{cases}$$

**70.** On s'intéresse maintenant à la situation du déclenchement de l'instabilité. Les termes correctifs  $\vec{v}$ ,  $\theta$  et  $\Pi$  sont des termes petits d'ordre 1. Donner alors les trois équations linéarisées correspondant aux trois équations précédentes dans lesquelles on ne gardera que les termes d'ordre 1. On remarquera que dans ce cas on pourra aussi considérer que  $\rho_0 \simeq \rho$ .

En cherchant à travailler avec des équations adimensionnées on définit les variables sans dimension suivantes :

- pour l'espace  $x_1 = \frac{x}{a}$ ,  $y_1 = \frac{y}{a}$  et  $z_1 = \frac{z}{a}$  ;
- pour le temps  $t_1 = t \frac{D_{\text{th}}}{a^2}$  ;
- pour la vitesse  $\vec{v}_1 = \frac{a}{D_{\text{th}}} \vec{v}$  ;
- pour la température  $\theta_1 = \theta \frac{\alpha g a^3}{\nu D_{\text{th}}} = \theta \frac{\text{Ra}}{\Delta T}$  ;
- pour la pression  $\Pi_1 = \Pi \frac{a^2}{\rho_0 \nu D_{\text{th}}}$ .

Le système des trois équations obtenues à la question précédente s'écrit avec les variables sans dimension sous la forme :

$$\begin{cases} \text{div } \vec{v}_1 = 0 \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial t_1} = \text{Ra } \vec{v}_1 \cdot \vec{e}_y + \Delta \theta_1 \\ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t_1} = \theta_1 \vec{e}_y - \overrightarrow{\text{grad}} \Pi_1 + \Delta \vec{v}_1 \end{cases}$$

où les opérateurs  $\overrightarrow{\text{grad}}$ ,  $\text{div}$  et  $\Delta$  sont calculés avec les variables d'espace adimensionnées. En coordonnées cartésiennes, on peut utiliser l'opérateur  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y_1} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z_1} \vec{e}_z$  de sorte que

$$\text{div } \vec{v}_1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{grad}} \Pi_1 = \vec{\nabla} \Pi_1$$

Conformément aux observations expérimentales, on cherche des solutions sous forme de rouleaux d'axes parallèles à la direction  $Oz$  en considérant le problème invariant selon cette direction  $z$ . On cherche alors des

solutions de la forme :

$$\vec{v}_1 = u(x_1, y_1, t_1) \vec{e}_x + w(x_1, y_1, t_1) \vec{e}_y \quad ; \quad \theta_1 = \theta_1(x_1, y_1, t_1) \quad \text{et} \quad \Pi_1 = \Pi_1(x_1, y_1, t_1)$$

**71.** Réécrire le système d'équations précédent en projetant la dernière équation selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  pour obtenir un système de quatre équations scalaires.

**72.** Qu'imposent les conditions aux limites, en tout  $x_1$  et à tout  $t_1$ , pour  $w(x_1, 0, t_1)$ ,  $w(x_1, 1, t_1)$ ,  $\theta_1(x_1, 0, t_1)$  et  $\theta_1(x_1, 1, t_1)$  ?

On impose de plus, pour tout  $x_1$  et tout  $t_1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y_1}(x_1, 0, t_1) = \frac{\partial u}{\partial y_1}(x_1, 1, t_1) = 0$ , conditions aux limites dites *libre-libre*. Que néglige-t-on en imposant ces conditions aux limites ?

**73.** À partir des conditions aux limites précédentes et considérant que la fluctuation  $\theta_1$  est liée à la fluctuation de vitesses, on cherche, pour  $u(x_1, y_1, t_1)$ ,  $w(x_1, y_1, t_1)$  et  $\theta_1(x_1, y_1, t_1)$  des solutions de la forme

$$\begin{cases} u(x_1, y_1, t_1) = u_0 \sin(kx_1) \cos(n\pi y_1) e^{\beta t_1} \\ w(x_1, y_1, t_1) = w_0 \cos(kx_1) \sin(n\pi y_1) e^{\beta t_1} \\ \theta_1(x_1, y_1, t_1) = \theta_0 \cos(kx_1) \sin(n\pi y_1) e^{\beta t_1} \end{cases}$$

où  $n$  est un entier et  $\beta$  un nombre complexe.

Que représente le nombre  $n$  dans le cadre de ce modèle de rouleaux. Que quantifie aussi le nombre  $k$  ? Enfin à quelle condition sur  $\beta$ , l'instabilité de Rayleigh-Bénard peut-elle apparaître dans le cadre de cette modélisation ?

**74.** En éliminant les termes relatifs à la perturbation de pression  $\Pi_1$  dans les équations obtenues à la question **71.**, obtenir un système de trois équations linéaires à trois inconnues  $u_0$ ,  $w_0$  et  $\theta_0$  dont les coefficients dépendent de  $\text{Pr}$ ,  $\text{Ra}$ ,  $\beta$ ,  $k$  et  $n\pi$ .

**75.** En éliminant  $u_0$  entre ces trois équations, réduire ce système à un système de deux équations à deux inconnues et en déduire une relation entre  $\text{Pr}$ ,  $\text{Ra}$ ,  $n\pi$ ,  $k$  et  $\beta$ .

**76.** Montrer alors que l'instabilité se développe si

$$\text{Ra} > \frac{(n^2\pi^2 + k^2)^3}{k^2}$$

**77.** Sachant qu'au démarrage de l'instabilité les rouleaux qui apparaissent occupent toute la hauteur  $a$  de l'intervalle entre les deux plaques horizontales, en déduire la valeur minimale  $\text{Ra}_c$  de  $\text{Ra}$  pour observer l'instabilité et la taille, selon la direction  $x$ , de ces rouleaux qu'on exprimera en fonction de  $a$ .

• • • • •





