

Electromagnétisme des milieux matériels

Ch1 : équations de Maxwell dans la matière

Ch2 : mécanismes de polarisation, indice de réfraction

Ch3 : milieux aimantés, aspects thermodynamiques

Ch4 : ferromagnétisme

Bibliographie subjective :

- Bertin Faroux Renault électromagnétisme IV, milieux matériels à lire pour un cours. Présentation au niveau CPGE avant 2004
- Hprépa, PSI-PSI* électronique II à lire pour sa partie TP cours sur les ferromagnétiques. Les expériences marchent telles que décrites.
- Kittel et/ou Ashcroft, physique de l'état solide
- Diu physique statistique
- Callen : Thermodynamique (pour ces aspects et pour le reste)
- Ollivier & Gié : Thermodynamique (lien avec les potentiels thermo)
- Jackson, électrodynamique classique (pour la rigueur et certains résultats qu'on ne trouve que dans ce livre).
- Perez, électromagnétisme (assez complet mais le découpage rend son accès difficile)

Version 2020-2021 : romain.volk@ens-lyon.fr

Ch 1 : Equations de Maxwell dans la matière

Bibliographie du chapitre :

- BFR, électromagnétisme III, magnétisme et induction
- BFR, électromagnétisme IV, milieux matériels
- Jackson, électrodynamique classique
- Perez, électromagnétisme

I - Introduction

On s'intéresse ici à l'action d'un champ électrique ou magnétique sur la matière qui permet de distinguer différents types de matériaux.

Milieu conducteur : possède des charges libres. Le champ électrique y est nul en régime permanent.

Milieu isolant ou diélectrique : localement neutre, peut être traversé par un champ électrique. Un champ électrique extérieur le polarise en déplaçant légèrement les charges liées.

Milieu magnétique : conducteur ou non, se magnétise en présence d'un champ magnétique, ou au voisinage d'un aimant

En général : la réponse n'est non nulle que si le champ imposé est non nul (moment dipolaire électrique/magnétique induit).

Les milieux ferromagnétiques sont courants (Fe, Ni, Co), et présentent une aimantation spontanée. Nombreuses applications industrielles.

Les milieux ferro-électriques sont plus rares (ex BaTiO₃) et ne seront pas traités dans ce cours.

I. 1 Origine de la polarisation

Molécules polaires (H₂O), localement neutre $\sum q_i = 0$

O $2\delta^-$

δ^+ H δ^+

Moment dipolaire $\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i$

Quantité intrinsèque

[Debye] 1 D = 0.33 10⁻²⁹ C.m

Rappel, actions subies par un dipôle :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}_{ext} \quad \vec{\Gamma}(O) = \vec{p} \times \vec{E}_{ext} \quad U_{int} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

Effet d'orientation dans un champ externe :

$\vec{E}_{ext} = \vec{0}$ Force totale $\vec{E}_{ext} \neq \vec{0}$

$\vec{F}_{tot} = (\sum \vec{p}_i) \cdot \text{grad} \vec{E}_{ext}$

I. 2 Origine de l'aimantation

Modèle classique : électron en orbite circulaire uniforme autour d'un noyau

$\vec{v} = v\vec{e}_\theta$

$m_e, -e$

Moment cinétique $\vec{l} = m_e r v \vec{e}_z$

r

Courant moyen $I = \frac{-e}{T} = \frac{-ev}{2\pi r}$

Moment dipolaire magnétique (rappels en annexe 2) $\vec{m} = IS \vec{n}$ $\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{l}$

Modèle quantique :

Moment orbital pur $g = 1$ $L_z = m_z \hbar$

Spin pur $g = 2$ $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$

Ordre de grandeur

$m = \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \sim 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ $\mathcal{M} = \mathcal{N}_A \mu_B \sim 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$

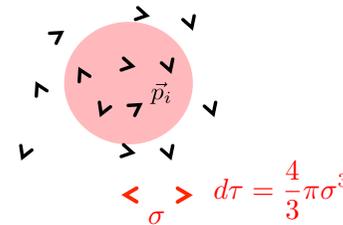
Le magnétisme est dû au moment cinétique des électrons, pas des protons

I. 3 Du microscopique au macroscopique

Les charges, courants, dipôles microscopiques sont sources de champs variant à l'échelle des distances interatomiques.

Les champs mesurés E et B sont macroscopiques

Ensemble de dipôles moléculaires



Description de type milieu continu
Moyenne sur un volume mésoscopique

$$a \ll \sigma \ll (L_E, L_B, \dots)$$

Polarisation $\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{\sum_{i \in d\tau} \vec{p}_i}{d\tau}$

$[P] = \text{C.m}^{-2}$ $[P] = \text{A.s.m}^{-2} \text{ S.I.}$

Aimantation d'un milieu magnétique

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \frac{\sum_{i \in d\tau} \vec{m}_i}{d\tau}$$

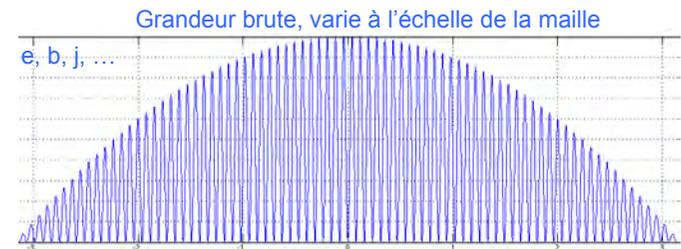
$M = A \cdot \text{m}^{-1}$

II – Charges et courants équivalents

Les équations de Maxwell sont valables à l'échelle microscopique. Les champs e et b varient à l'échelle de la maille atomique.

$$\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{b} = \mu_0 \vec{j}_{\text{micro}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \frac{\rho_{\text{micro}}}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$$

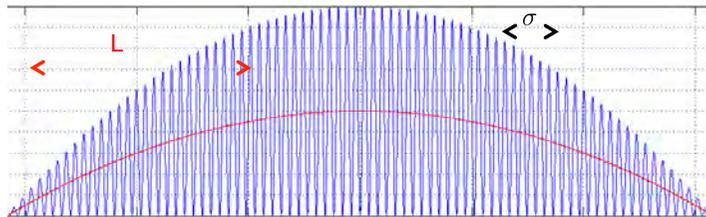


E, B, P et M sont des grandeurs macroscopiques définies par **lissage** des quantités microscopiques

Les grandeurs macroscopiques, mesurables, sont définies par lissage spatial à l'aide d'une fenêtre de taille mésoscopique

<p>Fenêtre de lissage</p> $W_\sigma(\vec{r}) = A \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$ <p>σ échelle mésoscopique</p>	<p>Champs macroscopiques (lissés)</p> $\vec{B}(\vec{r}, t) = \langle \vec{b} \rangle_\sigma = \iiint_{-\infty}^{\infty} \vec{b}(\vec{r}', t) W_\sigma(\vec{r} - \vec{r}') d\tau$ $\vec{E}(\vec{r}, t) = \langle \vec{e} \rangle_\sigma = \iiint_{-\infty}^{\infty} \vec{e}(\vec{r}', t) W_\sigma(\vec{r} - \vec{r}') d\tau$
---	---

e, b, j, grandeurs micro, varient à l'échelle de la maille



E, B, J, grandeurs lissées, ne varient qu'à l'échelle macroscopique L

Propriétés de commutations :

$$\left\langle \frac{\partial e_j}{\partial t} \right\rangle_\sigma = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial e_j(\vec{r}')}{\partial t} W_\sigma(\vec{r} - \vec{r}') d\tau = \frac{\partial \langle e_j \rangle_\sigma}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \langle e_j \rangle_\sigma}{\partial x_j} = \left\langle \frac{\partial e_j}{\partial x_j} \right\rangle_\sigma$$

Equations de Maxwell macroscopiques

$$\langle \vec{\nabla} \times \vec{e} \rangle = -\left\langle \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \right\rangle \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

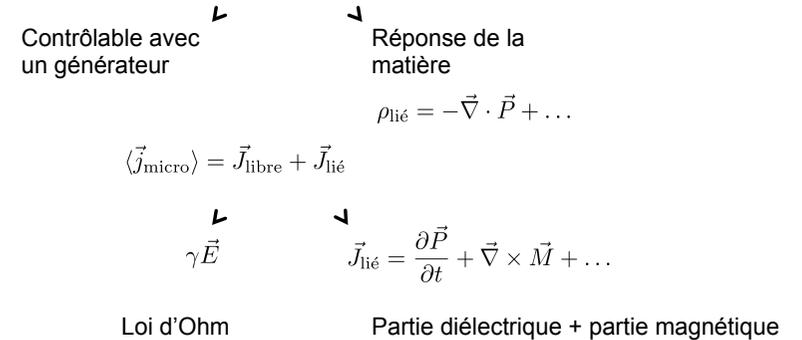
$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{e} \rangle = \frac{\langle \rho_{\text{micro}} \rangle}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\langle \rho_{\text{micro}} \rangle}{\epsilon_0}$$

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\langle \vec{\nabla} \times \vec{b} \rangle = \mu_0 \langle \vec{j}_{\text{micro}} \rangle + \mu_0 \epsilon_0 \left\langle \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right\rangle \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \langle \vec{j}_{\text{micro}} \rangle + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Il apparaît la densité de charge lissée et le courant lissé. On fait la différence entre charges libres et charges liées.

$$\langle \rho_{\text{micro}} \rangle = \rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{lié}}$$



Les charge et courant liés doivent vérifier la conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho_{\text{lié}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{lié}} = 0$$

Pour trouver le lien entre P, M, qui sont des grandeurs lissées et les distributions de charge et courant liés, il y a deux approches :

Une première démarche macroscopique (la nôtre dans la suite).

Elle consiste à partir des résultats connus pour le dipôle électrique ou magnétique (lire les annexes 1 et 2 pour des rappels) pour trouver quelles distributions de charge et de courant créeraient le même potentiel qu'une distribution donnée de polarisation et d'aimantation

Une seconde démarche directe de lissage des distributions de charges et courants microscopiques (Annexe 3*).**

$$\rho_{\text{lié}} = \sum_i \sum_\alpha q_{i\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$$

$$\vec{j}_{\text{lié}} = \sum_i \sum_\alpha q_{i\alpha} \dot{\vec{\xi}}_{i\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$$

Elle est présentée à la fin de ce document, est très intéressante conceptuellement, mais peut être sautée dans le cadre de leçons à présenter à l'agrégation.

Les deux démarches conduisent aux mêmes résultats

II-A Distribution de charges de polarisation

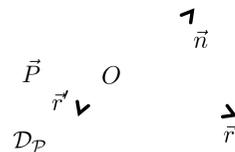
But : trouver le lien entre densité de charge lissée et polarisation.

On utilise le résultat connu du potentiel créé par un dipôle ponctuel

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{rappel Annexe 1})$$

Extension au cas d'une distribution de polarisation : $\vec{P} = \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{P}(\vec{r}') d^3 \vec{r}'$

Le milieu est localement neutre, th. de superposition



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 \vec{r}'$$

Identique au potentiel créé par la distribution de charges fictives

volumique	σ _{lié} = -∇ · P	σ _{lié} = -P · n
-----------	---------------------------	---------------------------

Démonstration : $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$

On écrit :

$$\vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

L'intégrale devient :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

Le second terme est une intégrale de surface

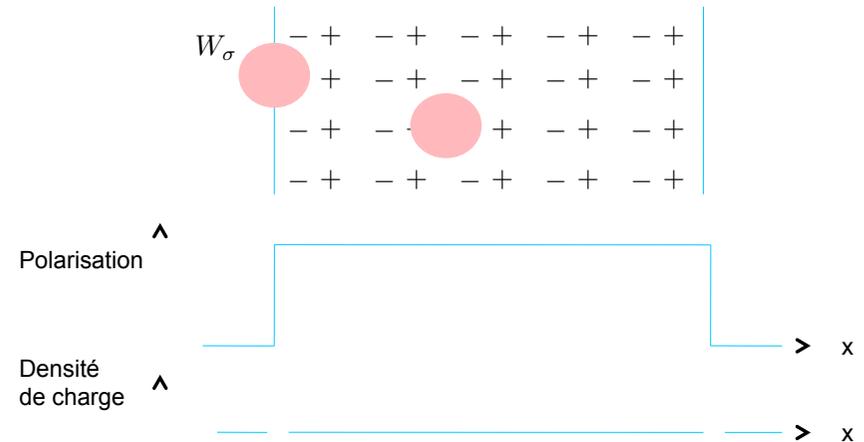
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\vec{r}' \in \partial \mathcal{D}_P} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

Tout se passe comme si le champ était créé par les distributions de charges de volume et de surface

$$\rho_{\text{lié}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \sigma_{\text{lié}} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Interprétation du résultat $\rho_{\text{lié}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

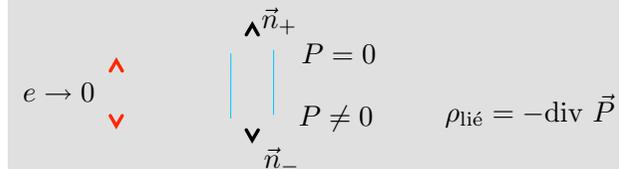
Lissage d'une distribution de dipôles horizontaux. Milieu confiné.



Les conditions aux limites vont jouer un rôle important

Exercice à faire vous-même :

Origine de la densité surfacique de charges : la discontinuité de polarisation



$$\rho_{\text{lié}} = -\text{div } \vec{P}$$

1) Calculer la charge contenue dans le cylindre dans la limite ($e \rightarrow 0$)

2) Montrer que $Q_{\text{int}} = \vec{P} \cdot \vec{n}_+ ds$ (ds est l'aire du disque supérieur)

II-B Courant de polarisation

La polarisation est due au déplacement des charges sous l'action d'un champ extérieur

$$\vec{P} = \sum n_i q_i \vec{s}_i$$

n_i densité volumique locale du porteur de charge i
 \vec{s}_i déplacement moyenné sur un volume mésoscopique

En régime variable, il apparaît un courant de polarisation

$$\vec{j}_{\text{lié}} = \sum n_i q_i \vec{v}_i = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Cette relation vérifie la conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho_{\text{lié}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{lié}} = 0$$

Relation plus générale $\vec{j}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$ (contribution magnétique)

II-C Distribution de courant d'origine magnétique

But : trouver le lien entre densité de courant lissée et aimantation

Cette fois on utilise le potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique ponctuel

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{rappel Annexe 2})$$

Extension au cas d'une distribution d'aimantation : $\vec{M} = \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \vec{M}(\vec{r}') d^3 r'$



Potentiel vecteur (th. De superposition)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

La distribution d'aimantation est équivalente à la distribution de courants

De volume $\vec{J}_V = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ De surface $\vec{J}_S = \vec{M} \times \vec{n}$

Démonstration :
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

Que l'on écrit
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

On utilise l'identité d'analyse vectorielle

$$\vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{M}(\vec{r}')$$

Pour obtenir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

L'analogie du Th de Stokes pour le rotationnel

$$\iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \vec{\nabla}' \times \vec{a}(\vec{r}') d\tau = \iint_{\vec{r}' \in \partial \mathcal{D}} \vec{n} \times \vec{a}(\vec{r}') dS$$

Permet d'arriver au résultat final

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\vec{r}' \in \partial \mathcal{D}_M} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

On peut donc identifier les distributions de courant à partir de la relation de Biot & Savart

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_J} \frac{\vec{J}_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\vec{r}' \in \partial \mathcal{D}_J} \frac{\vec{J}_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2\vec{r}'$$

Distribution de courant volumique $\vec{J}_V = \vec{\nabla} \times \vec{M}$

Distribution de courant surfacique $\vec{J}_S = \vec{M} \times \vec{n}$

De manière analogue au cas de la polarisation, la contribution de surface correspond à la discontinuité du rotationnel de M si la distribution est localisée.

III – Excitation électrique et excitation magnétique

Une fois obtenues les distributions de charges et de courants liés, on peut enfin écrire les équations de Maxwell (macroscopiques) dans la matière en séparant contributions libres et liées

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{libre}} \quad \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_{\text{libre}} + \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t}$$

On définit l'excitation électrique $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

et l'excitation magnétique $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

D et H contiennent la réponse de la matière.

Ils sont très importants dans la pratique car ils sont contrôlés par les charges/courants libres.

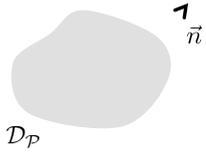
A ce stade, on ne peut pas encore vraiment se servir des équations de Maxwell puisqu'il manque les lois de comportement des matériaux D(E) et H(B) pour connaître E et B dans tout l'espace ...

Ch2 Cas des milieux diélectriques

Ch3 Cas des milieux diamagnétiques et paramagnétiques

Ch4 Cas des milieux ferromagnétiques

IV - Potentiel et champ créés (en statique) par la matière polarisée



Première méthode : calcul direct

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_p} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

Utilise le résultat du dipôle électrostatique

Dériver pour obtenir le champ électrique

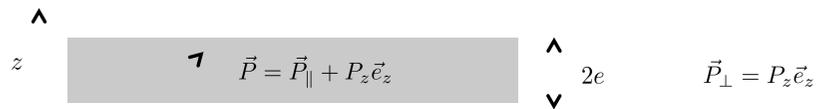
Seconde méthode : utilisation des charges de polarisation

volumique	surfactive	(voir annexe 1*)
$\rho_{lié} = -\text{div } \vec{P}$	$\sigma_{lié} = \vec{P} \cdot \vec{n}$	

Calcul direct ?
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_p} \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\vec{r}' \in \partial \mathcal{D}_p} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

Mieux vaut trouver le problème d'électrostatique équivalent déjà résolu !

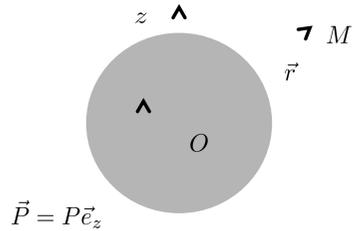
IV.1 Champ créé par une plaque uniformément polarisée



Montrer que le champ est nul en dehors de la plaque, et que
$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}_\perp}{\epsilon_0} \quad |z| < e$$

Conseil : trouver la distribution de charges équivalente.
Utiliser le théorème de superposition pour réutiliser un résultat connu.

IV.2 Calcul direct : sphère uniformément polarisée



$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

$$V(M) = \vec{P} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

$$\vec{E}_1$$

$\vec{E}_1 = E_1(r)\vec{e}_r$, champ créé par une boule de densité de charge 1

Extérieur : montrer que $V(M) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ $\vec{P} = \iiint_{|\vec{r}'| \leq R} \vec{P} d\tau$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{P} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{P}) \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

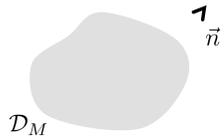
Champ et potentiel créé par un dipôle placé au centre de la sphère

Intérieur : montrer que $\vec{E}_1 = \frac{\vec{r}}{3\epsilon_0}$ $V(r) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{3\epsilon_0}$
 $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$

La relation entre champ créé et polarisation est non locale, elle est entièrement pilotée par les conditions aux limites.

Conseil : le calcul de E_1 ressemble à celui du champ créé par une sphère uniformément chargée. Vous connaissez déjà le résultat.

V - Potentiel et champ créés par la matière aimantée



Première méthode : calcul direct du potentiel vecteur

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

Utilise le résultat du dipôle magnétique (annexe 2)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Seconde méthode : utilisation des courants d'aimantation

volumique

surfactive

$$\vec{J}_V = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\vec{J}_S = \vec{M} \times \vec{n}$$

Trouver le problème de magnétostatique équivalent.
Utiliser les résultats déjà connus ...

Les courants surfaciques proviennent de la discontinuité de M. A trouver en étudiant la circulation le long d'un contour traversant la surface.

Application au champ créé par un cylindre uniformément aimanté

On considère un barreau cylindrique de base circulaire, infiniment long, uniformément aimanté selon son axe $\vec{M} = M\vec{e}_z$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{M} \quad (r < R)$$

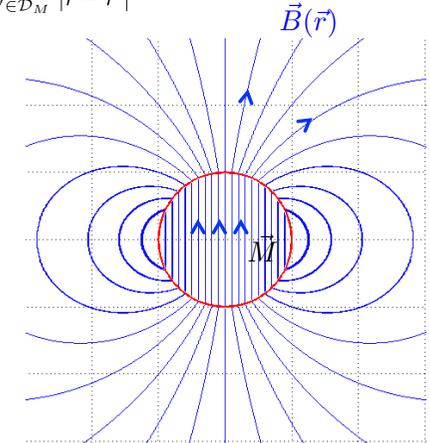
$$\vec{B} = \vec{0} \quad (r > R)$$

Attention : le résultat $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$ n'est pas général car le problème est piloté par les conditions aux limites. Mais c'est un bon ordre de grandeur

Cas d'une sphère uniformément aimantée $\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$ ($r < R$)

$$\text{A l'extérieur : } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} V_0 \vec{M} \times \frac{1}{V_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3}$$



Le champ a une structure dipolaire à l'extérieur

Présence de courants de surface :
B perpendiculaire est continu
B tangentiel est discontinu

En TP : caractérisation d'un aimant champ fort de taille finie

Ressemble à une petite spire de rayon a, intensité I

$$B(z) = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{2\pi} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

^ z

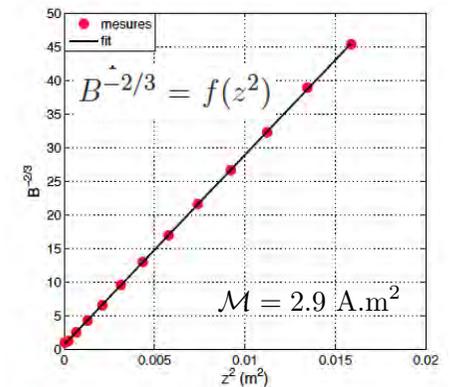
On ne connaît ni a, ni I $\mathcal{M} = \pi a^2 I$

^ M

L'approximation dipolaire marche mal en général

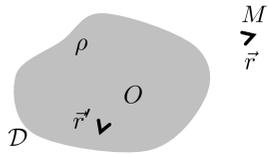
$$B \neq \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\pi z^3}$$

(sauf pour la sphère)



Annexe 1 : moment dipolaire électrique

On calcule ici le potentiel électrique créé à grande distance par une distribution localisée de charges électriques



Potentiel électrique :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

Charge globale : $Q = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\vec{r}') d\tau$

Moment dipolaire : $\vec{P} = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\tau$ [Debye] 1 D = 0.33 10⁻²⁹ c.m

Cette quantité est intrinsèque si Q=0. Sinon P dépend du choix de l'origine

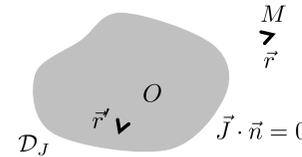
Charges ponctuelles $\rho(\vec{r}) = \sum q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ $\vec{P} = \sum q_i \vec{r}_i$

Approximation dipolaire : $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} + \dots$

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

Annexe 2 : moment dipolaire magnétique

Moment dipolaire d'une distribution de courant localisée



Potentiel vecteur :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Le terme monopolaire est toujours nul : $\iiint_{\mathcal{D}} \vec{J}(\vec{r}') d\tau = \vec{0}$

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d\tau \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \times \vec{r}}{r^3}$$

Le moment magnétique est une grandeur intrinsèque Unité : $\vec{\mathcal{M}} = A \cdot m^2$

Cas particulier du circuit filiforme

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{OP} \times I d\vec{l} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R \vec{e}_r \times I \vec{e}_\theta R d\theta = I \pi R^2 \vec{e}_z$$

Bobine enseignement (R=5 cm, I=1 A, 1000 spires) : $\mathcal{M} \sim 8 A \cdot m^2$

Terre : (R = 6400 km, B = 0.5 10⁻⁴ T) $B \sim \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3}$ $\mathcal{M} \sim 10^{21} A \cdot m^2$

Actions sur un dipôle magnétique/une distribution de petite taille : ($l_{\mathcal{D}} \ll L_B$)

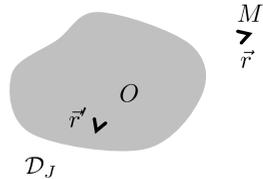
$$\vec{F} = \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{J} \times \vec{B}_{ext} d\tau \quad \vec{F} = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\nabla} \vec{B}_{ext}$$

$$\vec{\Gamma}_O = \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{r}' \times (\vec{J} \times \vec{B}_{ext}) d\tau \quad \vec{\Gamma}_O = \vec{\mathcal{M}} \times \vec{B}_{ext}$$

$$U_{int} = \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{J} \cdot \vec{A}_{ext} d\tau \quad U_{int} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$$

Démonstration que le terme monopolaire est nul

$$\iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \vec{J}(\vec{r}') d\tau = \vec{0}$$



La distribution est localisée et vérifie la conservation de la charge dans l'AQS

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

- Si $J = 0$ en dehors alors $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$ partout sur l'interface $\partial \mathcal{D}_J$

Démo pour la composante selon $\vec{e}_x = \vec{\nabla}_x$

$$\vec{e}_x \cdot \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_J} \vec{J} d\tau = \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_J} \vec{\nabla} \cdot (x \vec{J}) d\tau = \oint_{\vec{r}' \in \partial \mathcal{D}_J} x \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Potentiel vecteur créé dans l'approximation dipolaire

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau \quad \text{avec} \quad \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \vec{J}(\vec{r}') d\tau = \vec{0}$$

Approximation dipolaire : $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} + \dots$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \vec{J}(\vec{r}') d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} (\vec{r}' \cdot \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') d\tau + \dots$$

Formule du double produit vectoriel $\vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{J}) = (\vec{r} \cdot \vec{J}) \vec{r}' - (\vec{r}' \cdot \vec{r}') \vec{J}$

Résultat utile : $\iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_J} \vec{\nabla}' \cdot (x'_i x'_j \vec{J}(\vec{r}')) d\tau = \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_J} (J_i(\vec{r}') x'_j + J_j(\vec{r}') x'_i) d\tau = 0$

$$\int (\vec{r}' \cdot \vec{J}) \vec{r}' d\tau = \int x_i J_i x'_k \vec{e}_k d\tau = - \int x_i J_k x'_i \vec{e}_k d\tau = - \int (\vec{r}' \cdot \vec{r}') \vec{J} d\tau$$

Fait apparaître le moment magnétique de la distribution

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d\tau \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \times \vec{r}}{r^3}$$

Potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique placé au centre

Le moment magnétique est une grandeur intrinsèque Unité : $\vec{\mathcal{M}} = A \cdot m^2$

Annexe 3*** : Charges et courants liés

Lissage direct de la densité microscopique de charges

On obtient ici directement le lien entre P, M et les distributions de charge et de courant par lissage des distributions microscopiques. La fenêtre de lissage est W.

Le milieu est modélisé comme un ensemble d'atomes ou molécules. Chaque atome ou molécule sera neutre, mais l'ensemble est constitué de charges.

Position de chaque atome/molécule \vec{r}_i

Position des charges liées à chaque atome/molécule $\vec{r}_{i\alpha} = \vec{r}_i + \vec{\xi}_{i\alpha}$

Distribution microscopique $\rho_{\text{lié}} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$

Densité macroscopique (lissée) $\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = \iiint_{\infty} \rho_{\text{lié}}(\vec{r}') W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r'$

Exemple du lissage d'une charge ponctuelle

$$\langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_{i\alpha}) \rangle = \iiint_{\infty} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_{i\alpha}) W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' = W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_{i\alpha})$$

Densité macroscopique (lissée) $\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$

Chaque site est localement neutre $\sum_{\alpha} q_{i\alpha} = 0$

Moment dipolaire locale de chaque site $\vec{p}_i = \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \vec{\xi}_{i\alpha}$

Polarisation microscopique $\vec{P}_{\text{lié}} = \sum_i \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$

Polarisation macroscopique $\vec{P} = \langle \vec{P}_{\text{lié}} \rangle = \sum_i \vec{p}_i W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)$

L'approche est similaire à celle d'un développement multipolaire. On regarde à une échelle grande devant celle des détails microscopiques.

Hypothèse fondamentale : la séparation d'échelle $\sigma \gg |\vec{\xi}_{i\alpha}|$

$$\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$$

On développe $W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha}) \simeq W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \vec{\xi}_{i\alpha} \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) + \dots$

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\text{lié}} \rangle &\simeq \sum_i \left(\sum_{\alpha} q_{i\alpha} \right) W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \sum_i \left(\sum_{\alpha} q_{i\alpha} \vec{\xi}_{i\alpha} \right) \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) + \dots \\ &= 0 \qquad \qquad \qquad = \vec{p}_i \end{aligned}$$

Identité vectorielle

$$\vec{p}_i \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{p}_i W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)) + W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{\nabla} \cdot \vec{p}_i = 0$$

$$\langle \rho_{\text{lié}} \rangle \simeq -\vec{\nabla} \cdot \left(\sum_i \vec{p}_i W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) \right) \qquad \langle \rho_{\text{lié}} \rangle \simeq -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\langle \vec{P}_{\text{lié}} \rangle$$

À l'ordre 1 $W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha}) \simeq W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \vec{\xi}_{i\alpha} \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) + \dots$

$$\langle \rho_{\text{lié}} \rangle \simeq -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

À l'ordre 2 $W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha}) \simeq W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \vec{\xi}_{i\alpha} \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) + \dots$

$$\dots + (-\xi_{i\alpha})_k (-\xi_{i\alpha})_l \partial_k \partial_l W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{P} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} \right)$$

$$Q_{kl} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} (\xi_{i\alpha})_k (\xi_{i\alpha})_l W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad \text{Tenseur quadripolaire électrique}$$

Lissage direct du courant microscopique de charges

$$\text{Courant de charge lié} \quad \vec{j}_{\text{lié}} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\vec{\xi}}_{i\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha}) \quad (|\dot{\vec{\xi}}_{i\alpha}| \gg |\dot{\vec{r}}_i|)$$

Courant de charge macroscopique

$$\vec{J}_{\text{lié}} = \langle \vec{j}_{\text{lié}} \rangle = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\vec{\xi}}_{i\alpha} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$$

On développe

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\text{lié}} &= \sum_i \left(\sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\vec{\xi}}_{i\alpha} \right) W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\vec{\xi}}_{i\alpha} (\vec{\xi}_{i\alpha} \cdot \vec{\nabla}) W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) \\ &\qquad \qquad \qquad \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \qquad \qquad \qquad \text{Terme d'ordre 2} \end{aligned}$$

Le courant de polarisation est un effet d'ordre 1 (dipolaire)

La partie magnétique est du même ordre que le quadripôle électrique

La partie magnétique apparaît à l'ordre 2 :

$$\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{P} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} \right)$$

$$\vec{J}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M} - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}}{\partial t}$$

Moment dipolaire

$$\text{Vecteur aimantation} \quad \vec{M} = \sum_i \vec{m}_i W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) \qquad \vec{m}_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \vec{\xi}_{i\alpha} \times \dot{\vec{\xi}}_{i\alpha}$$

$$Q_{kl} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} (\xi_{i\alpha})_k (\xi_{i\alpha})_l W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad \text{Tenseur quadripolaire électrique}$$

L'expérience montre que les effets magnétiques et électriques sont découplés

$$P = P(E) \qquad Q = Q(E) \qquad M = M(B)$$

-On a toujours $|\vec{P}| \gg |\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}|$

-Dans certaines situations $|\vec{\nabla} \times \vec{M}| \gg \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right|$

On écrit donc en toute généralité :

$$\rho_{\text{lié}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{J}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Ch 2 : Milieux diélectriques

Bibliographie du chapitre :

- BFR, électromagnétisme IV, milieux matériels
- Kittel, physique de l'état solide
- Diu, physique statistique
- Cohen Tannoudji, mécanique quantique
- Perez, électromagnétisme

I – Polarisation induite

I.1 – Susceptibilité électrique (statique)

Un isolant plongé dans un champ électrique se polarise.

Dans le cas de champs suffisamment faibles, la réponse du milieu est linéaire et la relation entre P et E est tensorielle. On écrit :

$$\vec{P} = \epsilon_0 [\chi_e] \vec{E} \quad \text{susceptibilité électrique : } [\chi_e]$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + [\chi_e]) \vec{E} \quad \text{permittivité} \quad \epsilon = \epsilon_0 (1 + [\chi_e])$$

Dans un cristal, D et E ne sont pas colinéaires (biréfringence).

Pour un milieu linéaire homogène et isotrope (LHI), on aura $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

On définit alors la permittivité relative $\epsilon_r = 1 + \chi_e$

Elle varie fortement avec la densité

$$\text{Gaz (1 bar)} \quad \chi_e \sim 10^{-3} \quad \text{Matière condensée} \quad \chi_e \sim 1 - 100$$

Dans un milieu inhomogène, la susceptibilité peut dépendre de l'espace mais la relation reste locale.

I.2 – Relations de passage entre deux milieux diélectriques

Elles relient les composantes de E, D, B, H à l'interface entre 2 milieux

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_2 & \vec{n}_{12} & 2) \\ & & \\ \epsilon_1 & & 1) \end{array}$$

Relations de passage générale (à partir des eq. de Maxwell du ch1) :

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \sigma_{\text{libre}} \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$

$$\vec{E}_{\parallel,2} - \vec{E}_{\parallel,1} = 0 \quad \vec{H}_{\parallel,2} - \vec{H}_{\parallel,1} = \vec{J}_s \times \vec{n}_{12}$$

Appliqué au cas de diélectriques LHI :

$$(\epsilon_2 \vec{E}_1 - \epsilon_1 \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \sigma_{\text{libre}} \quad \vec{E}_{\parallel,2} - \vec{E}_{\parallel,1} = 0$$

II.3 – Résoudre un problème d'électrostatique

Que valent les champs dans tout l'espace en présence d'un diélectrique ?
Pb à champ imposé (loin), potentiel imposé, charges imposées ...

Méthode rigoureuse :

i) Trouver la forme de la solution $\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{\nabla} V) = 0$

ii) Raccorder loin de l'objet (si besoin) $-\vec{\nabla} V = \vec{E}_\infty$

iii) Utiliser les relations de passage pour raccorder aux interfaces

Méthode perturbative (champ imposé) :

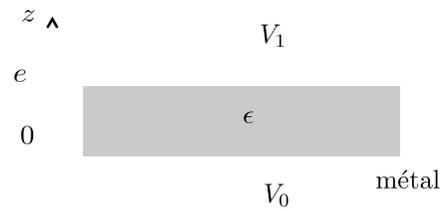
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \quad \vec{E}_0 = \vec{E}_\infty \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots \quad \vec{P}_i = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{i-1}$$

Il faut calculer \vec{E}_{i+1} \vec{P}_i

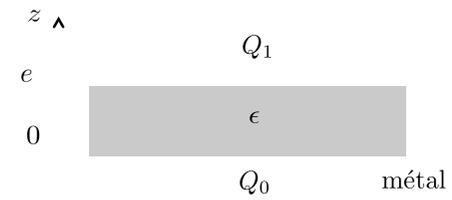
P1 est uniforme, mais pas les ordres supérieurs (sauf sphère et plaque plane)

I.3.A – application au condensateur, potentiel imposé



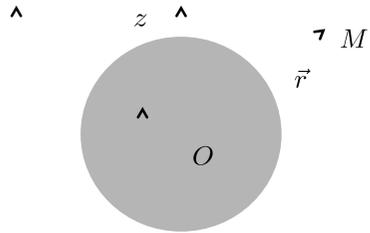
- 1) Calculer le champ dans le condensateur
- 2) Calculer la capacité du condensateur
 $Q_0 = C(V_0 - V_1)$

I.3.B – application au condensateur, charges imposées



- 1) Calculer le champ dans le condensateur sans diélectrique.
- 2) Calculer le champ avec le diélectrique.
- 3) Retrouver la capacité du condensateur

I.3.C – Polarisation induite d'une sphère



Champ extérieur appliqué loin de la sphère
Calcul perturbatif pour une réponse faible

$$\chi_e \ll 1$$

On pose :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots$$

\vec{E}_{ext}

1) Montrer que $\vec{P}_i = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{i-1}$

2) Obtenir P sous forme d'une série. Montrer que l'on a dans une certaine gamme

$$\vec{P} = \epsilon_0 \frac{\chi_e}{1 + \chi_e/3} \vec{E}_{ext}$$

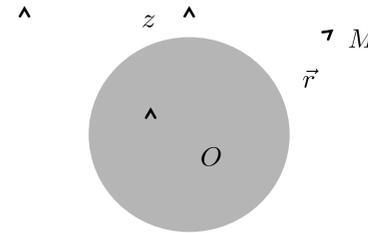
Remarque : dans le cas d'une plaque épaisse. Seul le champ perpendiculaire à la plaque dépoliarise.

$$\vec{P} = \frac{\epsilon_0 \chi_e}{1 + \chi_e} \vec{E}_\perp + \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_\parallel$$

I.3.D – Force subie dans un champ extérieur

Une fois que l'on connaît la relation entre P et E, on peut calculer la force subie par la sphère dans un champ inhomogène.

Une application classique : pinces optiques (laser).



On suppose que le champ extérieur varie sur une échelle $L \gg R$

\vec{E}_{ext}

La force subie est : $\vec{F} = \iiint_V (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E}_{ext} d\tau$

Cas d'une petite sphère : $\vec{P} = \epsilon_0 \frac{\chi_e}{1 + \chi_e/3} \vec{E}_{ext}$

$$\vec{F} = \frac{2}{3} \pi R^3 \frac{3\chi_e}{3 + \chi_e} \vec{\nabla} |E_{ext}|^2 = 2\pi R^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{\nabla} |E_{ext}|^2$$

Attiré vers les zones de champ intense, P et F saturent si $\chi_e \gg 1$
Pour une sphère le moment en O est nul ($\vec{P} \times \vec{E} = 0$)

Remarque : dans le cas d'une plaque épaisse, on trouve un moment non nul car $\vec{P} \times \vec{E}$ est non nul.

II – Régimes variables

II.1 – Susceptibilité complexe d'un milieu linéaire et isotrope

Les diélectriques sont utilisés sur une immense gamme de fréquences qui s'étend de la statique jusqu'aux fréquences optiques. La permittivité dépend donc fortement de la fréquence.

On introduit donc les TF des champs E et P

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_{\omega}(\vec{r}) e^{i\omega t} d\omega \quad \vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}_{\omega}(\vec{r}) e^{i\omega t} d\omega$$

Attention : $\vec{P}_{\omega}(\vec{r})$ et $\vec{E}_{\omega}(\vec{r})$ ne sont pas homogène à P et E

La relation n'est simple que dans l'espace de Fourier

$$\vec{P}_{\omega}(\vec{r}) = \epsilon_0 \underline{\chi}_e(\vec{r}, \omega) \vec{E}_{\omega}(\vec{r}) \quad \underline{\chi}_e = \underline{\chi}_e' + i\underline{\chi}_e''$$

$$\epsilon_r = 1 + \underline{\chi}_e \quad \epsilon_r = \epsilon_r' + i\epsilon_r''$$

La relation reste locale (en espace) entre les champs

II.2 – Réponse à un champ polychromatique

Dans le cadre de la réponse linéaire, la relation est une convolution

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \vec{E}(\vec{r}, \tau) G(\vec{r}, t - \tau) d\tau$$

La valeur de P dépend des valeurs de E aux instants antérieurs
G est la fonction réponse, liée à la susceptibilité complexe

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

C'est une transformée de Hilbert et non une TF (causalité).

La susceptibilité est une fonction analytique, ses parties réelles et imaginaires sont liées par les relations de Kramers-Krönig.

$$\chi_e'(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\Omega \chi_e''(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega \quad \chi_e''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\chi_e'(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega$$

La partie imaginaire « ressemble » à la dérivée de la partie réelle. Elles portent la même information, on ne peut les modéliser indépendamment.

Vérification du lien entre G et la susceptibilité : le système d'ordre 1

Décrit assez bien la dynamique temporelle du mécanisme de polarisation d'orientation. L'équation d'évolution est :

$$\tau_p \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = \epsilon_0 \chi_0 \vec{E}$$

- 1) Résoudre l'équation dans l'espace de Fourier
- 2) Résoudre directement l'équation dans l'espace physique
- 3) Vérifier la relation entre G et la susceptibilité

II.3 – Considérations énergétiques

Extension du théorème de Poynting

Bilan de puissance transmise aux charges libres : $\mathcal{P}_v = -\vec{J}_{\text{libre}} \cdot \vec{E}$

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{J}_{\text{libre}} \cdot \vec{E}$$

Démonstration à partir des équations de Maxwell

$$E \cdot \nabla \times H = J_{\text{libre}} \cdot E + E \cdot \partial_t D \quad (1)$$

$$H \cdot \nabla \times E = -H \cdot \partial_t B \quad (2)$$

$$(1) - (2) \quad E \cdot \partial_t D + H \cdot \partial_t B + H \cdot \nabla \times E - E \cdot \nabla \times H = -J_{\text{libre}} \cdot E$$

Analyse vectorielle $\nabla \cdot (E \times H) = H \cdot \nabla \times E - E \cdot \nabla \times H$

Dans le vide, la situation était très claire puisque le terme

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial u_{em}}{\partial t}$$

est la dérivée temporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Dans un diélectrique (non magnétique) la situation est plus complexe :

Le vecteur de Poynting reste bien $\vec{R} = \vec{E} \times \vec{H} \simeq \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

Mais i) D et E ne sont pas proportionnels : $\vec{D}(\vec{r}, t) = [\epsilon] \vec{E}(\vec{r}, t)$

ii) Il faut que la permittivité soit une constante (champ quasi-statique), ou que la gamme de fréquence soit réduite (quasi-monochromatique) pour que l'on puisse toujours écrire la densité d'énergie comme

$$u_{em} \simeq \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Ce n'est pas vrai en général !

III – Mécanismes de polarisation

III.1 – Polarisabilité

Une entité microscopique se modifie en présence d'un champ électrique extérieur, elle acquiert un moment dipolaire.

$$\vec{p} = \epsilon_0 [\alpha] \vec{E}_{loc}$$

$[\alpha]$ Tenseur polarisabilité. Homogène à un volume $[m^3]$

\vec{E}_{loc} Champ local vu par l'atome ou la molécule.
C'est le champ extérieur dans un gaz, mais pas dans un corps dense ...

Grands types de mécanismes :

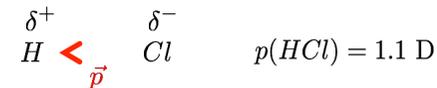
Polarisation d'orientation (molécules polaires)

Polarisation électronique (déformation de la fonction d'onde)

Polarisation ionique (déformation de la structure cristalline)

III.1.A – Polarisabilité d'orientation

Ce mécanisme concerne les liquides ou les gaz composés de molécules possédant un moment dipolaire permanent.



$$\wedge \vec{E}_l = E_l \vec{e}_z$$

C'est un effet de compétition entre orientation et agitation thermique qui se modélise bien dans le cadre de la statistique de Boltzmann. On considère ici N dipôles.



$$(r, \theta, \phi)$$

L'énergie d'interaction d'un dipôle avec le champ local est

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_l = -p E_l \cos \theta$$

On ignore les interactions dipôle-dipôle (sinon int. van der Waals, livre Atkins)

On suppose qu'il y a séparation des interactions entre particules sans champ et du potentiel U. l'énergie potentiel du dipôle i s'écrit :

$$U_i = U_0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) - \vec{p}_i \cdot \vec{E}_l$$

Quelques propriétés importantes pour ce type de modèles

Le hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \sum \frac{1}{2} \vec{p}_i \cdot \vec{E}_{loc} \quad \text{avec} \quad \mathcal{H}_0 = \sum \frac{1}{2} m v_i^2 + U_0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

C'est la somme du hamiltonien en champ nul \mathcal{H}_0 (indépendant des orientations des dipôles) et d'une énergie potentielle d'interaction dipôle-champ

Deux conséquences :

i) La fonction de partition se sépare en un produit. $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \mathcal{Z}_{Ndipoles}$

L'énergie libre est donc la somme de deux termes. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_{Ndipoles}$

ii) Les dipôles étant indépendants, on a $\mathcal{Z}_{Ndipoles} = (\mathcal{Z}_{1dipoles})^N$

$$\mathcal{F}_{Ndipoles} = -NkT \log \mathcal{Z}_{1dipoles}$$

On ne cherche ici qu'à obtenir l'expression du moment dipolaire moyen d'un dipôle. i) et ii) montrent qu'on peut le faire en moyennant directement sur les configurations d'énergie U et en ignorant les autres degrés de liberté du système (position et impulsion)

La probabilité d'un état d'énergie U s'écrit :

$$dP(U) = A e^{-\frac{U}{k_B T}} \sin \theta d\theta d\phi \quad \theta \in [0, \pi] \quad \phi \in [0, 2\pi[$$

Avec la normalisation : $A \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-\frac{U}{k_B T}} \sin \theta d\theta d\phi = 1$

Si on choisit l'axe z tel que $\vec{E}_l = E_l \vec{e}_z$, on aura :

$$\begin{aligned} \langle p_x \rangle &= \langle p \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x \rangle \\ \langle p_y \rangle &= \langle p \vec{e}_r \cdot \vec{e}_y \rangle \\ \langle p_z \rangle &= \langle p \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z \rangle \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \langle f(\theta, \phi) \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \exp\left(-\frac{U(\theta)}{k_B T}\right) \sin \theta d\theta d\phi}{2\pi \int_0^\pi \exp\left(-\frac{U(\theta)}{k_B T}\right) \sin \theta d\theta}$$

$$U(\theta) = -pE_l \cos \theta$$

Exercice : ce problème possède une solution analytique faisant intervenir la Fonction de Langevin

$$\langle p_z \rangle = p \mathcal{L}\left(\frac{pE_l}{kT}\right) \quad \mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$$

On suppose que la température est telle que l'on ait $U \ll k_B T$

Montrer que l'on a : $\langle \vec{p} \rangle \simeq \frac{p^2}{3k_B T} \vec{E}_l$

Cette hypothèse n'est pas restrictive

ODG : ddp de 100 V sur 100 microns, $pE \sim 10^{-23} \text{ j} \ll kT \sim 10^{-21} \text{ j}$

La dépendance en température, bien vérifiée expérimentalement, est le signe d'un effet statistique.

Modèle dynamique de type visqueux : $\tau_{or} \frac{d\langle \vec{p} \rangle}{dt} + \langle \vec{p} \rangle = \epsilon_0 \alpha_{or} \vec{E}_l$
Les molécules doivent tourner

III.1.B – Polarisabilité électronique

Le modèle phénoménologique de l'électron élastiquement lié rend bien compte du phénomène.

L'électron est lié au proton par une interaction **effective** de type élastique

$$\vec{f}_{el} = -m_e \omega_0 \vec{r}$$

Le dissipation est modélisée par une force de frottement visqueuse

$$\vec{f}_d = -\frac{m_e}{\tau} \dot{\vec{r}}$$

Si l'échelle spatiale des variations du champ est grande devant le rayon atomique, le champ semble homogène ($k a_0 \ll 1$).

$$m_e \ddot{\vec{r}} + \frac{m_e}{\tau} \dot{\vec{r}} + m_e \omega_0^2 \vec{r} = -e \vec{E}_l(t)$$

En complexes :

$$\vec{p}(\omega) = -e \vec{r}(\omega) = \frac{e^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} \vec{E}_l(\omega) \quad \alpha(\omega) = \frac{\frac{e^2}{\epsilon_0 m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}}$$

A fréquence nulle, la polarisabilité électronique est : $\alpha_e = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2}$

Attention, personne ne dit que l'électron est élastiquement lié au noyau. Il s'agit d'un modèle phénoménologique, « ça se passe comme si ». On ne connaît pas la pulsation de résonance, toutefois on peut l'obtenir à partir d'arguments quantiques à l'aide d'une analyse d'ordre de grandeur.

Pour l'atome hydrogénoïde, on trouve que $\frac{\alpha_e}{4\pi} = \frac{a_0^3}{Z^4} \sim 1 \text{Å}^3$

qui fait intervenir le rayon de Bohr $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$

Exercice : analyse dimensionnelle sur l'équation de Schrödinger

On considère un électron soumis à une Ep d'interaction $V = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

Pour obtenir un ordre de grandeur de l'énergie de transition $\hbar\omega_0 = \Delta E$

Conseil : utiliser l'équation de Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$
« comme en mécanique des fluide »

pour trouver le rayon de Bohr et montrer que $\frac{\alpha_e}{4\pi} = \frac{a_0^3}{Z^4} \sim 1\text{Å}^3$ $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$

Application : comment change la polarisabilité lorsque l'on passe d'une couche électronique à la suivante ? Lorsqu'on passe d'une colonne à une autre ?

Polarisabilité électronique de quelques éléments (BFR T.4)

H	0,67									He	0,21				
Li	12	Be	5,6	B	3,1	C	1,7	N	1,1	O	0,72	F	0,51	Ne	0,38
Na	27			Al	8,8	Si	5,5	P	3,5	S	2,7	Cl	1,95	Ar	1,62
K	34													Kr	2,46
														Xe	3,99

Tableau périodique : alpha augmente en ligne et diminue en colonne

Cas d'un atome poly-électronique :

Les polarisabilités s'ajoutent $\alpha_e = \sum_l \alpha_{e,l}$

$$\alpha_{e,l} = \frac{N_l q^2}{m_e \epsilon_0} \frac{1}{\omega_l^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau_l}}$$

Il y a une forte influence de la fréquence avec des résonance qui correspondront au phénomène d'absorption. On verra le lien avec la permittivité et l'optique à la section suivante.

Le modèle est phénoménologique, l'électron n'est pas élastiquement lié.

La température n'a aucun rôle dans le mécanisme de polarisation électronique, ce n'est pas un effet statistique.

Un traitement quantique (non résonnant) donne un résultat analogue

$$\alpha_{e,l} = \frac{N_l 2m_e \omega_{0l}}{\hbar^2} |\langle 0|Z|l\rangle|^2 \frac{1}{\omega_{0l}^2 - \omega^2} \quad (\text{Livre C.T. p.1297 T.2})$$

Un traitement quantique (non résonnant) donne un résultat analogue

III.1.C – Polarisabilité ionique

Le traitement est similaire, mais les masses plus grandes. Les fréquences sont dans l'IR.

III.2 – Le champ local

Quel est le lien entre la susceptibilité, grandeur accessible expérimentalement à l'aide de mesures (électroniques, guide d'onde, optique ...), et la polarisabilité qui elle se définit bien mais ne se mesure pas directement ?

Pour lier ces deux grandeurs, il faut connaître quel est vraiment connaître le champ localement ressenti par un atome : \vec{E}_l

Ce champ local peut être différent du champ extérieur (lissé) si les atomes sont proches, i.e. dans les phases condensées

Prenons un morceau de diélectrique baignant dans un champ électrique macroscopique. Au point M, ce champ la somme d'un champ extérieur imposé par l'extérieur et celui créé en réponse par la matière

On a : $\vec{E}_{macro} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_P$

\vec{E}_{ext} Créé par des charges extérieures

\vec{E}_P Créé par les charges liées du diélectrique
[champ lissé]



Ces quantités sont par définition lissées puisqu'elle sont mesurables macroscopiquement

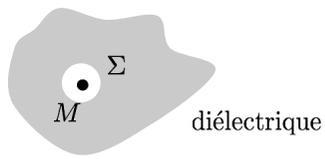
Le champ réellement ressenti par un atome placé en un point M est potentiellement différent puisqu'il est influencé par ses voisins les plus proches, par les autres, et par l'extérieur. Creusons une petite cavité sphérique autour de M pour distinguer le champ créé par les atomes très proches de M et celui créé par les atomes en dehors (plus lointains).

$\vec{E}_{\Sigma,i}$ Créé par les charges proches situées dans la sphères
[on tient compte de la position des atomes]

$\vec{E}_{\Sigma,e}$ Créé par les charges à l'extérieur de la sphère
[charges éloignées, champ lissé]

Le champ local au point M s'écrit alors

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{\Sigma,i} + \vec{E}_{\Sigma,e}$$



Ces différents champs ne sont pas tous indépendants. Par exemple la réponse lissée et le champ par tous les voisins moins la sphère sont reliés par la relation :

$$\vec{E}_{\Sigma,e} = \vec{E}_P - \vec{E}_{sphère}$$

Puisque la sphère que l'on a enlevée est petite, on peut la supposer uniformément polarisée pour obtenir que le champ qu'elle créerait est

$$\vec{E}_{sphère} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \vec{E}_{\Sigma,e} = \vec{E}_P - \vec{E}_{sphère} = \vec{E}_P + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Dont on tire la relation $\vec{E}_{loc} = \vec{E}_{macro} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} + \vec{E}_i$

Le champ local ne diffère du champ macroscopique que par le champ créé par les charges très proches moins celui que créerait une sphère uniformément polarisée.

De manière intéressante, le champ produit par les proches voisins est nul dans deux cas extrêmes, celui d'un **solide cubique face centré** et celui d'un **liquide isotrope**. On a alors :

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E}_{macro} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Dans le cas des phases condensées constitués d'éléments non polaires, le terme E_i sera proportionnel à la polarisation et on pourra écrire :

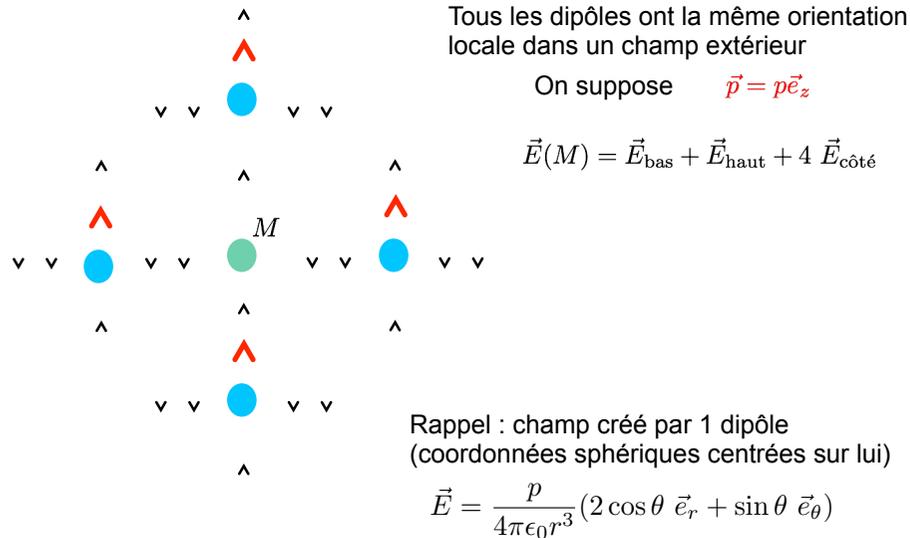
$$\vec{E}_{loc} = \vec{E}_{macro} + \left(\frac{1}{3} + s\right) \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

Avec s une constante, de l'ordre de l'unité, qui peut être nulle.

Dans le cas des phases condensées polaires, ce terme n'est pas nul en général et peut être grand du fait de l'auto-organisation locale (penser à la glace pour laquelle les molécules sont orientées localement).

Revenons au cas du système cubique pour prouver que E_i est nul

Dans un cristal cubique, chaque atome a 6 voisins (haut, bas, 4 côtés)



Les champs produits en M par les voisins sont selon z et on a

$$E_z(M) = 2 \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 d^3} - 4 \frac{p}{4\pi\epsilon_0 d^3} = 0$$

Le résultat est vrai aussi pour le cas des orientations

$$\vec{p} = p\vec{e}_x \quad \vec{p} = p\vec{e}_y$$

La constante s est donc nulle pour le cristal cubique face centré car les contributions « champ proche » se compensent.

On a un résultat similaire dans le cas d'un liquide isotrope mais c'est un effet de compensation statistique, donc différent de celui évoqué ici.

III.3 – Relation entre polarisabilité et susceptibilité

III.3.A – Milieux peu denses

La réponse de la matière est d'autant plus grande que le nombre d'atomes par unité de volume est grand. Dans un gaz, celle-ci est donc très faible et l'on aura

$$\vec{E}_{\text{loc}} = \vec{E}_{\text{macro}} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \simeq \vec{E}_{\text{macro}}$$

Pour une densité atomique N/V , la polarisation s'écrit

$$\vec{P} = \frac{N}{V} \langle \vec{p} \rangle$$

Introduisant la polarisabilité, on aura alors dans l'espace de Fourier

$$\vec{P}(\omega) = \frac{N}{V} \alpha(\omega) \epsilon_0 \vec{E}(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}(\omega)$$

avec
$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi_e(\omega) = 1 + \frac{N}{V} \left(\alpha_e + \alpha_{\text{ion}} + \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 kT} \right)$$

Dans le cas des milieux peu denses, la mesure de la permittivité est une mesure directe de la polarisabilité.

L'écart à l'unité est proportionnel à la masse volumique $\rho = \frac{N}{V} \frac{M}{\mathcal{N}_A}$

On a alors la relation

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\rho} = \frac{\mathcal{N}_A}{M} \alpha(\omega, T)$$

Dépendance en température de quelques gaz polaires
(BFR, électromagnétisme, T4)

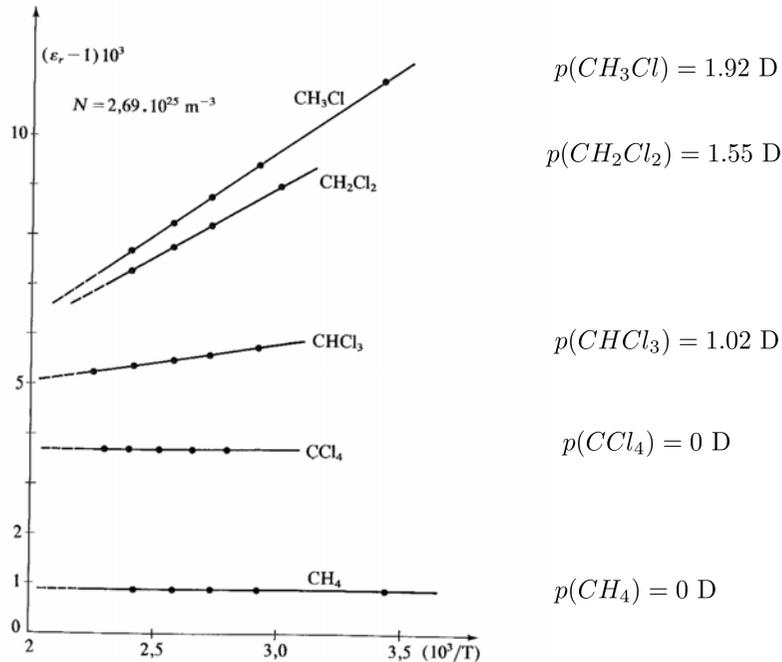


Fig. 5. Susceptibilité électrique des dérivés chlorés du méthane. Effet de la température (les valeurs expérimentales ont été ramenées à une densité moléculaire normale: $N = N_m^0$ soit 1 mole pour $22,414 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$).

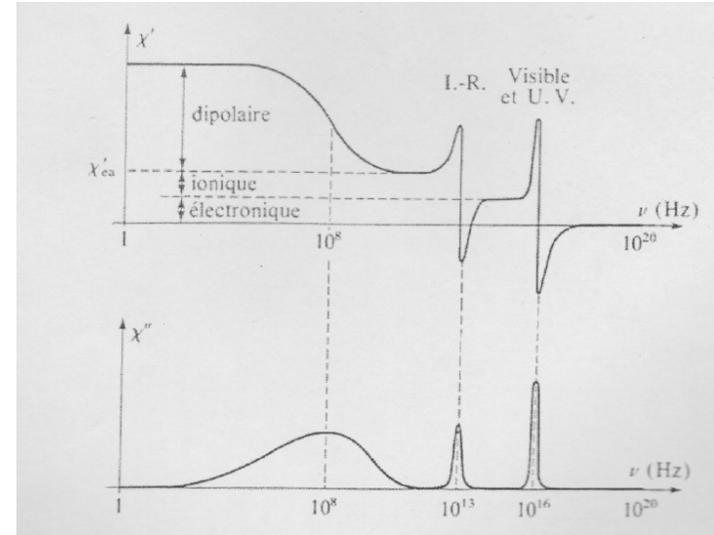
La dépendance en température est le signe d'un effet statistique de compétition avec l'agitation thermique.

Dans le cas de la polarisation, c'est le signe que le mécanisme dominant est celui d'orientation, et la loi en $1/T$ est bien vérifiée, avec une pente d'autant plus grande que le moment dipolaire des molécules est grand.

Pour autant cette figure n'est pas une preuve directe que le modèle de polarisation d'orientation, déroulé dans les pages précédentes, est valable.

Dépendance en fréquence (BFR T.4)

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi_e(\omega) = 1 + \frac{N}{V} \left(\alpha_e + \alpha_{ion} + \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 kT} \right)$$



Partie réelle et imaginaire de la susceptibilité électrique en fonction de la fréquence. Elles font apparaître les différents mécanismes de polarisabilité et l'on voit que la partie imaginaire, liée à l'absorption, ressemble à la dérivée de la partie réelle

$$\chi'_e(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad \chi''_e(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau$$

Les courbes expérimentales sont presque impossibles à trouver dans des articles car elles couvrent 20 décades en fréquence. Aucune technique expérimentale n'est capable de couvrir une telle gamme.

Jusqu'à quelques MHz, la spectroscopie d'impédance est utilisée (mesure de résistance/capacité d'un condensateur). Ensuite, c'est le domaine de la spectro THz (radio), puis spectro IR, puis optique (UV visible).

III.3.B – Milieux denses, relation de Clausius - Mossotti

Cas des gaz à sous forte pression, des liquide, des solides (non polaires)

Le champ local n'est pas le champ macroscopique

$$\vec{P}(\omega) = \frac{N}{V} \alpha(\omega) \epsilon_0 \vec{E}_{loc}(\omega) \quad \vec{E}_{loc} = \vec{E}_{macro} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{P}(\omega) = \epsilon_0 \frac{\frac{N}{V} \alpha(\omega)}{1 - \frac{N}{V} \frac{\alpha(\omega)}{3}} \vec{E}(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}(\omega)$$

Polarisabilité et susceptibilité ne sont pas proportionnelles

$$\frac{\chi_e(\omega)}{3 + \chi_e(\omega)} = \frac{N}{3V} \alpha(\omega) = \frac{\rho N_A}{3M} \alpha(\omega)$$

On obtient la relation de Clausius-Mossotti $\frac{\epsilon_r(\omega) - 1}{\epsilon_r(\omega) + 2} = \frac{\rho N_A}{3M} \alpha(\omega)$

qui est assez bien vérifiée expérimentalement pour les fluides **non polaires**

Tableau IV Azote. Susceptibilité diélectrique. Effet de la pression

0°C	ρ (atm)	10	60	100	150	200	250
$10^3 (\epsilon_r - 1)$		6,09	37,32	62,62	93,43	121,7	147,3
M/ρ (cm ³)		2231	367,4	220,7	149,5	115,9	96,84
$(\epsilon_r - 1)M/3\rho$		4,53	4,57	4,61	4,66	4,70	4,76
$(\epsilon_r - 1)M/(\epsilon_r + 2)\rho$		4,52	4,51	4,51	4,52	4,52	4,53

Cas de l'azote entre 10 et 250 bars (BFR). On voit bien que la susceptibilité n'est pas proportionnelle à la densité. En revanche (dernière ligne), on voit que la relation de Clausius-Mossotti est bien vérifiée puisque la dépendance en pression disparaît.

Le même livre montre que la relation n'est pas très bien vérifiée dans le cas du CO2 qui est une molécule polaire.

IV – Propagation dans les milieux diélectriques (cas monochromatique)

On considère un milieu LHI, non magnétique, non conducteur

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{E}_\omega \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- 1) Ecrire correctement les équations de Maxwell
- 2) Obtenir l'équation vérifiée par $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$
- 3) Obtenir la vitesse de phase et l'indice de réfraction pour une propagation en milieu illimité et une permittivité réelle.

1) Equations de Maxwell :

Attention à ne pas mélanger des dérivées temporelles (espace physique) et l'utilisation de quantités définies dans le domaine fréquentiel (espace de Fourier)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\omega) = -i\omega \vec{B}(\omega) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\omega) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}(\omega)}{\mu_0} = i\omega \vec{D}(\omega) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\omega) = 0$$

2) On utilise l'égalité : $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$

$$\nabla^2 \vec{B}(\omega) = -i\mu_0 \omega \vec{\nabla} \times \vec{D}(\omega) = -i\mu_0 \omega \vec{\nabla} \times (\epsilon(\omega) \vec{E}(\omega))$$

Dans le cas d'une perméabilité homogène, on obtient :

$$\text{L'équation de Helmholtz. } \nabla^2 \vec{B}(\omega) + \mu_0 \epsilon(\omega) \omega^2 \vec{B}(\omega) = 0$$

En l'absence de C.L. les solutions sont les ondes planes

En passant aussi dans l'espace de Fourier en espace (base des ondes planes)

$$\underline{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint \underline{\vec{B}}(\vec{k}, \omega) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k}$$

On obtient la relation de dispersion :

$$\nabla^2 \underline{\vec{B}}(\omega) + \mu_0 \underline{\epsilon}(\omega) \omega^2 \underline{\vec{B}}(\omega) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad (\mu_0 \epsilon_0 \underline{\epsilon}_r \omega^2 - k^2) \underline{\vec{B}}(\vec{k}, \omega) = \vec{0}$$

Cas d'une perméabilité réelle :

$$k = \pm \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \omega \quad \text{vitesse de phase} \quad \vec{v}_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

Indice optique : $n = \sqrt{\epsilon_r} \quad k = nk_0$

La fréquence est inchangée, la longueur d'onde diminue par rapport au vide.

Structure de l'onde : $\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}}(\vec{k}, \omega) = 0 \quad \vec{k} \cdot \underline{\vec{D}}(\vec{k}, \omega) = 0 = \vec{k} \cdot ([\epsilon] \underline{\vec{E}}(\vec{k}, \omega))$
 $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) \times \underline{\vec{B}}(\vec{k}, \omega)^*$

E n'est transverse que si le milieu est isotrope, B et D sont toujours transverse.

Attention ceci n'est vrai qu'en absence de Conditions aux Limites (cf guide d'onde)

Dans le cas d'une permittivité complexe :

$$\underline{\epsilon}_r = \epsilon'_r + i \epsilon''_r \quad \text{avec} \quad \epsilon'_r \gg \epsilon''_r$$

- 1) Trouver le vecteur d'onde complexe $\underline{k} = k' + i k''$
- 2) Donner la structure de l'onde pour une propagation selon z
- 3) Donner l'indice de réfraction complexe
- 4) Calculer la puissance moyenne communiquée au milieu

$$\mathcal{P}_V = -\langle \vec{J}_{\text{lié}} \cdot \vec{E} \rangle_{\text{temps}}$$

- 1) Cas d'une absorption faible $\epsilon'_r \gg \epsilon''_r$

$$\underline{k} = k' + i k'' \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \simeq k'^2 + 2i k' k''$$

$$k' = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'_r} = \pm n' k_0$$

$$k'' = \mp \frac{\omega}{c} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon'_r}}{\epsilon''_r} = \mp n'' k_0$$

- 2) Structure de l'onde :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-n'' k_0 z} \cos(n' k_0 z - \omega t)$$

- 3) Indice optique complexe : $\underline{n} = n' - i n''$

- 4) Puissance cédée par unité de volume

$$\mathcal{P}_V = -\langle \vec{J}_{\text{lié}} \cdot \vec{E} \rangle_{\text{temps}} = \left\langle \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right\rangle_{\text{temps}}$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left(i \omega \vec{P}(\omega) \cdot \vec{E}(\omega)^* \right) = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \omega \chi_e''(\omega) |\vec{E}(\omega)|^2$$

On voit que la partie imaginaire de la susceptibilité est liée à l'absorption

Ch 3 : Diamagnétisme et paramagnétisme

Aspects thermodynamiques

Bibliographie du chapitre :

- BFR, électromagnétisme IV, milieux matériels
- Kittel, physique de l'état solide
- Diu, physique statistique
- Cohen Tannoudji, mécanique quantique
- Perez, électromagnétisme

I – Aimantation induite

I.1 – Susceptibilité magnétique

Un corps plongé dans un champ électrique acquiert une aimantation.

Dans le cas de champs suffisamment faibles, la réponse du milieu est linéaire et la relation entre M et H est tensorielle. On écrit :

$$\vec{M} = [\chi_m] \vec{H} \quad \text{susceptibilité magnétique : } \chi_m$$

Pour un milieu linéaire homogène et isotrope (LHI), on aura $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

Contrairement au cas de la polarisation, le signe de la susceptibilité magnétique peut-être positif ou négatif

$\chi_m < 0$ Milieu diamagnétique

Dépend peu de T	$\chi_m \sim -10^{-5}$	Liquide/solide
	$\chi_m \sim -10^{-9}$	Gaz

$\chi_m > 0$ Milieu paramagnétique $\chi_m \sim 10^{-3}$ $\chi_m = \frac{C}{T}$

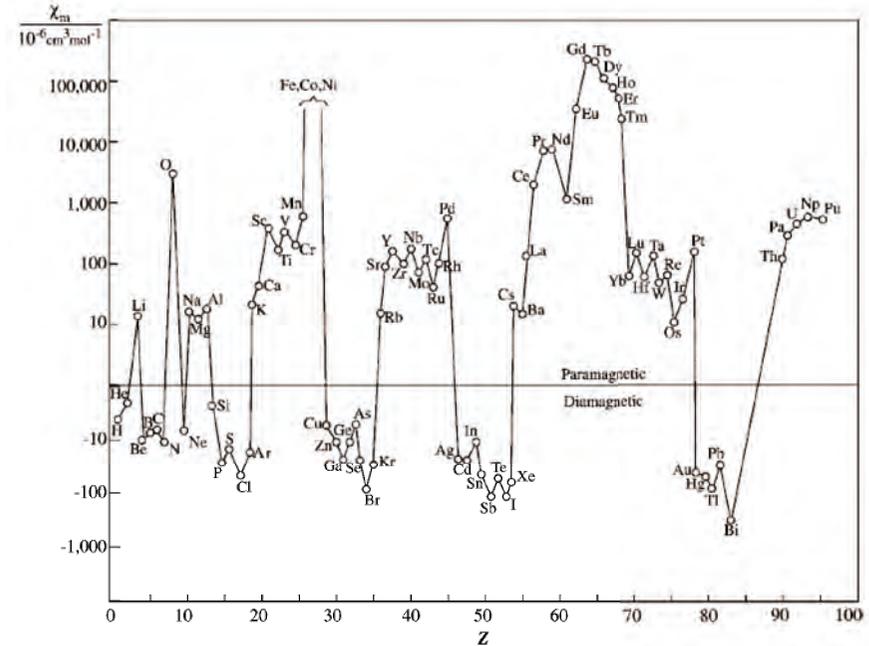
Pour ces matériaux à réponse faible, la définition de H permet d'obtenir

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad \vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$$

On définit la perméabilité magnétique $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$

Et la perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1 + \chi_m$

Susceptibilité magnétique des éléments (Handbook, attention échelle log signée)



Tous les corps présentent un diamagnétisme, mais un grand nombre présente du paramagnétisme, qui masque le diamagnétisme dès qu'il est présent (métaux tels Li, Na, K, Ca, Mg, ou non métaux comme O2)

Quelques éléments natifs présentent une susceptibilité infinie puisqu'ils présentent une aimantation non nulle en champ nul, ce sont les ferromagnétiques (Fe, Ni, Co) à la base de la fabrication des aimants

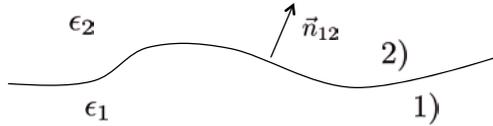
Dans le cas des matériaux ferromagnétiques, la réponse est très forte, non linéaire et dépend de l'histoire du matériau (hystérésis).

On écrit encore $\vec{B} = \mu(B)\vec{H} \quad \mu_r \gg 1$

Nous verrons que la susceptibilité dépend très fortement de la température et que celui-ci devient paramagnétique au delà de la température de Curie. Ces matériaux et leurs applications font l'objet du chapitre 4.

I.2 – Relations de passage entre deux milieux diélectriques

Avec les définitions pour la permittivité et pour la perméabilité, on obtient les relations de passage entre deux milieux LHI



En toute généralité $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \sigma_{\text{libre}}$ $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$

$$\vec{E}_{\parallel,2} - \vec{E}_{\parallel,1} = \vec{0} \quad \vec{H}_{\parallel,2} - \vec{H}_{\parallel,1} = \vec{J}_s \times \vec{n}_{12}$$

Appliqué au cas du milieu magnétique LHI :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \quad \frac{\vec{B}_{\parallel,2}}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_{\parallel,1}}{\mu_1} = \vec{J}_s \times \vec{n}_{12}$$

La composante normale de B reste continue alors que la composante tangentielle de B subit une discontinuité même en absence de courants surfaciques

I.3 – Force et moment subis dans un gradient de champ

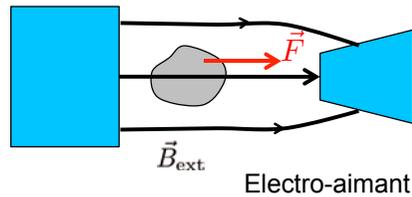
De nombreuses méthodes de mesures de perméabilité magnétique sont basés sur l'application d'une force dans un champ inhomogène

Une distribution d'aimantation va subir une force correspondant à :

$$\vec{F} = \iiint_{V_0} \vec{M} \cdot \nabla \vec{B}_{\text{ext}} d\tau$$

Et un couple au point O

$$\vec{\Gamma}_0 = \iiint_{P \in V_0} \vec{OP} \times (\vec{M} \cdot \nabla \vec{B}_{\text{ext}}) d\tau$$



Dans le cas d'un **paramagnétique** ou **diamagnétique**

On pourra écrire $\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ $\chi_m < 10^{-3}$

$$\vec{F} \simeq \iiint_{V_0} \chi_m \nabla \frac{B_{\text{ext}}^2}{2\mu_0} d\tau$$

Les paramagnétiques sont attirés vers les zones de champ fort.

Diamagnétique (bismuth), effet inverse, manip difficile car l'effet est faible.

II.4 – Mesure de susceptibilité

II.4.a – Balance de Gouy

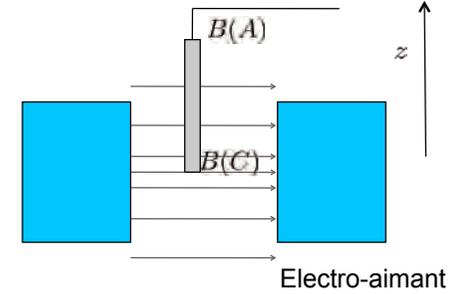
Ce dispositif de mesure de susceptibilité est basé sur l'utilisation d'un barreau de longueur AC et de petite section s, que l'on insère partiellement dans l'entrefer d'un électro-aimant

Le champ n'est inhomogène que selon z

$$\vec{F} = \iiint_{V_0} \chi_m \nabla \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

$$\vec{F} = \frac{\chi_m s}{2\mu_0} \int_C^A \frac{dB^2}{dz} dz \vec{e}_z$$

$$\vec{F} = \chi_m s \frac{B(A)^2 - B(C)^2}{2\mu_0} \vec{e}_z$$

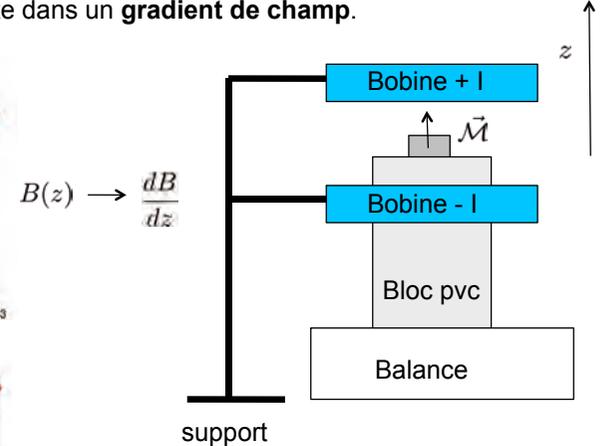
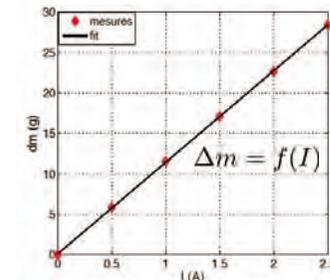
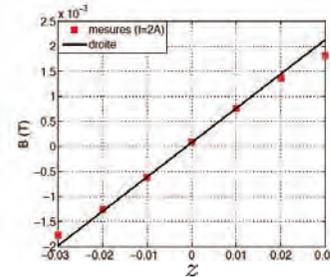


Si le champ extérieur faible devant celui dans l'entrefer $B(C) \gg B(A)$

L'expression de la force est simple $\vec{F} \simeq -\chi_m s \frac{B(C)^2}{2\mu_0} \vec{e}_z$

II.4.b – Extension à la mesure du moment dipolaire d'un aimant

Mesure de masse apparente dans un **gradient de champ**. Configuration anti-Helmoltz



$$F_z = \Delta mg = \mathcal{M} \frac{dB}{dz}$$

$$\text{Aimant champ fort} \quad \mathcal{M} = 3.2 \text{ A.m}^2$$

L'expérience est très facile à monter

II.4.c – Ascension d'un liquide paramagnétique

Une expérience de mesure de susceptibilité en montage utilise un fluide paramagnétique : une solution de FeCl3

En présence d'un champ B, une dénivellation apparaît

Equation de la statique des fluides

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \frac{d\vec{F}}{d\tau}$$

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \chi_m \vec{\nabla} \frac{B^2}{2\mu_0}$$

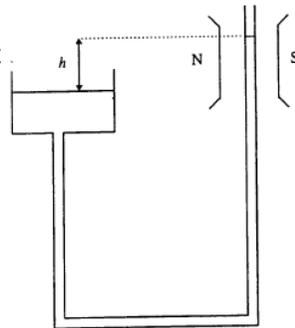
S'intègre en

$$P + \rho gz - \chi_m \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{cte}$$

La dénivellation est proportionnelle à la susceptibilité

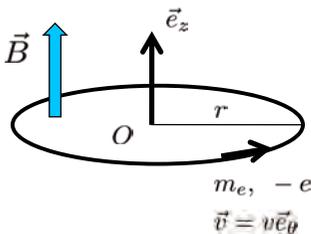
$$\rho gh = \chi_m \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Demande d'avoir calibré le champ avec une sonde à effet Hall. Attention, la surface libre doit être au milieu de l'électro-aimant, sinon l'effet est nul ... Cette expérience marche très bien.



II – Aspects microscopiques du diamagnétisme

Il s'agit du magnétisme des atomes ou molécules qui ne possèdent pas de Moment magnétique de spin. Pour expliquer l'apparition d'un moment magnétique opposé au champ appliqué, il faut s'intéresser à la variation de moment cinétique lors de l'application du champ B.



Considérons le modèle semi-classique d'un atome dont les électrons ne possèdent que du moment cinétique orbital

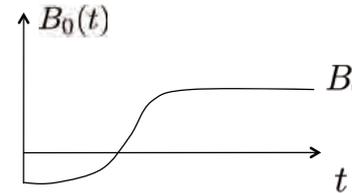
$$\vec{l} = \sum_i \vec{r}_i \times m_e \vec{v}_i$$

On suppose qu'on applique un champ vertical $\vec{B} = B_0(t)\vec{e}_z$ initialement nul

L'électron subit la force de Lorentz

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Ici $E = E_p$ est radial puisqu'il est créé par le proton, son moment est nul et on ne considère plus ce champ statique dans la suite.



Une fois le champ établi, le moment de la partie magnétique est nul

$$\vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0}$$

L'effet est donc dû au régime transitoire durant lequel il apparaît un champ

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On peut calculer ce champ en utilisant le potentiel vecteur du champ uniforme

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$

On peut aussi retrouver l'expression de E en utilisant les eq de Maxwell. B étant vertical, dB/dt aussi, le champ créé sera orthoradial (problème analogue au fil vertical parcouru par un courant. On a :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{E} = E(r)\vec{e}_\theta$$

La circulation de E le long de l'orbite circulaire donne donc

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} \quad 2\pi r E(r) = -\pi r^2 \frac{dB_0}{dt} \quad \vec{E} = -\frac{1}{2} r \frac{dB_0}{dt} \vec{e}_\theta$$

L'électron accélère le long de son orbite, et le théorème du moment cinétique donne

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times -e\vec{E} = r\vec{e}_r \times \frac{e}{2} r \frac{dB_0}{dt} \vec{e}_\theta \quad \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{e}{2} r^2 \frac{d\vec{B}}{dt}$$

L'application du champ provoque une variation de moment cinétique

$$\Delta \vec{l} = \frac{e}{2} r_\perp^2 B_0 \vec{e}_z \quad r_\perp^2 = x^2 + y^2$$

Il apparaît donc un moment magnétique induit

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{l}$$

$$\Delta \vec{m} = -\frac{e^2}{4m_e} r_\perp^2 \vec{B}_0$$

Le moment magnétique moyen est donc : $\Delta\langle\vec{m}\rangle = -\frac{e^2}{4m_e}\langle r_{\perp}^2\rangle\vec{B}_0$

Ce qui permet d'obtenir l'aimantation $\vec{M} = n_a\Delta\langle\vec{m}\rangle \simeq \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

et la susceptibilité magnétique $\chi_m = -\frac{n_a\mu_0e^2}{4m_e}\langle r_{\perp}^2\rangle$

A ce stade, il nous faut une estimation du rayon moyen de l'orbite électronique, ce que la mécanique classique ne peut pas faire car il n'y a aucune contraintes sur les orbites.

On utilise donc les données provenant de la mécanique quantique, ce qui fait que ce modèle est en fait semi-classique.

Pour l'atome d'hydrogène : $\langle r_{\perp}^2\rangle = \langle x^2 + y^2\rangle = \frac{2}{3}a_0^2$

Qui permet d'obtenir $\chi_m = -\frac{n_a\mu_0e^2}{6m_e}a_0^2$

La susceptibilité est ici bien négative, indépendante de la température (conforme à l'expérience), et proportionnelle au volume. Dans les conditions usuelles de température et de pression, pour les gaz :

Gaz (P=1 bar), Vm=24 L à 25 C $n_a \simeq 40 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} = 2.4 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$

On trouve : $\chi_m \sim -4 \cdot 10^{-10}$ $\chi_m(\text{Ne}) = -0.9 \cdot 10^{-10}$

Ce qui est le bon ordre de grandeur puisque $\chi_m(\text{Ar}) = -2.4 \cdot 10^{-10}$

$\chi_m(\text{K}) = -3.5 \cdot 10^{-10}$

$\chi_m(\text{Xe}) = -5.4 \cdot 10^{-10}$

On pourrait se contenter de ce résultat et imaginer que notre modèle classique est formidable. Ce serait probablement la conclusion au niveau L2. Toutefois un modèle classique se heurte à quelques Difficultés.

- La première est naturellement que nous avons utilisé un résultat de la mécanique quantique pour estimer le rayon des orbites.
- La seconde, plus fondamentale, tient au théorème de Bohr – van Leewen "le diamagnétisme ne peut exister sans la prise en compte des effets quantiques".

Physique statistique d'un système de particules chargé dans un champ B

- Th. de Bohr-van Leeuwen : le diamagnétisme ne peut exister sans prise en compte des effets quantiques.

La démonstration de ce résultat est assez simple et basée sur la physique statistique puisqu'il faut moyenner sur les orbites électronique.

Le hamiltonien du système de charges plongé dans un champ magnétique B dérivant du potentiel vecteur A s'écrit :

$$H = \sum \frac{(\vec{p}_i - q\vec{A})^2}{2m} + V(\{\vec{r}_i\})$$

avec pi l'impulsion de chaque charge, et V l'énergie potentielle d'interaction entre les différentes charges.

La fonction de partition est $Z = \frac{1}{N!h^N} \iint \dots \int d^3\vec{p}_i d^3\vec{r}_i e^{-\beta H}$

Elle ne dépend pas du champ magnétique : $Z(T, B) = Z(T, 0)$

L'énergie libre n'en dépend pas non plus puisque $F = -kT \log Z$

L'aimantation est donc nulle ... $M = -\frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial B} = 0$

Démonstration : Z ne dépend pas de A (ou B)

Pour chaque intégrale sur pi, faisons le changement de variable

$$\vec{\Pi}_i = \vec{p}_i - q\vec{A}$$

Le jacobien vaut 1 et l'on a pour chaque intégrale sur pi

$$\iiint d^3\vec{p}_i \exp\left(-\frac{(\vec{p}_i - q\vec{A})^2}{2mkT}\right) = \iiint d^3\vec{\Pi}_i \exp\left(-\frac{\Pi_i^2}{2mkT}\right)$$

Puisque l'impulsion n'est pas bornée dans ce système non relativiste, et que V ne dépend pas de A, les deux intégrales sont identiques et Z ne dépend pas de A (ou de B).

Traitement quantique d'une particule chargée dans un champ B

On considère toujours le cas d'une particule chargée orbitant autour d'un noyau, subissant une force dérivant d'une énergie potentielle $V(r)$. L'exemple typique est celui de l'atome d'hydrogène pour lequel 1 électron orbite autour d'un proton de charge $+e$.

L'expression du hamiltonien est toujours valide (principe de correspondance)

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + V(r) \quad \vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}_0$$

Dans le cas du traitement quantique, l'énergie du système lorsque B (donc A) est non nul n'est pas la même que celle en champ nul. Pour montrer ce résultat, on peut décomposer le hamiltonien en une partie H_0 (champ $B=0$), et traiter la partie magnétique comme une perturbation. Après quelques calculs (voir Cohen Tanoudji ou équivalent), on obtient :

$H = H_0$	$+$	H_1	$+$	H_2
$\frac{p^2}{2m} + V(r)$		$-\frac{q}{2m}\vec{L} \cdot \vec{B}_0$		$\frac{q^2 B^2}{8m}(x^2 + y^2)$
Hydrogène		Effet Zeeman Paramagnétisme		Diamagnétisme

qui fait apparaître un terme H_1 proportionnel à B, donnant une correction à l'énergie si le moment cinétique est de moyenne non nulle, et un terme H_2 faisant apparaître à nouveau le carré du rayon de l'orbite. On peut calculer les corrections $\langle H_1 \rangle$ et $\langle H_2 \rangle$

Dans le cas de l'orbitale 1s de l'atome d'hydrogène, on a :

$$\langle \psi_0 | L_z | \psi_0 \rangle = 0 \quad \text{Le moment cinétique moyenné (symétrie radiale)}$$

$$\text{Le déplacement d'énergie est } \Delta E = \frac{e^2 B^2}{8m_e} \langle \psi_0 | r_{\perp}^2 | \psi_0 \rangle = \frac{e^2 B^2 a_0^2}{12m_e}$$

$$\text{Dont on tire l'énergie libre } F(T, B) = F_0(T) + N \frac{e^2 B^2 a_0^2}{12m_e}$$

$$\text{Et l'aimantation } M = -\frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial B} = -\frac{N e^2 \mu_0 a_0^2}{6m_e} \frac{B}{\mu_0}$$

On obtient alors le même résultat que pour le modèle semi-classique. Il faut noter que c'est un coup de chance que le 1er modèle donne le bon résultat.

III – Aspects microscopiques du paramagnétisme

Ce mécanisme concerne les atomes dont les électrons possèdent un moment magnétique permanent. Il décrit la compétition entre orientation et agitation thermique et est très similaire au mécanisme de polarisation d'orientation.

Illustrons ce mécanisme en considérant le modèle d'un système de N/V électrons par unité de volume sans interactions entre eux, en contact avec un thermostat.

L'énergie d'interaction entre un moment magnétique et le champ extérieur est de la forme :

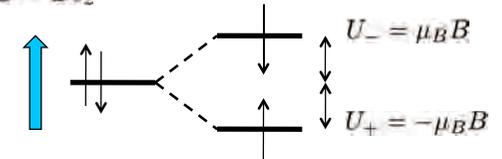
$$U_{int} = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m_z B$$

Rappel : on ne traite ici que la partie provenant de l'interaction magnétique due aux spins, en supposant les particules indépendantes. Le hamiltonien du système faisant apparaître des termes additifs indépendants, la fonction de partition se factorise et l'énergie libre apparaît comme une somme des différentes contributions.

Le hamiltonien du système est : $H = -\sum \vec{m}_i \cdot \vec{B}$

Pour un système de spin 1/2 $s_z = \pm \frac{\hbar}{2}$ $m_z = \mp \frac{e\hbar}{2m_e} = \mp \mu_B$

$$\vec{B} = B\vec{e}_z$$



Supposant le champ vertical, l'énergie de la configuration dépend de l'orientation du spin s_z

Dans le cadre de la statistique de Maxwell Boltzmann, la probabilité de chaque configuration est :

$$P_- = A \exp\left(-\frac{\mu_B B}{kT}\right) \quad P_+ = A \exp\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right)$$

On obtient A à l'aide de la condition de normalisation $P_+ + P_- = 1$

$$A = \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right)}$$

Le moment magnétique moyen est alors

$$\langle m_z \rangle = \mu_B P_+ - \mu_B P_- = \mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right)$$

Pour un système de N/V électrons par unité de volume.

$$\vec{M} = \frac{N}{V} \langle m_z \rangle \vec{e}_z \quad \langle m_x \rangle = \langle m_y \rangle = 0 \quad \vec{M} = \frac{N}{V} \mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right) \vec{e}_z$$

Cette relation semble fortement non linéaire, ce qui ne cadre pas avec ce que nous avons pu rapporter des paramagnétiques au début du chapitre.

La question est donc de savoir si le terme dans la fonction tanh est petit ou grand. Calculons un ODG pour un champ assez intense $B=1$ Tesla

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \sim 10^{-23} \text{ A.m}^2 \quad \frac{U_{int}}{kT} = \frac{\mu_B B}{kT} \sim 0.01$$

La réponse est donc linéaire :

$$\vec{M} = \frac{N \mu_0 \mu_B^2}{V kT} \vec{B} \quad \chi_m = \frac{N \mu_0 \mu_B^2}{V kT} > 0$$

Pour un gaz ($P=1$ bar) $n_a \sim 2 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ $\chi_m(\text{para}) \sim 10^{-6} \sim 10^4 \chi_m(\text{dia})$

Quelques remarques sur ce modèle :

- Le modèle retrouve la loi de Curie.
- Il n'y a pas de ferromagnétisme car les interactions spin-spin entre électrons sont négligées.
- Il existe un autre type de paramagnétisme, que l'on a pas décrit ici, celui des métaux qui est basé sur la statistique de Fermi-Dirac qui intègre le principe de Pauli.
- Dans le cas présent, on a considéré la statistique de Boltzmann pour décrire le spin des électrons car chaque spin/électron était supposé localisé au voisinage de son atome. Comme les fonctions d'onde ne se recouvrent pas, le principe d'exclusion ne s'applique pas.

Thermodynamique des systèmes magnétiques

(ce qu'il faut retenir)

I - Quel est le travail à fournir pour créer une distribution de courant ou une distribution d'aimantation ?

Nous allons voir que le travail à fournir pour faire une transformation qui modifie les champs de manière infinitésimale

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \delta A \quad \vec{B} \rightarrow \vec{B} + \delta B$$

s'écrit de manière assez simple :

$$\delta W = \iiint_{\mathcal{D}} d\tau \vec{J} \cdot \delta \vec{A} = \iiint_{\infty} d\tau \vec{H} \cdot \delta \vec{B}$$

Attention : à gauche l'intégrale court sur la distribution \mathcal{D} , à droite On intègre sur tout l'espace.

II - Peut-on écrire le premier principe de la thermodynamique pour une substance magnétique (S) plongée dans un champ extérieur B_0 ?

Nous allons voir que c'est possible et que la différentielle de l'énergie interne s'écrit en fonction des variables extensives

$$dU_S = TdS - PdV + \mu dN + \vec{B}_0 \cdot d\vec{M}$$

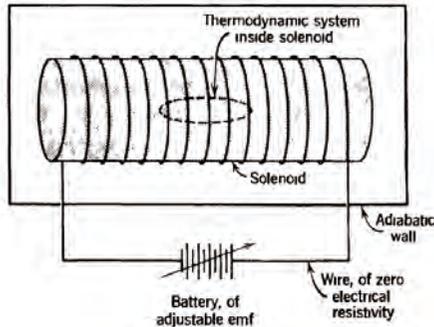
$$U = U(S, V, N, \mathcal{M}) \quad \vec{M} = \iiint_{\mathcal{V}} d\tau \vec{M} \quad \delta W_S = \vec{B}_0 \cdot d\vec{M}$$

Le dernier terme représente le travail magnétique apporté à (S).

I – Travail nécessaire pour créer une distribution de courant

Le problème qu'on considère ici est celui d'un matériau magnétique situé à proximité d'un circuit électrique parcouru par un courant I .
On se pose la question de savoir quelle énergie il faut apporter au système pour faire le champ magnétique.

La réponse n'est pas simple a priori puisque le circuit et le système magnétique sont couplés.



On note le circuit \mathcal{C}

le matériau \mathcal{S}

Augmenter le flux au travers du circuit nécessite un générateur appliquant une différence de potentiel au circuit qui égale la ddp induite.

$$e_{gen} = -e_{ind} = \frac{d\phi}{dt}$$

On a ici bien-sûr supposé que les fils du bobinage avaient une résistance nulle. Dans ce cas, le travail apporté par l'opérateur à $(\mathcal{S}+\mathcal{C})$ pour faire varier le flux s'écrit simplement

$$\delta W_{op} = I d\phi$$

On obtient une expression plus commode en introduisant B et A qui vérifient

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Le travail à fournir lors du changement $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \delta\vec{A}$

, qui correspond à la variation de flux s'écrit

$$\delta W_{op} = \oint_{\mathcal{C}} I \delta\vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{J} \cdot \delta\vec{A} d\tau$$

En généralisant à une distribution volumique de courant.

L'expression précédente est utile pour l'étude des circuits couplés. On obtient une expression plus utile en fonction de H , B , M .

$$\delta W_{op} = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \delta\vec{A} d\tau = \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta\vec{B} d\tau$$

C'est cette dernière expression que l'on en utilise en TP pour quantifier les pertes dans les matériaux magnétiques.

Démonstration (ne sera pas faite en cours) :

On se place ici dans le cas statique pour lequel on peut écrire

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

Par ailleurs la linéarité des équation de Maxwell impose que

$$\delta\vec{B} = \vec{\nabla} \times \delta\vec{A}$$

Réécrivons l'expression $\delta W_{op} = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \delta\vec{A} d\tau$

En intégrant sur le volume d'une sphère S de centre O (un point de \mathcal{D}_J) et de rayon R qui englobe entièrement la distribution de courant. Puisque $J=0$ en dehors de \mathcal{D}_J , on a l'égalité :

$$\delta W_{op} = \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{J} \cdot \delta\vec{A} d\tau = \iiint_{S(O,R)} \vec{J} \cdot \delta\vec{A} d\tau = \iiint_{S(O,R)} \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \delta\vec{A} d\tau$$

Que l'on peut écrire en utilisant la divergence d'un produit vectoriel

$$\int_{S(O,R)} d\tau \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \delta\vec{A} = \int_{S(O,R)} d\tau \left(\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \delta\vec{A}) + \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \delta\vec{A} \right)$$

Mais les champs décroissent rapidement en statique puisque l'on a

$$A \sim 1/R^2 \quad H \sim 1/R^3 \quad \text{donc} \quad \iint_{S(O,R)} dS \vec{n} \cdot (\vec{H} \times \delta\vec{A}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

En passant à la limite d'une sphère rayon tendant vers l'infini, on aura bien

$$\delta W_{op} = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \delta\vec{A} d\tau = \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta\vec{B} d\tau$$

II – Travail nécessaire pour faire varier l'aimantation

L'expression précédente est très générale et valable qu'un milieu matériel soit présent ou non.

Cependant lorsqu'un milieu matériel (S) est présent en plus de C, ce travail correspond à l'énergie apportée à la fois au circuit et à la matière. Pour connaître la part spécifiquement apportée à (S), il faut retrancher le travail que l'on apporterait à C pour créer la même distribution de courant en l'absence de (S).

Le travail apporté spécifiquement à (S) s'écrit donc

$$\delta W_S = \delta W_{op} - \delta W_{vide}$$

$$\delta W_{vide} = \iiint_{\infty} \vec{H}_0 \cdot \delta B_0 d\tau \quad \vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

Dans cette opération, on suppose que l'on maintient la distribution de courant identique lorsque l'on introduit la matière dans le système. Le découpage n'est pas aisé car les champs B et H ne sont pas les mêmes même si les sources de courant le sont. La matière contribue en effet à B et H

Le travail apporté à (S) s'écrit :

$$\delta W_S = \iiint_S \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M} d\tau$$

Avec B_0 le champ créé par la distribution en l'absence de matière.

Si les champs sont homogènes (sphère, "barreau long")

$$\delta W_S = \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M} \quad \vec{M} = \iiint_S \vec{M} d\tau$$

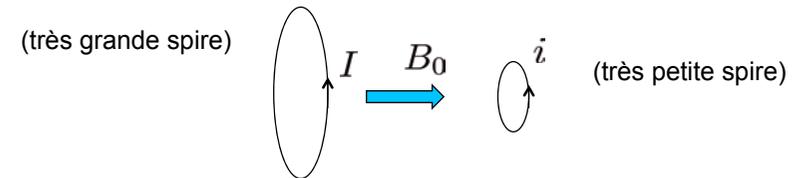
On définit alors l'énergie interne de S : $U_S(S, V, N, \vec{M})$

Fonction des variables extensives, on a :

$$dU_S = TdS - PdV + \mu dN + \vec{B}_0 \cdot d\vec{M}$$

Justification qualitative de l'expression : $\delta W_S = \vec{B}_0 \cdot d\vec{M}$

On considère ici le cas de deux circuits couplés. Une grande spire qui crée le champ B_0 et une petite spire qui modélise le milieu magnétique.



Le moment magnétique de la petite spire est $\mathcal{M} = \pi a^2 i$

Le travail apporté uniquement à S (petite spire) du fait de la présence de B_0 correspond à la variation de flux de B créé par la petite spire au travers de la grande spire lorsque l'intensité i change de di

$$\delta W_S = Id\phi_{i \rightarrow I}$$

Or on sait que pour des circuits couplés, le coefficient de mutuelle induction (noté K pour éviter les collisions de notation vérifie la propriété)

$$\phi_{i \rightarrow I} = Ki \quad \phi_{I \rightarrow i} = KI = \pi a^2 B_0$$

[Cette propriété est montrée dans des livres édités avant 2000 tels que BFR électromagnétisme T.3, Pérez électromagnétisme ou HP prépa.]

Puisque le champ créé par la grande spire est quasi uniforme à l'échelle de la petite

On obtient donc que l'énergie d'interaction s'écrit :

$$\delta W_S = Id\phi_{i \rightarrow I} = IdKi = KI di = B_0 d\mathcal{M}$$

Comment ce problème est-il traité en général à l'agreg ?

On a vu que l'expression du travail total est $\delta W_{op} = \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta \vec{B} d\tau$

Il pourrait être tentant d'utiliser la relation $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

Pour couper l'intégrale en 2 contributions, ce qui donne

$$\delta W_{op} = \mu_0 \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta \vec{H} d\tau + \mu_0 \iiint_S \vec{H} \cdot \delta \vec{M} d\tau$$

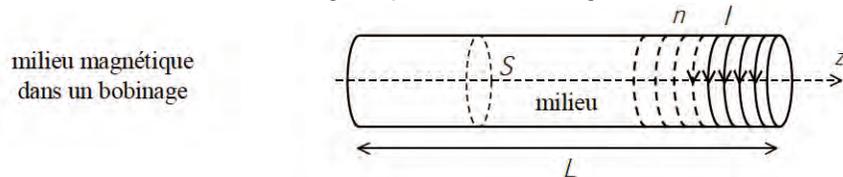
Ce résultat est mathématiquement correct, mais on ne peut pas assimiler le second terme au travail fourni à (S). Il ne découple pas les contributions car en général

$$\vec{H} \neq \vec{B}_0/\mu_0$$

Il y a cependant deux exceptions : les géométries du **solénoïde** et du **tore**

Cas très particulier (agreg A 2006, Diu-thermo) :

On considère un barreau magnétique infiniment long dans un solénoïde infini



Dans cette géométrie $\vec{B}_0/\mu_0 = nI\vec{e}_z$ et $\vec{H} = nI\vec{e}_z$

On a alors : $\frac{\delta W_{vide}}{d\tau} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H} \cdot \delta \vec{H}$

Mais le résultat général est

$$\frac{\delta W_S}{d\tau} = \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M}$$

Nous verrons en TD ses applications (désaimantation adiabatique, magnétostriction, ...)

Annexe : méthode rigoureuse pour séparer les contributions

Il est clair que l'on atteint ici la limite de ce qu'on peut vous demander de connaître pour l'agreg. Cette démonstration peut être sautée en première(s) lecture(s).

Le travail total est $\delta W_{op} = \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta \vec{B} d\tau$

L'énergie apportée est à la fois au champ et au système \mathcal{S}

Le travail apporté uniquement à \mathcal{S} s'écrit :

$$\delta W_S = \delta W_{op} - \delta W_{vide}$$

$$\delta W_{vide} = \iiint_{\infty} \vec{H}_0 \cdot \delta \vec{B}_0 d\tau \quad \vec{H}_0 = \vec{B}_0/\mu_0$$

On découple les contributions sachant que le courant est maintenu constant lorsque l'on insère (S).

Les champ B_0, H_0, B, H, M et J sont liés par les relations :

Dans le vide : $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0/\mu_0 = \vec{J} \quad \vec{H}_0 = \vec{B}_0/\mu_0$

En présence de (S) : $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad \vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$

On introduit H_m et B_m , différence entre les champs, qui vérifient :

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_0 + \vec{H}_m & (\vec{\nabla} \times \vec{H}_m &= \vec{0}) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}_m & \vec{B}_m &= \mu_0(\vec{H}_m - \vec{M}) \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_m = 0) \end{aligned}$$

On décompose :

$$\vec{H} \cdot \delta \vec{B} = \vec{H}_0 \cdot \delta \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{H}_0 \cdot \delta \vec{H}_m + \mu_0 \vec{H}_0 \cdot \delta \vec{M} + \vec{H}_m \cdot \delta \vec{B}$$

Le 2nd et 4^{ème} terme, qui font intervenir H_m , donnent une intégrale nulle sur l'espace entier.

$$\int_{\infty} (\star) d\tau \rightarrow 0 \text{ car } \vec{\nabla} \times \vec{H}_m = \vec{0} \quad \text{et} \quad HB \sim 1/R^6$$

Le fait que la distribution de courant reste identique est fondamental.

Le fait que ces intégrales tendent vers 0 quand on intègre sur tout l'espace se fait exactement de la même manière que dans le cas du résultat

$$\delta W_{op} = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \delta \vec{A} d\tau = \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta \vec{B} d\tau$$

On fait apparaître une divergence et on majore l'intégrale par un terme qui tend vers 0. Le fait que le terme additionnel soit aussi nul vient du fait que le rotationnel de H_m est nul. Cette propriété fondamentale vient du fait que la distribution de courant reste identique en l'absence ou en présence de la matière.

Le travail total peut au final se décomposer en

$$\delta W_{op} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{\infty} \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{B}_0 d\tau + \iiint_S \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M} d\tau$$

qui fait apparaître l'énergie du champ dans le vide

$$\delta W_{vide} = \iiint_{\infty} \vec{H}_0 \cdot \delta \vec{B}_0 d\tau$$

et le travail à apporter pour augmenter l'aimantation de (S)

$$\delta W_S = \iiint_S \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M} d\tau$$

Ce résultat non trivial n'a rien à voir avec le découpage naïf

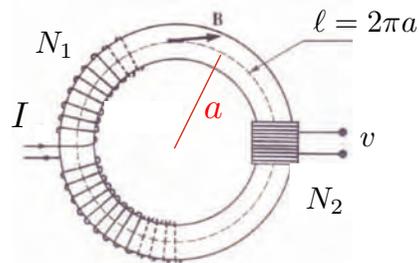
$$\delta W_{op} = \mu_0 \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta \vec{H} d\tau + \mu_0 \iiint_S \vec{H} \cdot \delta \vec{M} d\tau$$

Ch 4 : Ferromagnétisme

Il s'agit de l'étude des corps dont la réponse à un champ magnétique est grand (grande perméabilité magnétique), et qui peuvent présenter un aimantation spontanée.

I - Etude expérimentale du ferromagnétisme

La mesure expérimentale des grandes perméabilités n'est pas très difficile. Elle repose sur la réalisation d'un transformateur torique qui comporte le matériau magnétique (tore), un bobinage primaire permettant d'imposer une excitation magnétique H à l'aide d'une intensité I, et un circuit secondaire donnant accès au champ magnétique B par induction. On peut alors remonter à la relation $B=f(H)$, donc à $M=g(H)$



Au primaire on a :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = N_1 I$$

Le champ étant orthoradial

$$2\pi a H = N_1 I$$

Au la loi de Faraday donne a tension induite $v = -N_2 s \frac{dB}{dt}$

Il faut donc intégrer cette relation pour obtenir la courbe $B=f(H)$.

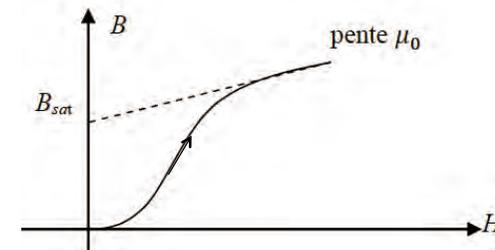
Conseil : on peut réaliser un circuit pseudo-intégrateur (à AO ou simple RC) avec une fréquence de coupure f_c basse (0.1 Hz). Si la fréquence imposée au circuit est $f \gg f_c$ alors le filtre se comporte comme un intégrateur

On peut aussi régler finement l'offset d'un intégrateur pur à AO pour que la dérive soit très lente. Ça fonctionne plutôt bien.

II – Première aimantation et hystérésis

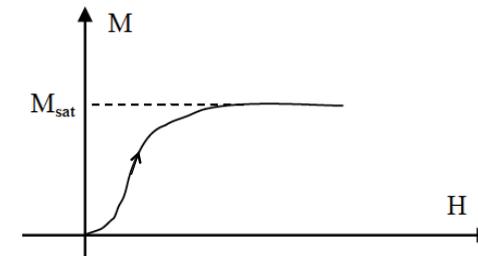
On suppose ici que le corps est initialement désaimanté. Expérimentalement on verra qu'il suffit pour ça d'appliquer un courant sinusoïdal assez fort et de diminuer continuellement son amplitude vers zéro. On aboutit à l'état initial $M=0$.

Augmentons H (donc I) à partir de l'état $M=0$



B croît de de manière non linéaire puis atteint une asymptote de pente μ_0

On peut tracer $M=g(H)$ à l'aide de la relation $B(H) = \mu_0(H + M(H))$

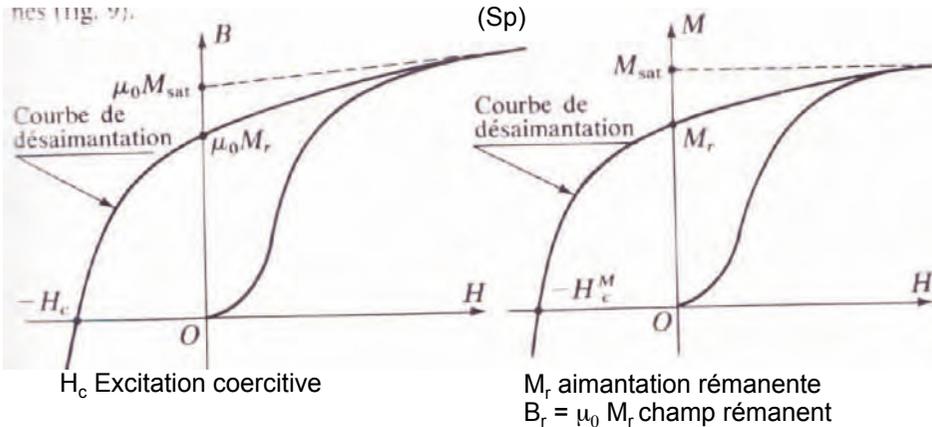


Lors de la même expérience, M croît avec H vers une limite : l'aimantation à saturation. Cette courbe s'appelle la courbe de première aimantation.

Elle permet de définir la susceptibilité magnétique $\chi_m = \frac{M(H)}{H} \gg 1$

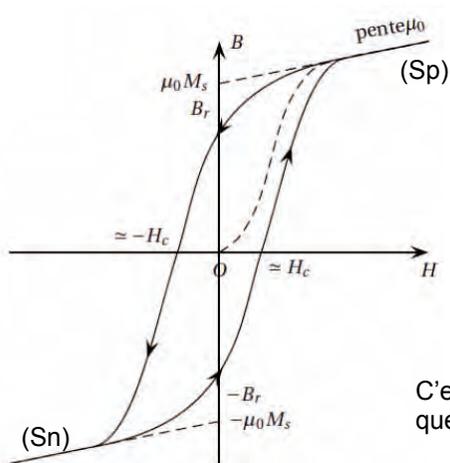
Cette fonction croît avec H, atteint un maximum puis décroît comme M_{sat}/H aux grandes excitations magnétique.

Effectuons une **désaimantation** en partant de l'état saturé précédent (Sp).
 Pour ça il suffit de diminuer le courant vers zéro.



Lorsque H (ou l'intensité I) s'annule, B et M ne s'annulent pas mais atteignent des valeurs non nulles B_r (champ rémanent) et M_r (aimantation rémanente).
 Le matériau reste aimanté et se comporte donc comme un aimant.
 Si on veut annuler cette aimantation rémanente, il faut appliquer une excitation magnétique négative H_c (excitation coercitive).

Un fois que l'on a atteint le point $(-H_c, B=0)$, on peut diminuer H dans les valeurs négatives pour atteindre le régime saturé côté négatif (Sn).

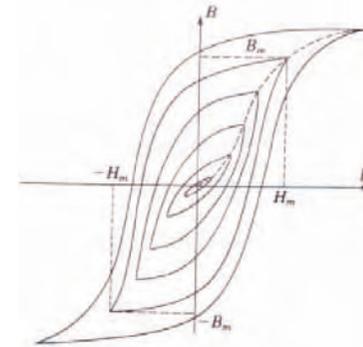


Dans ce régime, le champ B ne sature pas. Si $M=M_s$, diminuer l'intensité dans le solénoïde formé produira un champ B négatif qui continue d'augmenter en module.

Partant de (Sn), on peut augmenter l'intensité jusqu'à saturation côté Positif. Nous avons décrit un cycle et sommes revenus sur la branche (Sp).

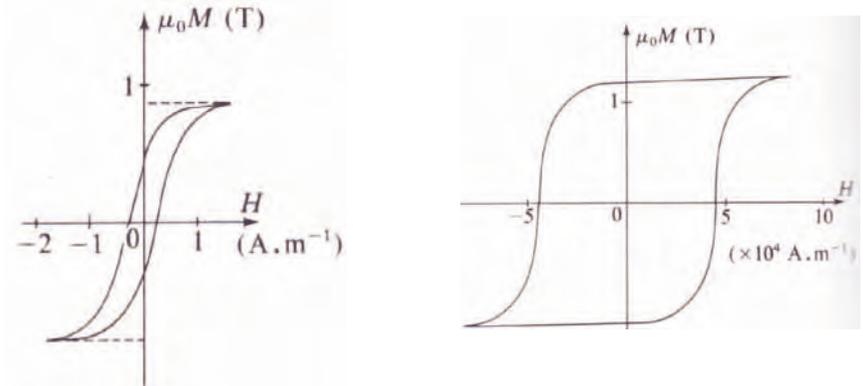
C'est le cycle d'hystérésis le plus grand que l'on puisse former.

Comportement cyclique à partir d'un maximum situé sur la courbe de 1^{ère} aimantation



Les valeurs de B_r , M_r , H_c dépendent du point de départ dans le cycle, qui couvre une aire d'autant plus petite que l'excitation atteinte est faible.
 Les valeurs tabulées correspondent à celles du cycle le plus grand.
 Pour désaimanter le matériau, il suffit de lui faire décrire des cycles de plus en plus petit, ce qui a pour effet d'annuler B_r et M_r .

Le matériau est dit **doux** si son cycle est étroit, dur si son cycle est **large**

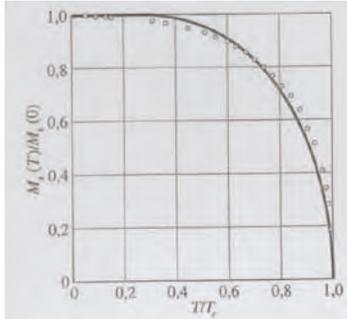


Les matériaux **doux** sont faciles à désaimanter (Fer, et alliages tels le Permalloy 80% Ni / 20% Fe). Les durs sont difficiles à désaimanter et servent d'aimant permanent. L'excitation coercitive H_c peut varier de plusieurs ordres de grandeur.

Matériau	B_r (T)	H_c ($A \cdot m^{-1}$)
Acier trempé	0,8	4,1
Alnico	0,7 à 1,3	48000
NdFeB	1,3	860000

III – Transition ferromagnétique-paramagnétique

L'aimantation à saturation dépend fortement de la température, et est nulle au delà de la température de Curie. Au delà de T_c , le corps est paramagnétique



$M_s(T)$ pour le fer (Livre de Kittel)

$T \leq T_c$ Milieu ferromagnétique

$$M_s(T) \simeq M_0 \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$$

$T \geq T_c$ Milieu paramagnétique

$$M_s(T \geq T_c) = 0$$

Température de Curie des corps purs

	T_c °K
Nickel	631,0
Fer	1 041,9
Cobalt	1 387,3

Au delà de T_c , le corps est paramagnétique et on peut mesurer sa susceptibilité en fonction de T

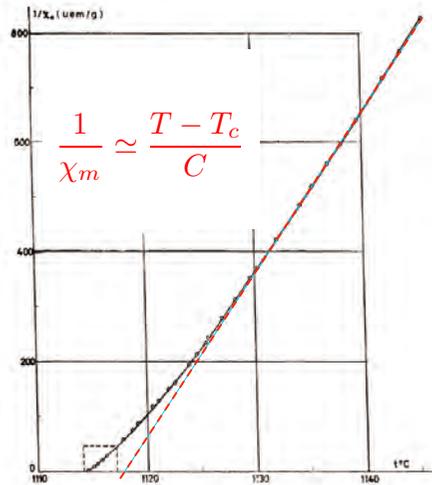


FIG. 7. — Variation de $(1/\chi_m, T)$ du cobalt.

$$M(T \geq T_c) = \chi_m \frac{B_{ext}}{\mu_0}$$

Assez loin de la transition, elle suit une loi de Curie-Weiss

$$\chi_m \simeq \frac{C}{T - T_c}$$

Proche de la transition

$$\chi_m \simeq \frac{C}{(T - T_c)^\gamma}$$

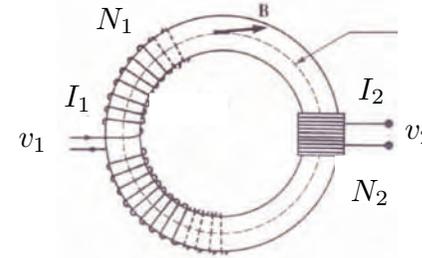
Exposant critique $\gamma \simeq 1,3$

Cas du cobalt (G. Develley, Journal de Physique, 1968)

IV – Quelques applications du ferromagnétisme

IV.1 – transformateur À voir en TP, cf Hprépa Electronique II (PSI)

C'est l'application la plus connue, qui permet d'élever ou d'abaisser une tension En fonction du rapport du nombre de spires N_1 et N_2 au primaire et au secondaire.



Modèle du transformateur parfait :

Tout le flux est canalisé $\phi_0 \simeq B \cdot s$

$$v_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -N_1 \frac{d\phi_0}{dt}$$

$$v_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -N_2 \frac{d\phi_0}{dt}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad N_1 I_1 = N_2 I_2$$

La loi des courant vient de la conservation de la puissance $P = v_1 I_1 = v_2 I_2$

C'est une approximation puisque lorsque le transformateur débite, on a (th d'Ampère) $N_1 I_1 - N_2 I_2 = \frac{\ell}{\mu_s} \phi_0$

Origine des pertes dans un transformateur réel :

-Pertes cuivre (effet Joule dans les bobinages) $P \simeq R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$

-Pertes fer $W = V_{\text{volume}} \oint_{\text{cycle}} H dB$

Travail à fournir lors d'un cycle = aire du cycle d'hystérésis

- Pertes par courant de Foucault

B dans le matériau vérifie $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \vec{B}$

Epaisseur de peau (régime sinusoïdal) $\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu\sigma\omega}}$

Cuivre à 50 Hz $\mu_0\sigma \simeq 12$

$\delta \simeq 1,5$ cm

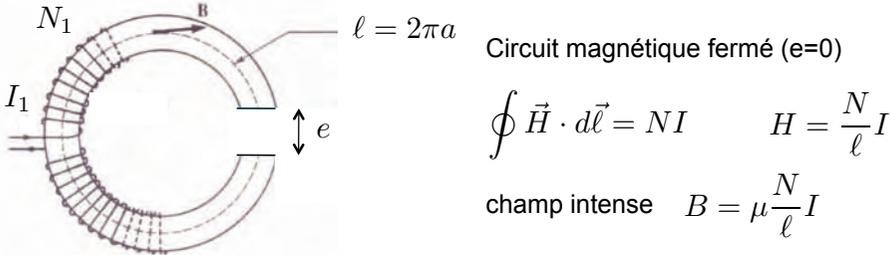
Fer à 50 Hz $\mu\sigma \simeq 1200$

$\delta \simeq 1,5$ mm

Pour éviter le problème : feuilletage du matériau, ou utilisation de ferrites (isolant)

IV.2 – production de champs intenses (électro-aimant)

Le champ produit à l'intérieur du matériau magnétique est très grand car il est multiplié par la perméabilité relative.



Le champ créé dans un entrefer e (dans l'air) sera toutefois plus faible. On l'obtient à nouveau à l'aide du théorème d'ampère en supposant que les champ restent orthoradiaux.

Circuit ouvert $e \neq 0$ $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI$ est toujours vrai

Mais $H_a = \frac{B_a}{\mu_0}$ dans l'air et $H_m = \frac{B_m}{\mu}$ dans le matériau

B est normal à l'interface air-matériau. Cette composante est continue et

$$B_a = B_m$$

Le théorème d'Ampère donne donc

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{B_a}{\mu}(\ell - e) + \frac{B_a}{\mu_0}e = NI$$

$$B_a = \frac{\mu NI}{\ell + (\mu_r - 1)e}$$

Se vérifier bien en TP

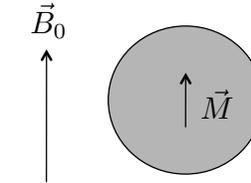
Il faut un petit entrefer pour avoir un champ fort ($\mu_r e \ll \ell$)

Dès que l'entrefer est trop grand, le champ produit n'est pas beaucoup plus grand que celui créé par une bobine.

IV.3 – Levage électromagnétique

Une des grandes application du ferromagnétisme est le levage. Supermagnete vend des aimants avec comme caractéristique la force d'adhérence (en g) ...

Examinons le cas d'une sphère magnétique qui s'aimante dans un champ B_0 . On calcule M sachant que la sphère s'aimante de manière homogène



Le champ total est la somme de B_0 et du champ créé par la sphère.

Le champ créé par la sphère est dipolaire à l'extérieur

$$\vec{B}_{ext} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{dip\grave{o}le}$$

Le champ créé par M est homogène à l'intérieur (ch 1)

$$\vec{B}_{int} = \vec{B}_0 + \frac{2}{3}\mu_0\vec{M} \quad (1)$$

A ce stade on ne connaît pas M , qui dépend de B_0 du matériau.

On doit donc utiliser la perméabilité qui lie B à H et M dans le matériau

$$\vec{H}_{int} = \frac{\vec{B}_{int}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}_{int}}{\mu} \quad (2)$$

qui montre que $\vec{B}_{int} = \frac{\mu_r}{\mu_r - 1}\mu_0\vec{M}$

En utilisant la relation (1), on trouve alors que

$$\vec{M} = \frac{3}{\mu_0} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \vec{B}_0 \quad \vec{B}_{int} = \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0} \vec{B}_0$$

Comme dans l'exemple de la sphère polarisée que B_r/B_0 et M/B_0 saturent dès que la perméabilité est grande

Le moment dipolaire d'une sphère de forte perméabilité sera $\vec{M} \simeq V_{ol} \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$

Si B_0 n'est pas uniforme, la force exercée est alors $\vec{F} = \vec{M} \cdot \vec{\nabla} \vec{B}_0 \simeq V_{ol} \vec{\nabla} \frac{B_0^2}{2\mu_0}$

Prenons un aimant qui créé un champ de $B_0=1T$ sur une échelle caractéristique $\ell_{B_0} = 1 \text{ cm}$

$$\frac{F}{V} \simeq \frac{B_0^2}{2\ell_{B_0}\mu_0} \simeq 10^7 - 10^8 \text{ N.m}^{-3}$$

Cette densité volumique de force est nettement plus grande que pour la gravité $\frac{F_{grav}}{V} = \rho g \simeq 10^5 \text{ N.m}^{-3}$

V – Interprétation microscopique du ferromagnétisme

Le paramagnétisme a été interprété dans le cadre d'un système de particules indépendantes. Dans ce cadre, on trouve que i) l'aimantation est nulle si $B=0$.
ii) il n'y a pas de transition de phase, le matériau paramagnétique à toute température.

Comme dans le cas de la thermodynamique des gaz, il faut tenir compte des interactions entre particules afin de rendre compte des comportements observés.

V.1 Modèle de champ moyen

Pour tenir compte de l'interaction entre atomes dans le matériau ferromagnétique, on suppose que le champ vu par un site est

$$\vec{B}_{eff} = \vec{B} + \vec{B}_m = \vec{B} + \lambda\mu_0\vec{M}$$

B_m est appelé champ moléculaire (Weiss 1907). La constante est caractéristique du matériau.

Le ferromagnétisme est alors traité dans une théorie de champ moyen. On réutilise l'expression obtenue pour le paramagnétisme avec l'expression du champ effectif.

Dans le cas du modèle à deux niveaux vu au chapitre précédent, on obtient :

$$M = n\mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B}{kT}(B + \lambda\mu_0 M)\right)$$

M est solution d'une équation auto-cohérente dont on doit trouver les solutions possibles en fonction de la température T .

Pour résoudre cette équation, il est commode de réécrire l'équation précédente sous la forme générique :

$$\frac{M}{M_s} = \tanh\left(\frac{T_c}{T} \frac{M}{M_s} + \frac{\mu_B B}{kT}\right)$$

Qui fait intervenir l'aimantation maximale $M_s = n\mu_B$

Et la température de Curie $T_c = \lambda\mu_0 \frac{n\mu_B^2}{k}$

Remarque : pour un modèle différent d'un système de spins $\frac{1}{2}$, on aurait une fonction différente de $\tanh(x)$, mais l'approche reste similaire.

Pour résoudre l'équation précédente, on pose alors

$$m = \frac{M}{M_s} \quad \xi = \frac{T_c}{T} m + \frac{\mu_B B}{kT}$$

De telle sorte que la solution est l'intersection des courbes

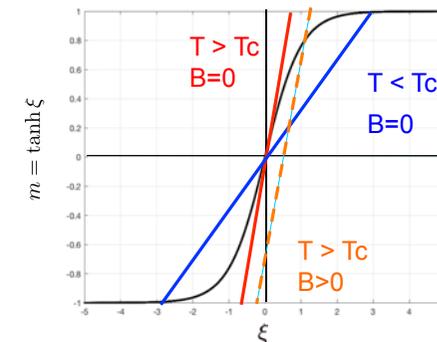
$$m = \tanh \xi \quad m = \frac{T}{T_c} \xi - \frac{\mu_B B}{kT_c}$$

La solution s'obtient alors graphiquement.

Dans le cas $B=0$ (champ nul imposé)

$T > T_c$, 1 solution $M=0$

$T < T_c$, 3 solutions.
 $M=0$ (instable)
 M non nul



Il y a deux cas de figure :

- Haute température, $T > T_c$, il n'existe qu'une intersection qui correspond à la solution $M=0$. L'aimantation est nulle en champ nul. Le milieu ne présente pas d'aimantation spontanée, il est paramagnétique.

- Basse température, $T < T_c$ la pente de la droite est inférieure à 1 et il existe 3 solutions. $M=0$ (qui est instable), et deux solutions opposées M et non nulles. Le milieu présente une aimantation spontanée, il est ferromagnétique.

Dans le cas B non nul

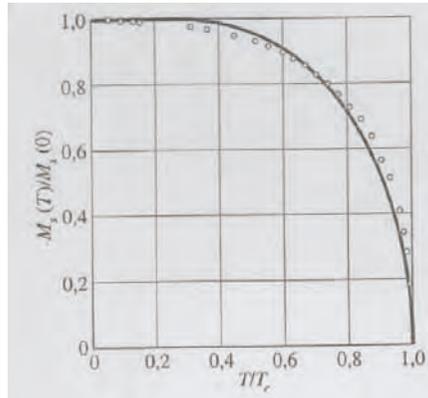
Si B est positif, la droite d'équation $m = \frac{T}{T_c} \xi - \frac{\mu_B B}{kT_c}$ est translatée vers le bas.

Dans le cas $T > T_c$ (courbe en pointillés), il n'y a une intersection avec la courbe $\tanh(\xi)$ qui donne $M > 0$. On retrouve que M est non nul si B est non nul (paramagnétisme).

Dans le cas $T < T_c$, il y a 3 solutions non nulles, la solution M dans le même sens que B est favorisée thermodynamiquement.

V.2 Comparaison du modèle de champ moyen aux mesures

Evolution de l'aimantation à saturation en fonction de la température



Au voisinage de la transition

$$\frac{M}{M_s} = \tanh\left(\frac{T_c}{T} \frac{M}{M_s}\right)$$

$$\tanh x \simeq x - \frac{x^3}{3}$$

$$M \simeq \sqrt{3} M_s \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$$

Susceptibilité dans le domaine paramagnétique : réponse en champ imposé

G. Develey, Journal de Physique, 1968

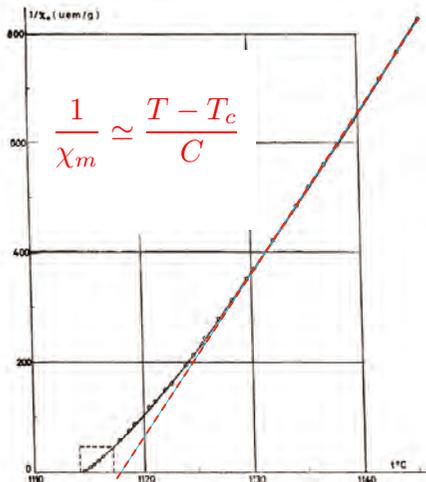


FIG. 7. — Variation de $(1/\chi_m, T)$ du cobalt.

Le modèle de champ moyen permet donc de reproduire qualitativement les observations expérimentales, mais il n'est pas bon proche de la transition.

Pour $T > T_c$, M est faible, on peut linéariser l'éq. au premier ordre

$$\frac{M}{M_s} = \tanh\left(\frac{T_c}{T} \frac{M}{M_s} + \frac{\mu_B B}{kT}\right)$$

pour obtenir

$$\frac{M}{M_s} \simeq \frac{T_c}{T} \frac{M}{M_s} + \frac{\mu_B B}{kT}$$

Le modèle permet de reproduire la loi de Curie-Weiss

$$M \simeq \frac{C}{T - T_c} \frac{B}{\mu_0} \quad C = \frac{M_s \mu_0 \mu_B}{k}$$

V.3 Origine de l'interaction

Ce n'est pas une interaction dipôle-dipôle. Si l'on considère deux dipôles magnétique distants d'une maille et que l'on estime leur énergie d'interaction

$$\vec{m}_1 \uparrow \quad \leftarrow a \rightarrow \quad \vec{m}_2 \uparrow \quad U_{\text{int}} \simeq -\vec{m}_1 \cdot \vec{B}_2$$

On trouve que le champ exercé par un atome sur son voisin est de l'ordre de 1 Tesla

$$m \simeq \mu_B = \frac{e\hbar}{m_e} \sim 10^{-23} \text{ A.m}^2 \quad B \simeq \frac{\mu_0 \mu_B}{2\pi a^3} \sim 1 \text{ T}$$

Cette énergie est donc faible devant l'agitation thermique, elle est trop faible pour conduire à un ordre magnétique. $\frac{U_{\text{int}}}{kT} \sim 0.01$

L'origine de l'interaction réside dans l'interaction d'échange, qui provient en l'interaction électrostatique de répulsion entre électrons (négligée en 1^{ère} approximation), combinée au principe d'exclusion de Pauli. Elle se met sous la forme effective :

$$U_{ij} = -J \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \quad \vec{m}_i = \mu_B \vec{s}_i$$

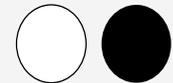
Si $J > 0$, il y a un gain en énergie lorsque les moments (ou spins) sont de même sens. Pour $J < 0$, il y a anti-alignement (ferrimagnétisme).

Expliquons avec les mains pourquoi les états ++, --, +- ne correspondent pas à la même énergie. Supposons pour cela que l'on ait que deux électrons chacun au voisinage d'un atome formant une molécule de type H₂.

Le hamiltonien d'interaction entre électrons est $H_{\text{int}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

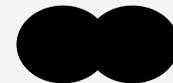
Si les électrons ont même spin (++ ou --)

la partie spatiale de la fonction d'onde est antisymétrique (Pauli) et s'annule entre les protons. Les e- ne peuvent être au même endroit puisqu'ils ont même spin. <Hint> sera faible car r_{12} est assez grand.



Si les électrons ont des spins différents (+- ou -+)

la partie spatiale est alors symétrique (Pauli) et les e- peuvent se trouver au même endroit. <Hint> est plus grand car r_{12} peut être plus faible.



Les états ++/-- sont plus bas en énergie que les états +/-+, ce qui peut se décrire en utilisant $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$

Remarque : on voit que J dépend fortement de la géométrie du matériau et de ses fonctions d'onde. Il y a donc une grande variété de situations.

Dans ce cadre, le système magnétique peut être décrit par le Hamiltonien de Heisenberg :

$$\vec{m}_i = \mu_B \vec{s}_i \quad H = -\mu_B \sum_i \vec{s}_i \cdot \vec{B}_0 - J \sum_{\{paires\}} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \quad (1)$$

pour lequel la somme de droite fait intervenir les paires de moments magnétiques.

H peut s'écrire sous une forme faisant apparaître ce qui ressemble à un champ B effectif :

$$H = -\mu_B \sum_i \vec{s}_i \cdot \left(\vec{B} + \frac{J}{\mu_B} \sum_{j \neq i} \vec{s}_j \right) + cte \quad (2)$$

L'aimantation est lié à la moyenne $\langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \vec{s}_i$

par la relation $\vec{M} = n\mu_B \langle \vec{s} \rangle$

Pour traiter le problème par une approche de type champ moyen, on suppose que l'orientation des moments magnétiques ne fluctue pas. La somme de droite s'écrit à l'aide du nombre de voisins N_v

$$\sum_{j \neq i} \vec{s}_j \simeq N_v \langle \vec{s} \rangle$$

On aboutit à une expression pour le champ effectif

$$\vec{B}_{\text{eff}} = \vec{B} + \lambda \mu_0 \vec{M} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{J N_v}{n \mu_B^2 \mu_0}$$

Pour calculer la constante (notée K) présente dans le hamiltonien (2) car on a compté des paires deux fois, il suffit de calculer la moyenne de l'expression (1) et de l'expression (2) dans l'approximation C.M.

Dans le cas (2), on a : $\langle H \rangle = -\mu_B N \langle \vec{s} \rangle \cdot \vec{B}_0 - J N N_v \langle \vec{s} \rangle^2 + K$

Dans le cas (1), il n'y a que $N/2 \cdot N_v$ paires

$$\langle H \rangle = -\mu_B N \langle \vec{s} \rangle \cdot \vec{B}_0 - J N N_v / 2 \langle \vec{s} \rangle^2$$

La véritable expression du Hamiltonien C.M. fait donc intervenir une constante, qui n'en est pas vraiment une puisqu'elle dépend de l'inconnue du problème, M.

$$H = -\mu_B \sum_i \vec{s}_i \cdot (\vec{B}_0 + \lambda \mu_0 \vec{M}) + J \frac{N N_v}{2} \left(\frac{M}{n \mu_B} \right)^2$$

C'est la bonne expression si l'on veut comprendre quelles solutions pour M sont stables, et lesquelles sont instables.

V.3 Comment connaître la stabilité des solutions ?

La température et le volume sont imposés. L'énergie libre $F = -kT \log Z$ est donc le potentiel thermodynamique du système.

F atteint un minimum à l'équilibre sachant que T et V sont fixes. M apparaît comme un degré de liberté interne au système qui s'ajuste pour assurer que F atteigne bien un minimum sous ces contraintes.

Un état d'équilibre stable satisfait donc à :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial M} \right)_{T,V} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial M^2} \right)_{T,V} \geq 0$$

Puisqu'on connaît l'expression du hamiltonien, on connaît la fonction de partition Z. Dans le cadre de la statistique de Boltzmann on a donc :

$$Z = (\exp(-H(s = +\hbar/2)/kT) + \exp(-H(s = -\hbar/2)/kT))^N$$

L'énergie libre est donc :

$$F = -NkT \log \left(2 \exp \left(-J \frac{N_v}{2kT} \left(\frac{M}{n\mu_B} \right)^2 \right) \cosh \left(\frac{\mu_B B_{\text{eff}}}{kT} \right) \right)$$

Comme $\log(\exp(x))=x$, l'expression se simplifie en :

$$F = NkT_c \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{M}{M_s} \right)^2 - \frac{T}{T_c} \log \left(2 \cosh \left(\frac{T_c}{T} \frac{M}{M_s} \right) \right) \right\}$$

Avec les notations $M_s = n\mu_B$ $kT_c = J N_v$

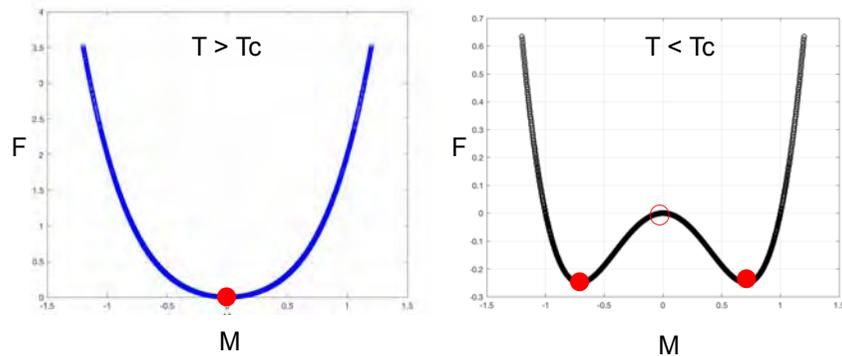
La condition d'équilibre $\left(\frac{\partial F}{\partial M} \right)_{T,V} = 0$ **donne l'équation d'autocohérence**

$$\frac{NkT_c}{M_s} \left(M - M_s \tanh \left(\frac{T_c}{T} \frac{M}{M_s} \right) \right) = 0$$

On retrouve donc le résultat établi en section V.1. Une seule solution $M=0$ pour $T > T_c$ et trois solutions [$M=0$ et deux solutions opposées non nulles] pour $T < T_c$.

La différence majeure par rapport au traitement simple fait auparavant est que la connaissance de F permet de connaître la stabilité des solutions.

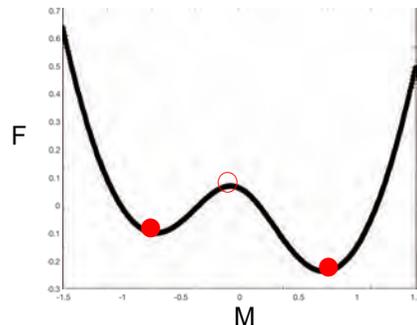
On peut tracer la forme $F(M, T \text{ fixe})$ pour $T > T_c$ (gauche) et $T < T_c$ (droite)



Pour $T > T_c$, $F(M, T \text{ fixe})$ ne présente qu'un extremum en $M=0$: C'est un minimum, la dérivée seconde est manifestement positive, cette solution est stable.

Pour $T < T_c$, $F(M, T \text{ fixe})$ présente trois solutions possibles : La solution $M=0$ est un maximum local, la dérivée seconde est négative et cette solution est instable. Les solutions (M non nul) correspondent à des minima sont aussi stables l'une que l'autre.

En champ non nul (avec ici $B_0 > 0$), la solution $M > 0$ est la plus stable. La solution négative est aussi thermodynamiquement possible, mais elle est métastable et il faut regarder la profondeur du puits pour savoir si elle est observable.



Remarque : il est très rare de pouvoir calculer explicitement F , et la transition est général décrite de manière phénoménologique à l'aide d'un développement à la Landau.

Nous verrons en TD comment la transition ferro-para est bien décrite par un développement de la forme :
$$F/V = a(T - T_c)M^2 + bM^4$$

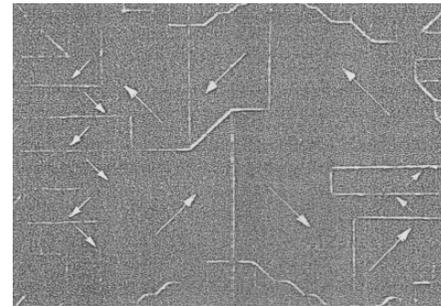
En exercice : on peut montrer que l'énergie libre C.M. se met sous cette forme lorsque la température est proche de T_c (M est alors petit).

VI Aimantation rémanente

Dans le cadre des modèles développés, puisque la température ambiante est telle que $T \ll T_c$, les matériaux magnétiques devraient présenter une aimantation rémanente proche de la saturation. Or on observe que ce n'est pas du tout le cas, et l'on a même souvent $M_r \ll M_s$...

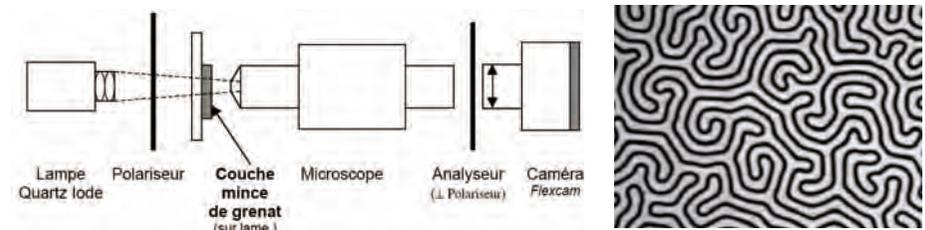
Le premier à avoir proposé une raison est Pierre Weiss (1906), qui a supposé que le matériau est en fait formé de petits domaines au sein desquels l'aimantation est quasiment saturée, mais dont l'orientation est aléatoire au sein du matériau.

Ces domaines ont par la suite été observés expérimentalement. Par exemple dans le cas du fer, on peut visualiser les domaines par la méthode des poudres (image issue du livre de Kittel).



Sur un domaine, le champ est quasiment homogène mais il varie beaucoup à l'interface entre domaines (parois de Bloch). Le gradient de B_y est fort et une poudre magnétique s'y concentre. Les flèches correspondent ici au sens de déplacement des parois lors de l'application d'un champ magnétique extérieur.

Une méthode plus moderne (voir fascicule de TP) utilise la rotation faraday de la lumière polarisée au travers d'une fine couche de Grenat ferrimagnétique.

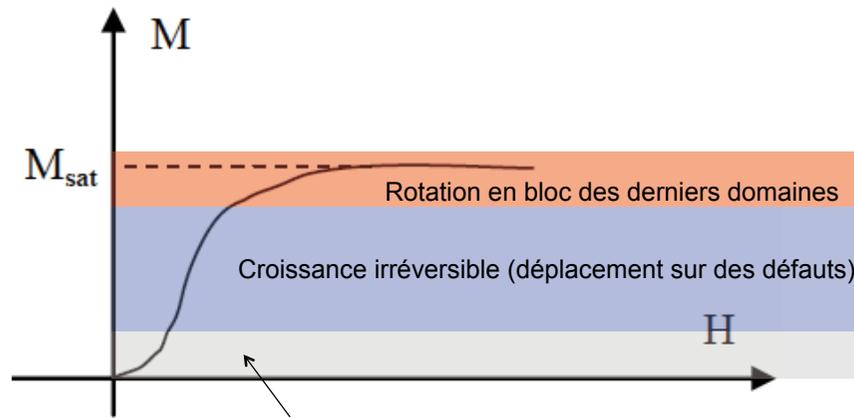


Cette expérience qualitative (ne pas faire en montage) permet une observation directe des parois de Bloch au microscope entre un polariseur et un analyseur si on applique un champ magnétique fort à l'échantillon. Utiliser une bobine à noyau de fer en forme de pointe.

VI De l'origine de l'hystérésis

Comme souvent lorsqu'on le rencontre, le phénomène d'hystérésis provient des défauts du système (défauts cristallins ici, rugosités pour l'angle de mouillage en capillarité ...).

Lorsqu'on applique un champ magnétique à un matériau et que l'on l'aimante, plusieurs phénomènes se produisent de manière successive.



Croissance réversible de domaines d'orientation favorable

Au départ, l'action de B ne fait que déplacer des parois de Bloch de manière réversible, certains domaines favorisés grossissent et d'autres rapetissent.

Les parois finissent par accrocher des défauts et il faut augmenter un peu le champ pour réussir à passer ce qui s'apparente à une barrière. Une fois passé cette barrière, la paroi reste accrochée sur la défaut et tout ne revient pas arrière lorsqu'on coupe le champ. La croissance est irréversible.

Ce mécanisme n'est cependant pas suffisant pour réussir à saturer l'échantillon. Certains domaines restent aimantés dans une direction autre que celle du champ de sorte que les moments dipolaires subissent un couple magnétique. Lorsque le champ est suffisamment intense, ces le moment dipolaire des atomes au sein des domaines finissent par tourner en bloc et l'aimantation sature.

VII De l'origine des domaines de Weiss

Si l'état d'équilibre d'un système magnétique résulte de la minimisation du potentiel thermodynamique du système, le processus est complexe.

Il y a en premier lieu un gain en énergie dans le volume de chaque domaine, stabilisant, due à l'orientation collective au sein des domaines. Avec une telle Observation, on devrait avoir donc observer des matériaux saturés.

Toutefois une orientation globale conduit à une énergie globale très élevée puisque le système produit un champ dans tout l'espace.

On peut s'en rendre compte en étudiant l'énergie de la distribution

$$U = \iiint_{\infty} \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} dV \quad U = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\infty} B^2 dV - \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \vec{M} \cdot \vec{B} dV$$

Qui fait apparaître une énergie du champ magnétique créé ainsi que le gain en volume du fait d'une orientation favorable de l'aimantation.

dipôle $1/r^3$

quadrupôle $1/r^4$

Domaine fermé
 $B_{ext}=0$

Avec des distributions d'aimantations identiques, on peut diminuer beaucoup l'énergie du champ B en renversant l'aimantation, i.e. en créant des domaines.

Ces domaines font naturellement apparaître des parois qui ont elles aussi un coût énergétique (proportionnel à la surface). De la compétition entre gain en volume et coût en surface, des défauts, il résultera une taille caractéristique qui sera la taille typique d'un domaine pour le corps considéré ...

Fermeture des domaines dans du fer très pur

Dans un barreau très pur et sans défaut, la fermeture idéale des domaines peut être observée.



Figure 34. Domaine de fermeture à l'extrémité d'un whisker de fer monocristallin. La surface est un plan (100); l'axe du whisker est [001] (photographie de R.V. COLEMAN, C.G. SCOTT et A. SUD).