X/ENS Physique A PC 2018

question 0

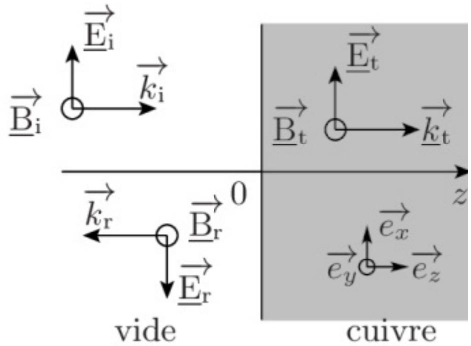
I. Exercice

$\boxed{0}$ Le faisceau issu d'un laser He-Ne étant monochromatique et ne divergeant très peu, on le modélise à l'aide d'une onde plane progressive monochroma (OPPH) dans le domaine optique. Sa longueur d'onde est dans le rouge, si bien l'on prend $\lambda \approx 600$ nm, soit $\omega = 2\pi c/\lambda = 3.10^{15}$ rad.s^{-1}.

Le cuivre étant un très bon conducteur, on le décrit dans le cadre du modè Drude-Lorentz où le métal est considéré comme un plasma neutre dans lequel les électrons sont mobiles.

Combinons ces deux modèles afin de calculer le coefficient de réflexion d'un r issu du laser He-Ne sur le cuivre. Dans un premier temps on exprime le coeffi de réflexion de l'OPPH en fonction du vecteur d'onde incident et du vecteur d' de l'onde transmise dans le cuivre. Dans un second temps on exprime ce coeffi de réflexion en fonction de ω en s'appuyant sur la relation de dispersion d'une plane dans un plasma neutre.

On cherche les solutions des équations de Maxwell sous forme d'OPPH. Le vide occupe le demi-espace $z < 0$ tandis que que le bloc métallique occupe le demi-espace $z > 0$ comme le montre la figure ci-contre.



Dans le vide le vecteur d'onde de l'OPPH est $\vec{k_i}$ (Par la suite, toutes les quan relatives à l'onde incidente sont repérées par l'indice i). Posons que le champ électr est orienté suivant $\vec{e_x}$:

$$\underline{\vec{E}_i} = \underline{E}_{i0}\, e^{\,i(\omega t - k_i z)}\, \vec{e_x}$$

où $i^2 = -1$. On désigne respectivement par $\underline{\vec{E}_r}$, $\underline{\vec{E}_t}$, $\underline{\vec{B}_r}$ et $\underline{\vec{B}_t}$ les champs électrique ondes réfléchie et transmise, ainsi que les champs magnétiques réfléchi et tran Introduisons une première hypothèse :

Hypothèse 1 : le cuivre se comporte comme un milieu linéaire, homogène et isot pour l'onde incidente considérée. On considère en outre qu'il est non magnétiq

Ici cela se traduit par le fait que le vecteur densité de courant obéit à l

d'Ohm $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}$, où $\underline{\sigma}$ est la conductivité du cuivre. Il résulte de cette hypothèse
la direction de propagation des rayons lumineux est portée par les vecteurs d'on
Ceux-ci vérifient donc les lois de Snell-Descartes de la réflexion et de la réfrac
Dès lors, les vecteurs d'onde des ondes incidente, réfléchie et transmise ($\overrightarrow{k_\mathrm{i}}$, $\overrightarrow{k_\mathrm{r}}$ e
sont portés par $\overrightarrow{e_z}$ ($\overrightarrow{\underline{k}_\mathrm{t}}$ est a priori complexe). En outre, les trois ondes consid
ont la même pulsation ω car les charges du matériau sont mises en mouvement
pulsation ω et rayonnent une onde à cette même pulsation. Il vient alors

$$\overrightarrow{k_\mathrm{r}} = -\overrightarrow{k_\mathrm{i}} = -\frac{\omega}{c}\,\overrightarrow{e_z}$$

Écrivons la relation de structure pour une onde de fréquence ω aussi bien da
vide que dans le cuivre :

$$\text{Vide :}\quad \overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}_\mathrm{i}} = \frac{\overrightarrow{k_\mathrm{i}} \wedge \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_\mathrm{i}}}{\omega} \qquad \text{et} \qquad \text{Cuivre :}\quad \overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}_\mathrm{t}} = \frac{\overrightarrow{\underline{k}_\mathrm{t}} \wedge \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_\mathrm{t}}}{\omega}$$

Le plan contenant $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_\mathrm{i}}$ et $\overrightarrow{k_\mathrm{i}}$ est un plan de symétrie du problème. Il en résulte qu
champs $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_\mathrm{r}}$ et $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_\mathrm{t}}$ sont contenus dans ce plan. Combinons avec la relation de struc
pour en déduire que les champs électriques et magnétiques sont portés respective
par $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$. La figure de la page précédente synthétise ces observations. Les o
incidente, réfléchie et transmise sont des ondes planes harmoniques. A priori l'
transmise dans le cuivre n'est pas forcément progressive. On admet dans le cours
lorsque l'onde incidente est perpendiculaire à l'interface, les composantes tangent
des champs électrique et magnétique sont continues à travers cette même inter
Il vient alors, en $z = 0$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_\mathrm{i}} + \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_\mathrm{r}} = \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_\mathrm{t}} \\ \overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}_\mathrm{i}} + \overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}_\mathrm{r}} = \overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}_\mathrm{t}} \end{cases}$$

Projetons ces expressions respectivement sur $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$:

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{E}}_{\mathrm{i}0} + \underline{\mathrm{E}}_{\mathrm{r}0} = \underline{\mathrm{E}}_{\mathrm{t}0} \\ \underline{\mathrm{B}}_{\mathrm{i}0} + \underline{\mathrm{B}}_{\mathrm{r}0} = \underline{\mathrm{B}}_{\mathrm{t}0} \end{cases}$$

D'après les relations de structure pour chaque onde, on peut récrire la deux
équation sous la forme

$$k_\mathrm{i}\,\underline{\mathrm{E}}_{\mathrm{i}0} - k_\mathrm{i}\,\underline{\mathrm{E}}_{\mathrm{r}0} = \underline{k}_\mathrm{t}\,\underline{\mathrm{E}}_{\mathrm{t}0}$$

Introduisons les coefficients de réflexion et de transmission complexes r et t :

$$\underline{\mathrm{E}}_{\mathrm{r}0} \qquad . \qquad . \qquad \underline{\mathrm{E}}_{\mathrm{t}0}$$

$$\underline{r} = \frac{}{\underline{\mathrm{E}}_{\mathrm{i0}}} \qquad \text{et} \qquad \underline{t} = \frac{}{\underline{\mathrm{E}}_{\mathrm{i0}}}$$

Après factorisation des deux équations du système précédent par $\mathrm{E_{i0}}$ on obtien

$$\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ k_{\mathrm{i}}\,(1 - \underline{r}) = \underline{k}_{\mathrm{t}}\,\underline{t} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{r} = \frac{k_{\mathrm{i}} - \underline{k}_{\mathrm{t}}}{k_{\mathrm{i}} + \underline{k}_{\mathrm{t}}}}$$

On adopte le modèle de Drude-Lorentz pour décrire le comportement des ch
mises en mouvement par l'onde incidente.

Hypothèse 2 : les conditions que vérifient les charges dans le cuivre sont :

- Les seules charges mobiles du cuivre sont les électrons qui participent conduction et l'on considère qu'ils sont libres. Aucune force ne les rattache ions positifs qui constituent le réseau cristallin.
- L'interaction entre les électrons et le réseau cristallin n'intervient qu'à tr des collisions dont la fréquence est $1/\tau$. Ces collisions, en l'absence d'autre f ramènent la vitesse moyenne d'un ensemble d'électrons à 0 en τ. On mod ces collisions pour un électron en introduisant une force de frottement visq de la forme $-m\overrightarrow{v}/\tau$.
- La vitesse des électrons étant supposée non relativiste, seule la compos électrique du champ électromagnétique agit sur les électrons et leur déplace au cours d'une oscillation est suffisamment faible devant la longueur d'on l'onde transmise pour négliger la modulation spatiale du champ électriqu
- Le champ électrique engendre une translation des électrons parallèle à $\overrightarrow{e_x}$ fait de l'invariance par translation du système dans cette direction, la c volumique demeure égale à sa valeur en l'absence de champ, donc $\rho = 0$ pa dans le métal.

Dans le cadre de ce modèle, appliquons le principe fondamental de la dynami un électron du cuivre soumis au champ oscillant créé par l'onde incidente :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} + m\frac{\overrightarrow{v}}{\tau} = -e\,\overrightarrow{\mathrm{E}}$$

où m est la masse de l'électron. Calculons la vitesse de l'électron en régime sinus forcé. Lorsque $\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} = \underline{\mathrm{E}}_0\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\omega t}\,\overrightarrow{e_x}$, il vient

$$\underline{\overrightarrow{v}} = \frac{-e\underline{\mathrm{E}}_0}{m\,(\mathrm{i}\omega + 1/\tau)}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\omega t}\,\overrightarrow{e_x}$$

On en déduit le vecteur densité de courant $\underline{\overrightarrow{j}}$:

$$\overrightarrow{\underline{\jmath}} = -\mathrm{N}e\,\overrightarrow{\underline{v}} = \frac{\mathrm{N}e^2\,\underline{\mathrm{E}}_0}{m\,(\mathrm{i}\omega + 1/\tau)}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\omega t}\overrightarrow{e_x}$$

où N est la densité volumique d'électrons libres dans le cuivre. Il en résulte q conductivité s'écrit

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + \mathrm{i}\omega\tau} \qquad \text{avec} \qquad \sigma_0 = \frac{\mathrm{N}\,e^2\,\tau}{m}$$

Déterminons l'ordre de grandeur de τ en nous appuyant sur la conductivité du c à fréquence nulle, qui est de l'ordre de 6.10^7 S.m^{-1}. Le temps moyen entre colli s'écrit alors

$$\tau = \frac{\sigma_0 m}{\mathrm{N}e^2}$$

avec $m \approx 10^{-30}$ kg, $e \approx 1{,}6.10^{-19}$ et $\mathrm{N} \approx 10^{29}$ m^{-3}. Alors

$$\tau \approx \frac{6.10^7 \times 10^{-30}}{2{,}5.10^{-38} \times 10^{29}} \approx 2.10^{-14}\ \mathrm{s}$$

On constate ainsi que $\omega\tau \gg 1$, si bien que

$$\underline{\sigma}(\omega) \approx -\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{N}\,e^2}{m\omega}$$

Établissons la relation de dispersion d'une onde harmonique dans le cuivre à p des équations de Maxwell. Celles-ci s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Maxwell-Gauss} & : & -\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}}\cdot\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = 0 \qquad (\mathbf{1}) \\ \text{Maxwell-Flux} & : & -\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}}\cdot\overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}} = 0 \qquad (\mathbf{2}) \\ \text{Maxwell-Faraday} & : & -\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}}\wedge\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = -\mathrm{i}\omega\,\overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}} \qquad (\mathbf{3}) \\ \text{Maxwell-Ampère} & : & -\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}}\wedge\overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}} = \mu_0\,\underline{\sigma}\,\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} + (\mathrm{i}\omega)\,\mu_0\,\varepsilon_0\,\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} \qquad (\mathbf{4}) \end{array}\right.$$

où l'on a tenu compte du fait que $\rho = 0$ dans le cuivre. Effectuons le produit vect de (**3**) par $(-\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}})$:

$$(-\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}})\wedge(-\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}}\wedge\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}) = -\mathrm{i}\omega\,(-\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}}\wedge\overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}})$$

Le membre de gauche se simplifie en tenant compte de (**1**) :

$$(-\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}})\wedge(-\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}}\wedge\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}) = (\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}}\cdot\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}})\,\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}} - (\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}}\cdot\mathrm{i}\,\overrightarrow{\underline{k}})\,\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = \underline{k}^2\,\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}$$

Substituons au membre de droite son expression dans (**4**) pour obtenir, après plification par $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}$, la relation de dispersion des ondes dans le cuivre :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mathrm{i}\omega\,\mu_0\,\underline{\sigma}$$

Injectons l'expression de $\underline{\sigma}$ dans cette relation :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mathrm{i}\omega\mu_0 \left(-\mathrm{i}\frac{\mathrm{N}e^2}{m\omega}\right)$$

On remarque que $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$ et en notant la fréquence plasma $\omega_\mathrm{p} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{N}e^2}{m\varepsilon_0}}$, il

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{{\omega_\mathrm{p}}^2}{\omega^2}\right)$$

On constate que $\underline{k}^2 \in \mathbb{R}$. Empiriquement, on sait que le cuivre réfléchit très bi lumière et qu'il est opaque : la lumière ne s'y propage pas. Ceci implique que $\underline{k}$ autrement dit que ω est inférieure à ω_p.

Hypothèse 3 : On suppose que $\omega \ll \omega_\mathrm{p}$

Dès lors, il vient $$\underline{k} \approx \mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{p}}{c}$$

Injectons ce résultat dans l'expression de $\underline{r}$ pour obtenir

$$\boxed{\underline{r} = \frac{\omega - \mathrm{i}\,\omega_\mathrm{p}}{\omega + \mathrm{i}\,\omega_\mathrm{p}}}$$

On constate que $\mathrm{R} = |\underline{r}|^2 = 1$. **La réflexion se fait sans absorption d'éne dans le cuivre.**

Quelques remarques :

- Le fait de poser $\omega \ll \omega_\mathrm{p}$ revient à négliger le courant de déplace dans l'équation de Maxwell-Faraday.
- $\underline{k}_\mathrm{t}$ est imaginaire pur. Il en résulte que l'onde est évanescente da cuivre. Il n'y a pas de propagation et les électrons oscillent en p avec le champ électrique incident (leur vitesse étant en quadrature ce même champ).
- La couleur rougeâtre du cuivre n'est pas due au fait que la fréqu plasma de ce métal serait située dans le domaine visible (ce qui ren le cuivre transparent dans le bleu !) mais à un mécanisme de sau électrons « entre bandes » dont la description fait appel à la th quantique des solides qui est hors du cadre du programme.
- En faisant abstraction de ce dernier aspect, il est possible de cal r dans le cas présent. La longueur d'onde du laser hélium-néo

7 dans le cas présent. La longueur d'onde du laser hélium-néon
de 633 nm. La longueur d'onde plasma du cuivre est, d'après M
Fox dans « Optical properties of solids » (Oxford Master Series, 20
$\lambda_{\mathrm{p}} = 2\pi c/\omega_{\mathrm{p}} = 112$ nm (ce qui valide l'hypothèse 3). On trouve a
grâce à une calculette,

$$\underline{r} \approx -0{,}94 - 0{,}34\,\mathrm{i}$$

II. Problème