

EAE PHP 1

SESSION 2021

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : PHYSIQUE**

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1500A	101	0385

Composition de physique

La forme de la Terre

Cette composition traite des différents modèles géométriques donnés à la Terre au cours de l'histoire.

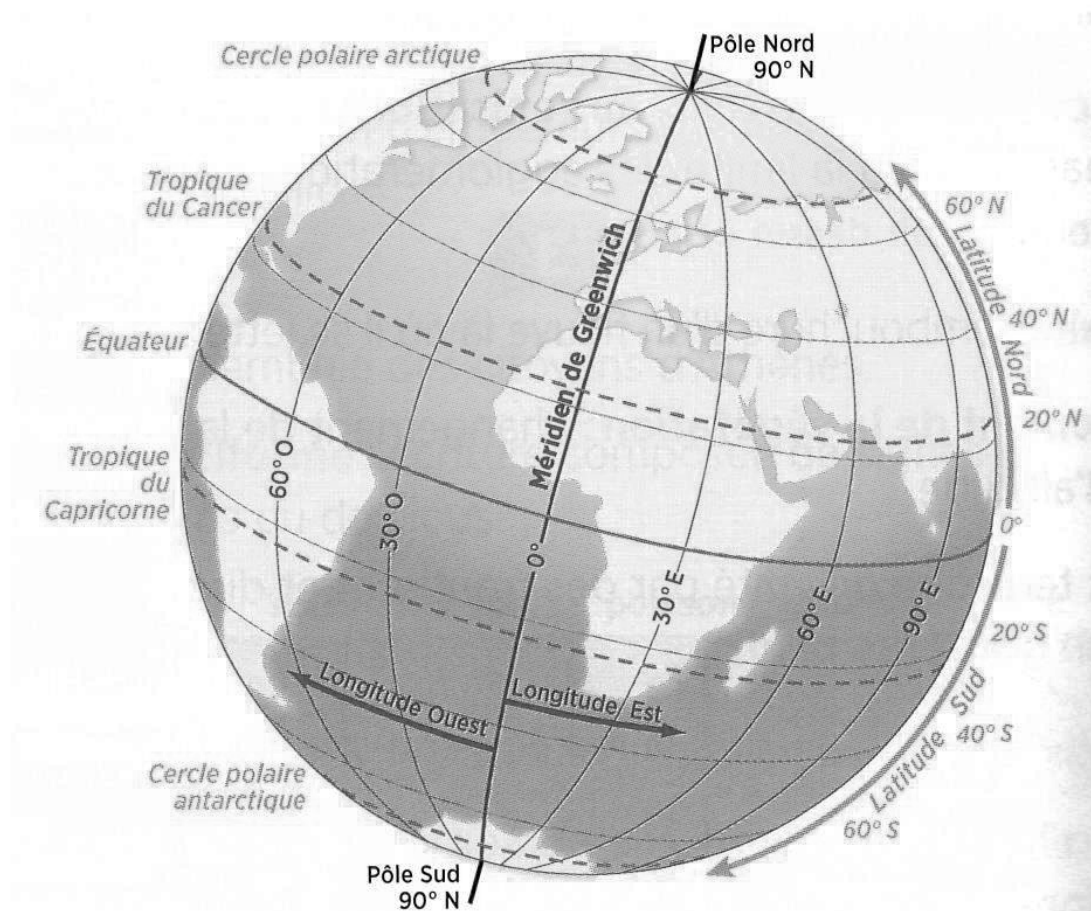


FIGURE 1 – La Terre sphérique utilisée traditionnellement par les géographes et quelques unes de ses caractéristiques (source : <https://lewebpedagogique.com/prof84700/lignes-imaginaires/lignes-imaginaires-2/>).

Données :

- vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$;
- charge élémentaire $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$;
- masse de l'électron $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$;
- constante de gravitation $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$;
- masse de la Terre : $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$;
- rayon moyen de la Terre : $R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$;
- période de rotation de la Terre (jour sidéral) : $T_T = 86,2 \times 10^3 \text{ s}$.

La divergence d'un vecteur $\vec{A}$ dans les coordonnées cylindriques (r, θ, z) est :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r A_z)}{\partial z} \right)$$

et son rotationnel :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(A_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial(A_r)}{\partial z} - \frac{\partial(A_z)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

I - Vision d'une Terre sphérique

I.A - Platon et la Terre sphérique

La tradition attribue à Platon (v. 428 – 348 av. J.-C.) la preuve de la sphéricité de la Terre à partir de deux indices : la forme des éclipses de Lune qui montre que l'ombre projetée de la Terre est toujours circulaire et le changement dans la configuration des cieux étoilés (hauteur des étoiles sur l'horizon) lors des déplacements en latitude qui s'expliquent par la courbure de la Terre faisant obstacle à une vision complète du ciel.

- 1) Expliquer un des deux arguments de Platon pour prouver la sphéricité de la Terre par une phrase ou deux et un schéma.

NB : cette question est qualitative, elle ne demande aucun calcul.

I.B - Strabon et la courbure de Terre

Un raisonnement prêté à Strabon (v. 58 av. J.C. – 23 apr. J.-C.) donne un nouvel argument à la sphéricité de la Terre : lorsqu'un bateau s'éloigne d'un port, sa coque, progressivement masquée par l'horizon, disparaît avant son mât.

- 2) Dans le cas où la sphéricité de la Terre est établie, estimer les distances maximales pour lesquelles la coque d'un bateau (d_1) et son mât (d_2) sont visibles à l'œil nu par un observateur debout sur la plage par temps permettant une bonne visibilité.

NB : cette question demande de la prise d'initiative, à la manière des « résolutions de problème ».

Il sera tenu compte des hypothèses, de la démarche, et de l'analyse du résultat.

I.C - Ératosthène et la mesure du rayon de la Terre

Ératosthène (v. 276 – 194 av. J.-C.) propose une mesure du rayon de la Terre supposée sphérique. Sa méthode est la suivante. Au solstice d'été à Syène (actuelle Assouan, Égypte), à midi, le Soleil éclaire le fond d'un puits (les rayons du Soleil sont alors verticaux). À Alexandrie (sur la côte égyptienne), le même jour à la même heure, un obélisque (vertical) projette une ombre qui permet de mesurer l'angle $\alpha = 7^\circ 12'$ que font les rayons du Soleil avec la verticale. Ératosthène considère que Syène est au sud d'Alexandrie, sur le même méridien, et il mesure la distance Syène-Alexandrie, qui vaut 5000 stades, un stade égyptien mesurant 157,5 m.

- 3) Estimer le rayon de la Terre (assimilée à une sphère) grâce à la méthode d'Ératosthène.

NB : cette question demande une réponse rédigée à la manière de la solution présentée devant une classe. Il sera tenu compte principalement de la rigueur et de la clarté, notamment dans l'énoncé des hypothèses physiques impliquées dans le raisonnement.

Discuter de la précision de la méthode.

Proposer une explication alternative de ces observations dans laquelle la Terre est plate.

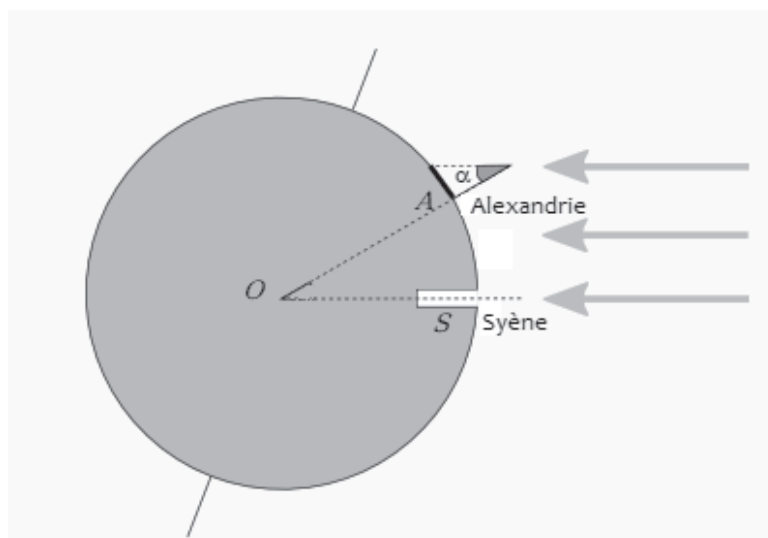


FIGURE 2 – Schéma de la Terre sphérique (en coupe) avec Alexandrie et Syène éclairées par des rayons lumineux venus du Soleil au solstice d'été.

II - Attraction gravitationnelle de la Terre et poids

II.A - Champ gravitationnel créé par une Terre sphérique homogène

On s'intéresse à deux particules A et B en interaction. On note le vecteur unitaire $\vec{u}_{A \rightarrow B} = \frac{\vec{AB}}{AB}$.

4) Le tableau suivant présente l'analogie entre l'électrostatique et la gravitation. Donner l'expression de la force $\vec{F}_{gA \rightarrow B}$, du champ $\vec{A}$ et de la constante qui manquent dans ce tableau.

	électrostatique	gravitation
caractéristiques des particules	charges q_A et q_B	masses m_A et m_B
force entre les deux particules	$\vec{F}_{eA \rightarrow B} = + \frac{q_A q_B}{4\pi \epsilon_0 AB^2} \vec{u}_{A \rightarrow B}$	$\vec{F}_{gA \rightarrow B} =$
champ créé par la particule A	électrostatique $\vec{E} = \frac{\vec{F}_{eA \rightarrow B}}{q_B}$	gravitationnel $\vec{A} = \frac{\vec{F}_{gA \rightarrow B}}{m_B} =$
constante	ϵ_0	

5) Rappeler le théorème de Gauss en électrostatique et, grâce au tableau précédent, énoncer un théorème analogue pour la gravitation. Appliquer ce théorème dans le cas d'une Terre sphérique de centre O , de rayon R_T , de masse volumique homogène μ pour déterminer le champ gravitationnel créé par la Terre à une distance r de O , dans les deux cas suivants : $r < R_T$ et $r > R_T$.

II.B - Non uniformité du poids à la surface de la Terre

6) Donner, en un endroit M de la surface de la Terre (supposée sphérique), les caractéristiques des forces suivantes exercées sur un point matériel de masse m :

- la force d'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre (supposée sphérique et homogène) ;
- la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre sur elle-même, pour un observateur dans le référentiel terrestre ;
- le poids.

On représentera (sans soucis d'échelle) les trois vecteurs forces en M sur un schéma.

7) Exprimer le champ de pesanteur $g(\lambda)$ en un point de la Terre (supposée sphérique), de latitude λ . En déduire qualitativement les variations de la pesanteur à la surface de la Terre avec la latitude, en s'appuyant sur des schémas.

II.C - Mesures de Richer

Jean Richer (1630 – 1696) ajuste (grâce à des phénomènes astronomiques) la longueur ℓ d'un pendule simple de façon qu'il batte la seconde, c'est-à-dire qu'il passe par sa position d'équilibre chaque seconde (sa période est alors deux secondes). Il observe que la longueur du pendule n'est pas la même à Cayenne (en Guyane, de latitude $\lambda_C = 4^\circ 57'$, où $\ell = \ell_C = 99,1$ cm) et à Paris (de latitude $\lambda_P = 48^\circ 58'$, où $\ell = \ell_P = 99,4$ cm).

8) Rappeler les hypothèses qui fondent le modèle du pendule simple. Déterminer l'équation différentielle caractérisant les oscillations de ce pendule simple. En déduire, sous une condition qu'on précisera, l'expression de la période T du pendule simple en fonction de ℓ et de la pesanteur locale g .

9) En supposant que la longueur du pendule est déterminée avec une précision d'un demi-millimètre et que la période du pendule est déterminé au centième de seconde, dire si les mesures de Richer sont en accord avec le modèle présenté question 7.

III - Vision d'une Terre ellipsoïdale

III.A - Hypothèse de Huygens

Huygens (1629 – 1695) pense que du fait de sa rotation, la Terre prend une forme ellipsoïdale. En assimilant la Terre à un fluide, il suppose que sa surface est, en chacun de ses points, perpendiculaire à la direction de la pesanteur.

10) Montrer que la surface libre d'un fluide au repos est orthogonale à la direction de la pesanteur.

11) Schématiser la surface de la Terre par une forme ellipsoïdale puis tracer, à un des pôles, à l'équateur puis à une latitude intermédiaire le vecteur champ de pesanteur. Expliquer si, selon Huygens, la Terre est aplatie aux pôles ou bien à l'équateur.

III.B - Raisonnement (simplifié) de Newton

Newton (1642 – 1727) aussi pense que du fait de sa rotation avec le vecteur rotation $\vec{\Omega}_T = \omega_T \vec{u}_z$, la Terre prend une forme ellipsoïdale (on note son rayon polaire c , son rayon équatorial a , et l'aplatissement $\varepsilon = \frac{a-c}{a}$). Il considère deux « canaux », remplis d'un même fluide incompressible, partant l'un du pôle et l'autre de l'équateur et se rejoignant au centre de la Terre O .

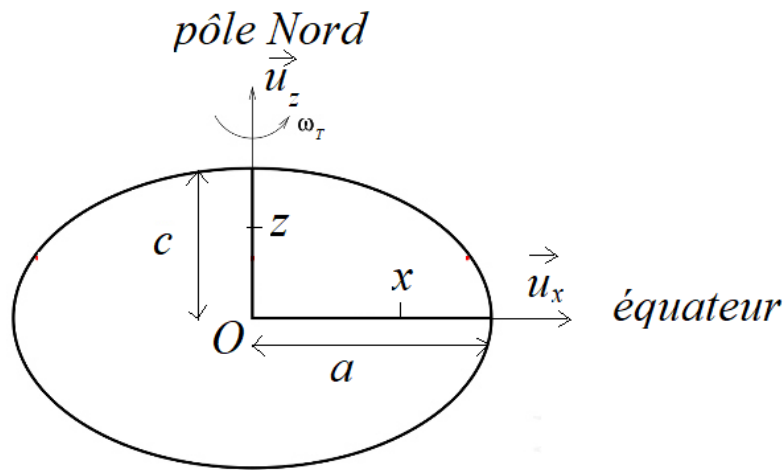


FIGURE 3 – Deux canaux partant l'un du pôle et l'autre de l'équateur et se rejoignant au centre de la Terre.

On admet que, conformément au calcul du champ gravitationnel dans la Terre homogène (de masse volumique μ), ce dernier s'écrit :

- le long de l'axe x (équatorial) : $A_{\text{axe-éq}} = \frac{4\pi\mathcal{G}\mu a}{3} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{5}\right) \frac{x}{a}$,
- le long de l'axe z (polaire) : $A_{\text{axe-pôles}} = \frac{4\pi\mathcal{G}\mu a}{3} \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}\right) \frac{z}{c}$.

12) En prenant en compte la rotation de la Terre sur elle-même, calculer la pression au centre de la Terre de deux façons différentes : en utilisant le canal équatorial d'une part et d'autre part le canal polaire. En déduire la valeur de l'aplatissement ε au premier ordre d'approximation.

On sait aujourd'hui que l'aplatissement est 1/298.

13) Commenter.

IV - Définition du géoïde

Le géoïde est la surface choisie comme référence de l'altitude nulle, qui coïncide avec le niveau moyen des océans (en ignorant les phénomènes de vagues, courants et marées).

IV.A - Couverture du satellite Jason

Depuis le début des années 1990, les satellites altimétriques permettent les mesures des variations spatiales et temporelles de la surface des océans. Le satellite Jason-2, lancé en juin 2008, est le fruit d'une collaboration entre la France et les États-Unis. Les caractéristiques de son mouvement sont choisies de façon à optimiser la répétition des mesures sur la plus grande partie possible de la surface du globe :

- orbite : circulaire;
- plan du mouvement : incliné de 66 degrés par rapport au plan équatorial;
- altitude : $h_s = 1339$ km;
- période de révolution dans le référentiel géocentrique : $T_s = 6745$ s.

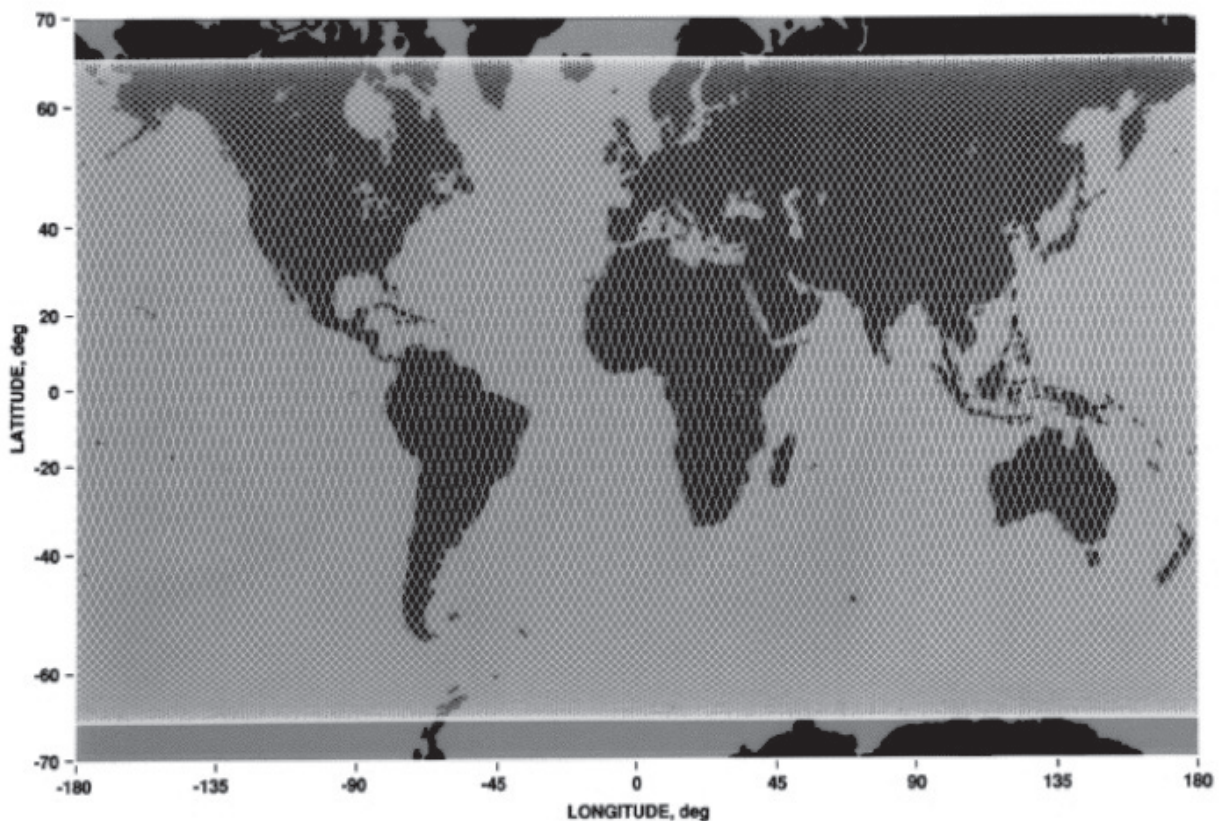


FIGURE 4 – Traces au sol du satellite Jason-2 tous les 10 jours. Source : http://www.aviso.oceanobs.com/fileadmin/documents/data/tools/hdbk_j2.pdf.

14) Dans l'hypothèse où la Terre a une distribution de masse à symétrie sphérique, démontrer que le mouvement du satellite est bien situé dans un plan. Vérifier que les valeurs numériques de T_s et h_s sont bien cohérentes. *On attend une démonstration complète, qui pourrait être présentée à des étudiants et qui démarre des principes fondamentaux de la mécanique.*

15) Montrer que le satellite repasse à la verticale du même point au sol au bout d'un cycle de 128 tours, soit quasiment 10 jours. Estimer la distance entre deux traces successives du satellite au sol, à l'équateur. En déduire l'espacement des points de l'équateur que le satellite Jason survole à la verticale.

IV.B - Principe de l'altimétrie radio

Le radar du satellite envoie une succession d'impulsions brèves et enregistre les signaux reçus en écho après réflexion des ondes incidentes sur la surface de la mer. On trouve à l'adresse <https://planet-terre.ens-lyon.fr/article/CSP-Jason-mesure-niveau-ocean.xml#principe> les caractéristiques suivantes du radar altimétrique de Jason-2 :

- fréquence de l'émission radar : $f = 13,6$ GHz (bande Ku) ;
- durée des impulsions : $\tau = 3$ ns ;
- diamètre de l'antenne émettrice : $d = 1,20$ m ;
- ouverture angulaire de l'onde émise : $\theta = 1,28^\circ$.

16) Présenter le phénomène de diffraction et ses principales caractéristiques.

Cette partie de la question attend une réponse ne devant pas dépasser plus d'une demi-page.

En se servant des précédentes caractéristiques du signal, estimer la valeur numérique de la durée t de parcours de l'onde réfléchie sur la surface de la mer entre son émission et sa réception. Justifier la valeur de l'ouverture angulaire de l'onde émise donnée précédemment.

Sur la figure suivante, les différentes courbes représentent l'intensité de l'écho des impulsions radar pour un échantillonnage temporel avec un pas de 3,25 ns : chaque écho est échantillonné sur 128 points, aussi la fenêtre temporelle d'écoute du radar est-elle d'une durée totale de $128 \times 3,25$ ns.

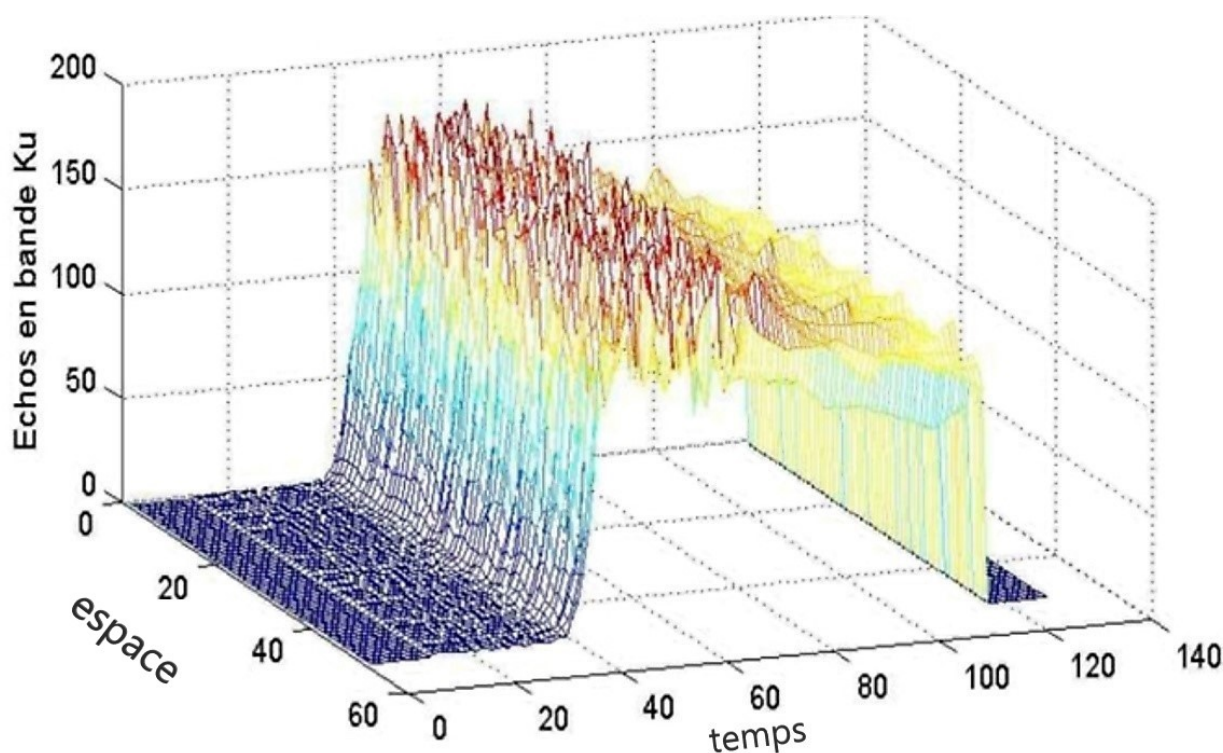


FIGURE 5 – Intensité de l'écho des impulsions radar en fonction d'un échantillonnage temporel. Les unités des différents axes sont arbitraires, ainsi comme le pas temporel est de 3,25 ns, chaque écho étant échantillonné sur 128 points, la fenêtre temporelle d'écoute du radar est d'une durée totale de $128 \times 3,25$ ns. Source : <https://www.aviso.altimetry.fr/fr/accueil.html>.

17) Trouver une explication à l'élargissement des impulsions de retour et évaluer un ordre de grandeur de cet élargissement.

18) Calculer le retard provoqué sur l'écho par un creux de un mètre de profondeur dû à une vague. Commenter.

IV.C - Corrections dues à la propagation de l'onde radio dans l'atmosphère

La mesure de la hauteur du satellite sur l'océan doit être corrigée des faibles variations de la vitesse de propagation de l'onde radar en fonction de l'altitude à travers l'atmosphère. En effet l'indice de l'air dans la troposphère, voisin de 1,0003 au sol, dépend des conditions de pression et température, ainsi que de l'humidité : c'est le rôle du radiomètre AMR du satellite Jason-2 de mesurer le contenu en eau de l'atmosphère à la verticale de l'altimètre afin d'en déduire la correction de « troposphère humide ». Plus haut, dans l'ionosphère, l'indice est sensible à la présence des électrons libres.

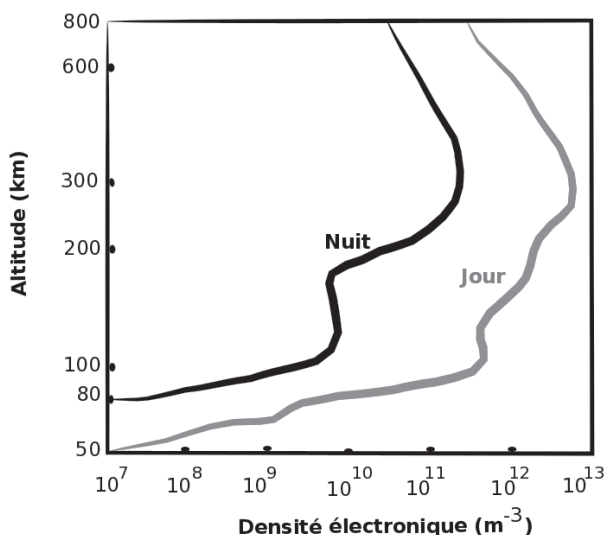


FIGURE 6 – Profil de densité électronique n_e typique dans l'ionosphère en un point du globe. Source : <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/GPS-2.xml>.

On assimile l'ionosphère à un plasma (cf. figure 6), c'est-à-dire un milieu ionisé, constitué d'ions positifs quasi-fixes et d'électrons de charge $-e$, de masse m_e , de densité n_e (qu'on considérera constante et uniforme), de vitesse $\vec{v}_e$ (non relativistes). Le plasma est neutre, peu dense, de sorte qu'on pourra négliger les interactions entre les particules chargées. Une onde électromagnétique de champ électrique complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j(\omega t - k z)} \vec{u}_x$ existe dans l'ionosphère ($\vec{u}_z$ est vertical et $\vec{u}_x$ horizontal).

19) Montrer que la conductivité complexe du plasma est $\gamma = j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$. On donnera l'expression de ω_p .

20) Montrer que la relation de dispersion peut s'écrire $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$. En déduire le signe de $\omega^2 - \omega_p^2$ dans le cas de solutions propagatives. *On attend une démonstration complète, qui pourrait être présentée à des étudiants et qui s'appuie sur les principes fondamentaux de l'électromagnétisme. Rappeler ces principes fondamentaux en une demi-page maximum.*

21) Exprimer la vitesse de phase v_φ en fonction de c , ω_p et ω . Préciser si la ionosphère est un milieu dispersif pour les ondes électromagnétiques. Exprimer la vitesse de groupe v_g en fonction de c , ω_p et ω . Vérifier que, par rapport au vide, la ionosphère ralentit la propagation du message radio.

On suppose que le signal traverse une épaisseur ℓ d'ionosphère avec la densité électronique n_e (uniforme et constante).

22) Montrer que la durée totale de parcours de l'onde réfléchiée sur la surface de la mer entre son émission et sa réception par le satellite peut s'écrire $t' = t + \Delta t$ avec le « délai ionosphérique » Δt qu'on exprimera.

23) A l'aide de la figure 6 estimer un ordre de grandeur de la valeur numérique de pulsation plasma. Conclure sur la possibilité des mesures de jour et de nuit.

V - Gravimétrie

La gravimétrie est la mesure et l'étude du champ de pesanteur à la surface de la Terre dont l'unité de mesure dans le système international est le $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Une autre unité est utilisée, le mGal ($1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). Les meilleures précisions obtenues sont aujourd'hui d'environ $5 \mu\text{Gal}$.

V.A - Principe d'un gravimètre absolu interférométrique

Le principe d'un gravimètre absolu est le suivant : un miroir d'un dispositif interférométrique est en chute libre dans le champ de pesanteur ; le signal lumineux (délivré par un laser) résultant des interférences est enregistré au cours du temps (la mesure de la date étant effectuée grâce à une horloge atomique) par une photodiode ; l'analyse de l'interférogramme permet d'obtenir une mesure de g .

24) Expliquer quel est l'intérêt de choisir un laser plutôt qu'une autre source lumineuse, une photodiode plutôt qu'un autre photorécepteur, une horloge atomique plutôt qu'un autre type d'horloge. Cette question de culture attend une réponse succincte et très peu de texte, le tout ne devant pas dépasser une demi-page.

On suppose que l'interféromètre utilisé est celui de Michelson et qu'il est éclairé par un LASER monochromatique (de longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$), délivrant un faisceau lumineux de rayons parallèles à l'axe OX (cf. figure 7).

O se trouve sur la séparatrice (Sp) supposée infiniment mince (qui elle-même fait un angle de 45° avec OX et OZ).

O_1 qui se trouve sur l'axe OX et sur le miroir (M_1) (qui lui-même est orthogonal à OX) est tel que $\ell_1 = OO_1$. O_2 qui se trouve sur l'axe OZ et sur le miroir (M_2) (qui lui-même est orthogonal à OZ) est tel que $\ell_2 = OO_2$. Cette dernière longueur est variable, car (M_2) est relié à un mobile (S) en translation selon OZ . On note $e = \ell_2 - \ell_1$.

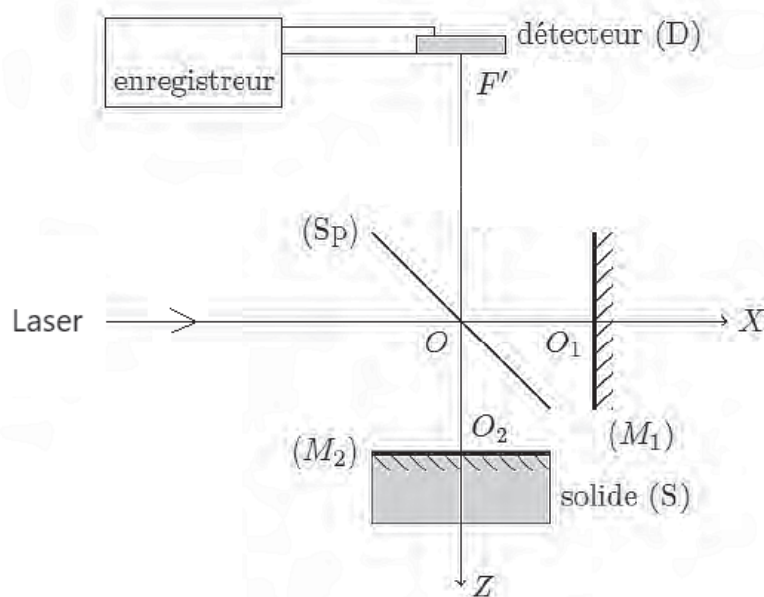


FIGURE 7 – Interféromètre de Michelson.

25) Donner l'expression de l'intensité lumineuse E reçue au point F' où le faisceau arrive sur le détecteur en fonction de e . Exprimer sa période en fonction de l'épaisseur e .

Le miroir (M_2) est lâché sans vitesse initiale et tombe sous l'effet de son poids dans le vide : on néglige tout frottement. À l'instant initial, $\ell_1 = \ell_2$. On enregistre les variations de l'intensité lumineuse $E(t)$ en F' au cours du temps (cf. figure 8).

26) Déterminer l'expression de $E(t)$. À l'aide de la figure 8, donner une valeur numérique de g en estimant son incertitude.

On attend une réponse détaillée qui expliquera la méthode utilisée, à la façon d'un « compte-rendu de travaux pratiques ».

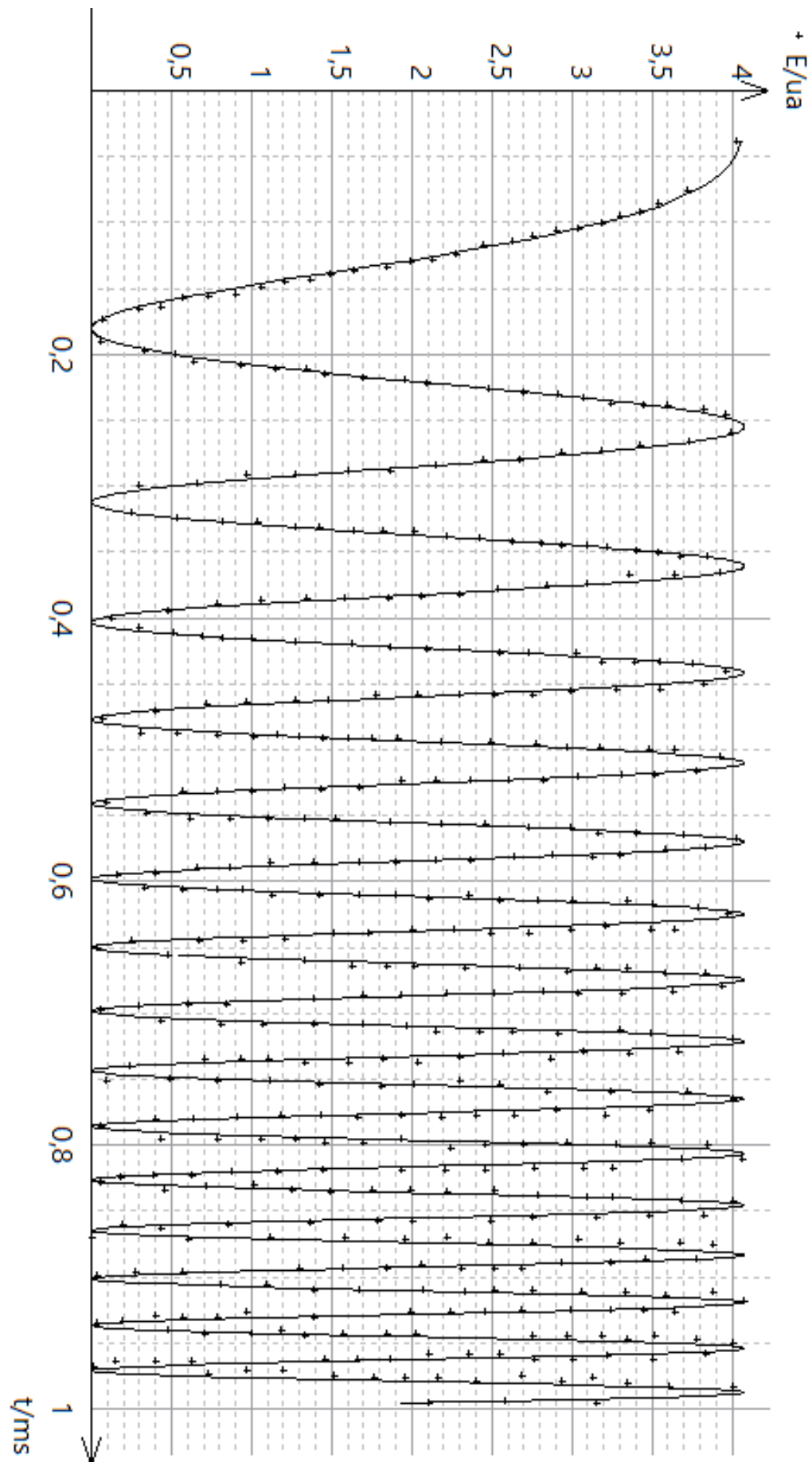


FIGURE 8 – Interférogramme $E(t)$.

V.B - Anomalies gravimétriques

Bouguer (1698–1758) prend en compte trois corrections dans la détermination du champ de pesanteur en un point : la latitude, l'altitude, et les perturbations dues aux masses locales (reliefs entourant le point de mesure). Ces corrections effectuées, on est ramené à une valeur attendue dans le cadre du modèle de l'ellipsoïde de référence choisi. Tout écart à ce modèle (appelé anomalie) apporte une information sur la composition de la Terre. En particulier, les anomalies locales sont des indicateurs de la présence éventuelle de matériaux (eau, pétrole, gaz, sel, fer, or, platine...), très utiles dans le domaine de la prospection.

27) Dessiner l'allure des surfaces équipotentielles au voisinage de la surface de la Terre supposée homogène et sphérique. Puis, dessiner ces surfaces équipotentielles de manière qualitative si il existait une petite cavité sous la surface de la Terre et au voisinage de celle-ci.

On cherche à calculer l'effet gravimétrique d'une masse sphérique à une profondeur h_1 sous la surface (de rayon $R_c \ll R_T$). On appellera ρ_0 la masse volumique du milieu dans lequel la sphère se trouve, qu'on appelle l'encaissant, et ρ_1 celle de la sphère supposée pleine.

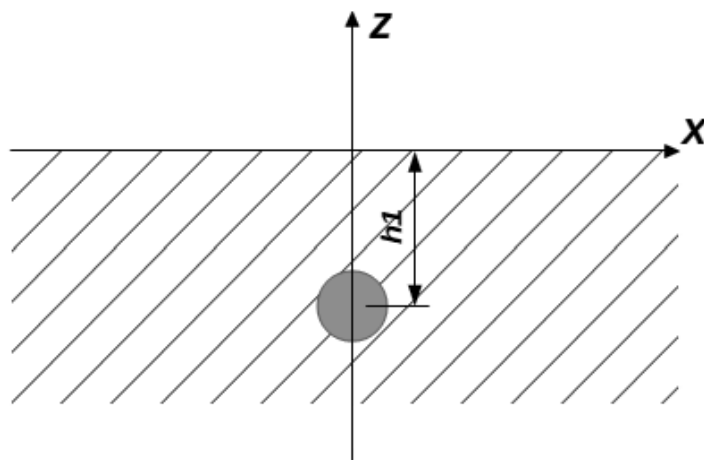


FIGURE 9 – Anomalie gravimétrique simple à symétrie sphérique au sein d'un milieu encaissant.

On appelle « anomalie gravimétrique par rapport à la situation de référence d'un encaissant homogène » la différence entre les champs de pesanteur en $z = 0$ que l'on obtiendrait avec et sans l'anomalie de densité considérée et représentée sur la figure 9.

28) Exprimer, en un point $M(x, 0, 0)$ de la surface, l'anomalie gravimétrique $\mathcal{A}(x)$ par rapport à la situation de référence d'un encaissant homogène en fonction de h_1 et de x . Discuter l'effet de cette anomalie sur la projection verticale du champ de pesanteur $\mathcal{A}_z(x) = \mathcal{A}(x) \cdot \vec{u}_z$ en déterminant sa valeur maximale et sa largeur à mi-hauteur.

On s'intéresse maintenant à un point M situé à une altitude $h = h_p \ll R_T$ au-dessus du niveau de référence ($z = 0$) et il n'y a plus d'anomalie de densité. On suppose que l'espace entre le niveau de référence et M est occupé par un plateau de masse volumique ρ_P , d'épaisseur h_P et dont les dimensions latérales, très grandes devant h_P , peuvent être considérées comme infinies. Il apparaît une anomalie par rapport au niveau de référence. Cette anomalie est constituée de la « correction de plateau » et de la « correction à l'air libre ».

29) Déterminer le champ de gravitation $g_P(M)$, créé par le plateau seul, en M . En déduire le champ de pesanteur local $g(M)$ et l'anomalie par rapport au niveau de référence. Identifier dans cette précédente expression ces deux corrections et expliquer leur signification. Calculer la valeur numérique de l'anomalie (en mGal) pour $h_P = 10^3$ m et $\rho_P = 2,8 \times 10^3$ kg·m⁻³ (masse volumique du granite) et dire si celle-ci est mesurable.

V.C - Principe d'un gravimètre relatif supraconducteur

Les gravimètres relatifs ne permettent pas d'avoir une valeur absolue de la pesanteur mais ils sont très sensibles à ses variations. Ainsi, on peut cartographier avec précision la différence de pesanteur par rapport à une valeur de référence. Dans le cas du gravimètre supraconducteur, une sphère supraconductrice refroidie par de l'hélium liquide lévite dans le champ magnétique créé par les courants permanents circulant à l'intérieur de bobines. Ces courants sont asservis de façon à ce que la sphère soit maintenue à une position fixe quel que soit le champ de pesanteur.

Une bobine circulaire de rayon a et d'axe Oz (orienté selon la verticale ascendante), de N spires parcourues par l'intensité I constante crée en un point Q quelconque situé au voisinage de l'axe Oz , repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) , crée le champ magnétique :

$$\vec{B}(Q) = N I \alpha(z) r \vec{u}_r + (N I f(z) + N I \beta(z) r^2) \vec{u}_z \quad \text{avec :}$$

$$\alpha(z) = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 a^2 z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \quad , \quad f(z) = \frac{\mu_0 a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \beta(z) = \frac{3}{8} \frac{\mu_0 a^2 (a^2 - 4z^2)}{(a^2 + z^2)^{7/2}}$$

L'énergie potentielle d'interaction entre le champ magnétique et la sphère de rayon R centrée en M est $E_p(M) = \frac{\pi R^3}{\mu_0} B^2(M)$. On étudie les mouvements de translation de la sphère dont le centre M reste sur l'axe Oz , avec $z > 0$.

30) Montrer que la force $\vec{F}(z)$ subie par la sphère de la part de la bobine se met sous la forme :

$$\vec{F}(z) = \gamma_0 \frac{z}{(a^2 + z^2)^4} I^2 \vec{u}_z \quad ,$$

où γ_0 est à exprimer en fonction de a , N , μ_0 et R .

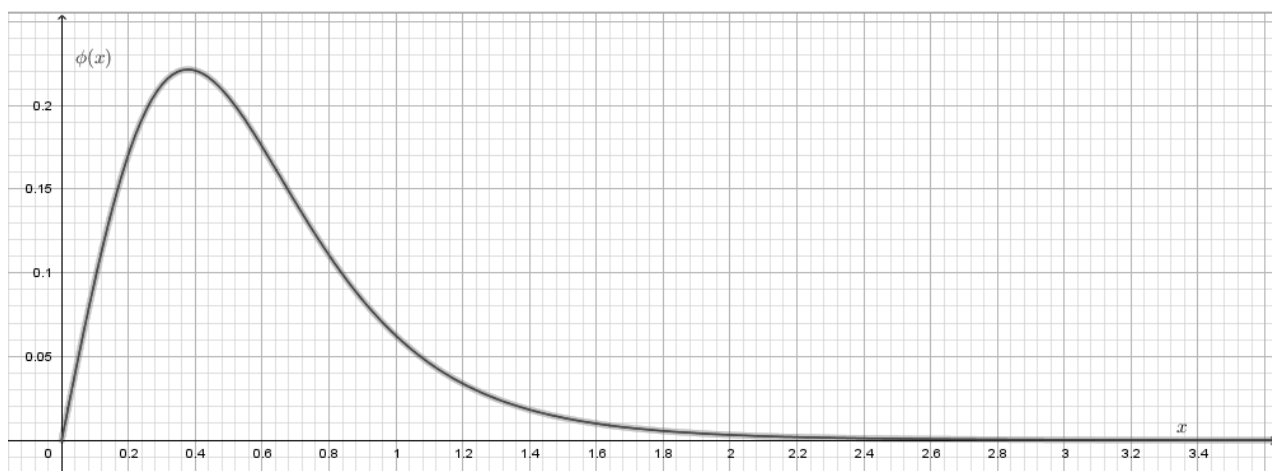


FIGURE 10 – Courbe de $\phi : x \mapsto \frac{x}{(1 + x^2)^4}$.

31) Montrer qu'il existe une intensité minimale I_M telle que, pour $I > I_M$, il existe deux positions d'équilibre z_1 et z_2 avec $z_1 < z_2$. Utiliser la courbe de la figure 10 pour déterminer z_1 et z_2 . Étudier la stabilité de ces deux positions d'équilibre vis à vis d'un petit déplacement selon l'axe Oz .

32) Analyser l'influence de la valeur de l'intensité assurant l'équilibre de la sphère sur l'incertitude de la mesure de g .