

Exercices de capillarité

Le niveau des exercices est indiqué par les étoiles. La correction se trouve dans le polycopié de cours, il faut juste l'y trouver.

1 Équation d'adsorption de Gibbs (*)

On cherche à décrire les propriétés thermodynamiques d'un système constitué de deux phases α et β séparées par une interface de surface Σ . On notera U l'énergie interne, V le volume, N_i le nombre de particules de l'espèce i , S l'entropie, T la température, p la pression, μ_i le potentiel chimique de l'espèce i et $\gamma_{\alpha\beta}$ la tension de surface.

1. Pour une grandeur extensive Z quelconque, donner la relation entre les valeurs de Z dans la phase α (Z_α), dans la phase β (Z_β), sur la surface Σ (Z_Σ) et dans le système total constitué des deux phases et de la surface $\{\alpha + \beta + \Sigma\}$ (Z).
2. Pour une grandeur intensive Y quelconque, donner les relations entre les valeurs de Y dans la phase α (Y_α), dans la phase β (Y_β), sur la surface Σ (Y_Σ) et dans le système total constitué des deux phases et de la surface $\{\alpha + \beta + \Sigma\}$ (Y) à l'équilibre thermodynamique. On négligera la courbure de l'interface.
3. On introduit le grand potentiel de la surface $J_\Sigma = U_\Sigma - TS_\Sigma - \sum_i \mu_i N_{i,\Sigma}$. Calculer dJ_Σ .
4. En utilisant l'extensivité de J_Σ , montrer que $J_\Sigma = \gamma_{\alpha\beta}\Sigma$, où on précisera les variables dont dépendent la tension de surface et J_Σ .
5. En utilisant les résultats des deux questions précédentes, en déduire la relation de Gibbs-Duhem vérifiée par la tension de surface :

$$d\gamma_{\alpha\beta} = -s_\Sigma dT - \sum_i \Gamma_i d\mu_i, \quad (1)$$

où $s_\Sigma = S_\Sigma/\Sigma$ désigne l'entropie de la surface par unité de la surface, et $\Gamma_i = N_{i,\Sigma}/\Sigma$ la densité surfacique d'entités i adsorbées sur la surface.

6. Que peut-on en déduire quant à la variation de la tension de surface avec la température ?
7. On suppose maintenant que la phase α est de l'eau contenant des surfactants dont la concentration libre en solution est c (nombre de molécules de surfactant par unité de volume), et que la phase β est de l'air. Rappeler l'expression du potentiel chimique des surfactants dans l'hypothèse d'une solution idéale.
8. En déduire l'équation d'adsorption de Gibbs :

$$\frac{c}{k_B T} \left. \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial c} \right|_T = -\Gamma_s(c), \quad (2)$$

où k_B désigne la constante de Boltzmann, et Γ_s la densité surfacique de surfactants adsorbés sur la surface eau-air.

2 Modèle sur réseau d'une interface et isotherme de Langmuir (*)

On considère une interface entre deux phases α et β séparées par une interface. On suppose que des surfactants sont présents dans la phase α et peuvent venir s'adsorber sur la surface. Pour décrire le mécanisme d'adsorption, on considère que la surface présente des sites avec une densité surfacique Γ_m (ce qui représente la capacité totale de l'interface), correspondant à un nombre total $\Gamma_m \Sigma$ de sites sur la surface. On prendra l'origine des énergies pour un surfactant isolé dans le volume. On négligera les interactions entre surfactants et avec le solvant et on notera $-\varepsilon_0$ l'énergie d'un surfactant adsorbé, avec $\varepsilon_0 > 0$. Enfin, on supposera les sites d'adsorption indépendants et qu'un seul surfactant peut s'adsorber sur un site de la surface.

1. Justifier le signe de ε_0 .

- Calculer la fonction de partition grand canonique Ξ de l'interface. On notera μ_s le potentiel chimique du surfactant.
- En déduire la probabilité qu'un site soit occupé.
- Rappeler l'expression du potentiel chimique μ_s des surfactants en fonction de leur concentration c en solution dans la limite des solutions idéales.
- Montrer alors que la densité surfacique $\Gamma_s(c)$ de surfactants adsorbés sur la surface est donnée par la formule de Langmuir

$$\Gamma_s(c) = \Gamma_m \frac{c/c_0(T)}{1 + c/c_0(T)}, \quad (3)$$

où $c_0(T)$ est une fonction qu'on explicitera. Commenter.

- On admet (voir l'exercice précédent) que la tension de surface est donnée par la relation $\frac{c}{k_B T} \left. \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial c} \right|_T = -\Gamma_s(c)$. En déduire $\gamma_{\alpha\beta}(c)$, puis $\gamma_{\alpha\beta}(\Gamma_s)$. Commenter.

3 Formule de Kelvin de la pression de vapeur saturante (*)

On considère une goutte de liquide d'un corps pur de rayon r à l'équilibre dans une atmosphère gazeuse du même corps pur à la température T et à la pression p_0 .

- Rappeler la relation entre la pression dans la goutte de liquide p_l , p_0 et r à l'équilibre. On notera γ_{lg} la tension de surface à l'interface liquide-gaz. Comment s'appelle cette loi?
- Donner une condition sur les potentiels chimiques μ_l et μ_g pour que la goutte de liquide soit à coexistence avec l'atmosphère?
- Que devient cette condition pour une phase de liquide macroscopique séparée de l'atmosphère par une interface plane? On notera $p_{\text{sat}}(T)$ la pression de vapeur saturante dans le cas d'une interface plane.
- Démontrer que $\left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_T(T, p) = v(T, p)$, où v désigne le volume par particule. Préciser un ordre de grandeur de v_l et v_g .
- En déduire la formule de Kelvin donnant la pression de coexistence entre la goutte de liquide et la vapeur :

$$p_0 + \frac{2\gamma_{lg}}{r} - p_{\text{sat}}(T) = \frac{k_B T}{v_l} \ln \left(\frac{p_0}{p_{\text{sat}}(T)} \right). \quad (4)$$

On supposera pour cela que le gaz est parfait et que le liquide est peu compressible, de sorte qu'on peut négliger les variations de v_l .

- À quelle condition les deux hypothèses précédentes sont-elles légitimes?

4 Forme d'un film de savon entre deux anneaux coaxiaux (**)

On considère deux anneaux coaxiaux de même rayon R et initialement collés. On les trempe dans une eau savonneuse, puis on les écarte d'une hauteur h .

- On paramétrise la surface réalisée par les interfaces eau-air par le rayon $\varrho(z)$ en coordonnées cylindriques. Quel principe général de capillarité permet de déterminer $\varrho(z)$ à l'équilibre?
- Exprimer la surface totale Σ d'une interface eau-air en fonction de $\varrho(z)$ et de $\varrho'(z)$, sa dérivée par rapport à z .

- Obtenir alors l'équation $\varrho(z)^2 \frac{d^2 \ln \varrho}{dz^2}(z) = 1$.

- En déduire une intégrale première. On notera ρ_{min} le rayon minimal du film de savon.
- À partir des résultats des deux questions précédentes, en déduire que $\varrho''(z) = \varrho(z)/\rho_{\text{min}}^2$.
- Obtenir la fonction $\varrho(z)$ et préciser ses conditions aux limites.

7. Montrer que le film de savon n'existe que si h/R est inférieur à une valeur critique. On pourra s'aider d'un raisonnement graphique. Commenter.
8. Retrouver les résultats de cet exercice à partir de la loi de Laplace. On rappelle à toutes fins utiles que la courbure de l'interface est donnée par $\mathcal{C}(z) = \nabla \cdot \mathbf{n}(z)$, où $\mathbf{n}(z)$ désigne le vecteur unitaire normal à l'interface dirigé vers l'extérieur.

5 Cohésion capillaire (**)

On étudie l'influence d'une goutte de liquide entre deux solides à l'équilibre, cette situation étant encore appelée pont capillaire. Nous noterons γ_{lg} , γ_{ls} et γ_{sg} les tensions de surface aux interfaces liquide-gaz (atmosphère), solide-liquide et solide-gaz respectivement, et θ l'angle de mouillage de la ligne triple.

1. Retrouver la relation entre θ et les tensions de surface à l'aide d'un bilan mécanique. Comment s'appelle cette relation ?
2. On supposera que les interfaces liquide-gaz sont faiblement courbées de sorte qu'on peut les assimiler à leurs cercles osculateurs, et on notera h la hauteur entre les deux solides. Calculer la pression p_1 dans le liquide en fonction de la pression atmosphérique p_0 et des données du problème dans l'hypothèse où le rayon moyen de la surface est très grand devant h . Donner un ordre de grandeur pour de l'eau avec $h = 10 \mu\text{m}$.
3. On veut maintenant obtenir la forme exacte du pont capillaire. En particulier, on paramétrise maintenant la surface liquide-gaz par son rayon $\varrho(z)$ en coordonnées cylindriques. Obtenir une équation différentielle vérifiée par $\varrho(z)$.
4. En déduire la relation $\frac{\varrho(z)}{\sqrt{1 + \varrho'(z)^2}} - \frac{\Delta p}{2\gamma_{lg}} [\varrho(z)^2 - \rho_{\min}^2] = \rho_{\min}$, où ρ_{\min} désigne la valeur minimale du rayon, et $\Delta p = p_1 - p_0$.
5. On va se placer dans le cas où $h \ll \rho_{\min}$ et on notera $\rho_{\max} \simeq \rho_{\min}$ le rayon maximal de l'interface. Montrer que dans ce cas on retrouve bien que dans le plan $(O, \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_z)$ les interfaces sont des cercles, dont on précisera la position des centres et le rayon. Commenter.

6 Condensation capillaire (**)

On considère un pore solide qu'on assimilera à un cylindre de diamètre d au contact d'une phase vapeur. Nous voulons montrer que la vapeur peut spontanément condenser en liquide dans le pore si le liquide est suffisamment mouillant : on parle alors de condensation capillaire. On suppose que le liquide est un corps pur. On considère que le liquide occupe le pore sur une hauteur $h \gg d$ entre le fond et le bas du ménisque, et on suppose que le liquide est à l'équilibre mécanique et thermique. On note θ l'angle de mouillage. Nous souhaitons déterminer les conditions de stabilité de la colonne de liquide. On supposera le gaz parfait et le liquide faiblement compressible (dans un sens qu'il faudra justifier plus tard).

1. On néglige l'influence de la pesanteur. En déduire la géométrie du ménisque, ainsi que sa surface Σ_{lg} . Quelle condition est imposée à d ?
2. Calculer Σ_{ls} l'aire de l'interface solide-liquide, ainsi que le volume V_1 de la phase liquide.
3. Rappeler la loi de Laplace. En déduire la pression p_1 dans la phase liquide en fonction de la pression atmosphérique p_0 et la tension de surface γ_{lg} .
4. On s'intéresse au système constitué du liquide et des interfaces solide-liquide, liquide-gaz et solide-gaz. On décrit son évolution thermodynamique par le grand potentiel $\Omega^* = U - T_0 S + p_0 V_1 - \mu_0 N_1$, où U désigne l'énergie interne du système, T_0 la température du thermostat et N_1 le nombre de molécules dans le liquide. Quel est le critère d'évolution du système vers l'équilibre à partir de Ω^* . Justifier.
5. Calculer $d\Omega^*$. On notera μ_1 le potentiel chimique dans la phase liquide, v_1 le volume par particule dans la phase liquide, et γ_{ls} et γ_{sg} les tensions de surface aux interfaces solide-liquide et solide-gaz.
6. Par un bilan mécanique, retrouver la relation de Young-Dupré entre l'angle de mouillage et les trois tensions de surface. Simplifier l'expression de $d\Omega^*$.

7. Montrer que si le liquide est faiblement compressible (dans un sens qu'il faudra préciser), on obtient finalement

$$d\Omega^* = -\frac{\pi d^2}{4} \left[\frac{4\gamma_{lg} \cos \theta}{d} + \frac{k_B T_0}{v_l} \ln \left(\frac{p_0}{p_{\text{sat}}(T_0)} \right) \right] dh, \quad (5)$$

où $p_{\text{sat}}(T_0)$ désigne la pression de vapeur saturante dans le cas d'une interface plane. On rappelle à toutes fins utiles que $\left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_T = v(T, p)$.

8. En déduire à quelles conditions on observe de la condensation capillaire. En particulier, montrer que quand $p_0 < p_{\text{sat}}(T_0)$, c'est-à-dire quand le liquide est moins stable que la vapeur, on peut quand même observer de la condensation capillaire pour des diamètres de pores suffisamment petits $d < d_c$.
9. Analyser qualitativement les variations de d_c avec les paramètres du problème. Obtenir un ordre de grandeur pour de l'eau à température ambiante, avec un degré d'humidité de $p_0/p_{\text{sat}}(T_0) = 10^{-1}$.

7 Théorie de Landau-Ginzburg de la tension de surface (***)

Nous proposons ici de décrire la transition de phase liquide-gaz par la théorie de Landau-Ginzburg, ce qui permettra par la suite de donner une expression microscopique de la tension de surface. Landau donne une méthode systématique pour décrire les transitions de phase à partir d'une énergie libre, appelée énergie libre de Landau. C'est le postulat de Landau : le système peut être décrit par un potentiel énergie libre F^* dépendant d'un degré de liberté interne η qui est le paramètre d'ordre de la transition, et qui s'annule dans la phase la plus désordonnée (ici le gaz). On admet que la théorie de Landau appliquée à la transition de phase liquide-gaz pour un système homogène conduit à

$$F^*(\eta) = \frac{1}{2}a(T - T^*)\eta^2 - \frac{1}{3}d\eta^3 + \frac{1}{4}b\eta^4, \quad (6)$$

où $\eta = \rho - \rho_g$ est la différence entre les masses volumiques du système et celle de la phase gazeuse (référence), a, b, d des coefficients positifs constants, T la température et T^* une température de référence.

- Déterminer les valeurs possibles du paramètre d'ordre η à l'équilibre. On distinguera différents cas selon la valeur de la température.
- Parmi les valeurs possibles de η , laquelle correspond à celle effectivement prise par le paramètre d'ordre à l'équilibre ?
- Montrer qu'on peut définir trois intervalles de température différents qui diffèrent par le nombre d'états d'équilibre possibles, et on représentera l'allure générique de F^* en fonction de η dans ces trois situations. En déduire une interprétation de T^* .
- Montrer qu'il se produit une transition de phase pour une température $T = T_t$ qu'on déterminera en fonction des données du problème.
- On veut maintenant décrire la formation d'une interface entre le liquide et le gaz, et il faut adapter la théorie de Landau au cas des systèmes inhomogènes. On admet alors que le système peut être décrit par une fonctionnelle de Landau-Ginzburg

$$F^*[\eta(\mathbf{r})] = \int_{\mathcal{V}} d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2}a(T - T^*)\eta(\mathbf{r})^2 - \frac{1}{3}d\eta(\mathbf{r})^3 + \frac{1}{4}b\eta(\mathbf{r})^4 + \frac{1}{2}c[\nabla\eta(\mathbf{r})]^2 \right\}, \quad (7)$$

où \mathcal{V} est le volume du système, et c un autre coefficient positif, qu'on peut prendre indépendant de la température. Commenter le choix de cette fonctionnelle.

- Quelle est l'équation vérifiée par le champ $\eta(\mathbf{r})$ à l'équilibre ? La simplifier dans le cas d'un système présentant une interface plane de surface Σ dont la position selon la direction normale à l'interface est paramétrisée par la coordonnée z .
- En déduire alors qu'on peut exprimer la tension de surface à coexistence entre les deux phases (pour $T = T_t$) sous la forme

$$\gamma_g = c \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left(\frac{d\rho}{dz} \right)^2, \quad (8)$$

où on rappelle que $\eta = \rho - \rho_g$. Commenter.

8. On suppose que l'interface se trouve au voisinage de $z = 0$. Intégrer l'équation différentielle vérifiée par $\eta(z)$ dans le cas où $\eta(z \rightarrow -\infty) = \rho_l - \rho_g$ (phase liquide) et $\eta(z \rightarrow +\infty) = 0$ (phase gazeuse), et en déduire le profil d'interface

$$\rho(z) = \frac{\rho_g + \rho_l}{2} + \frac{\rho_g - \rho_l}{2} \tanh\left(\frac{z}{\xi}\right), \tag{9}$$

où $\xi = 2\sqrt{\frac{2c}{b(\rho_l - \rho_g)^2}}$. Commenter son expression, ainsi que celle de ξ . Le tracer.

9. En déduire l'expression de la tension de surface en fonction de $\rho_l - \rho_g$ et des autres données du problème. Commenter.

8 Hystérésis de mouillage (*)

On considère un liquide de masse volumique ρ_l au contact d'un substrat solide et d'une atmosphère gazeuse. On notera γ_{lg} , γ_{ls} et γ_{sg} les tensions de surface aux interfaces liquide-gaz, solide-liquide et solide-gaz respectivement.

- À l'équilibre, quelle est la relation entre l'angle de mouillage θ et les tensions de surface. Comment s'appelle cette relation ? À quelle condition cette relation est-elle vérifiée ?
- En présence de défauts sur le substrat solide, la tension de surface devient non uniforme sur le substrat solide, de sorte que l'angle de mouillage peut varier dans un intervalle $[\theta_r, \theta_a]$ avec $\theta_r < \theta_a$, même en régime stationnaire. C'est ce qu'on appelle l'hystérésis de mouillage. Nous voulons maintenant montrer que ce phénomène permet d'expliquer pourquoi une goutte peut rester coincée dans un tube. Pour cela, on considère la situation stationnaire représentée sur le schéma ci-contre où une goutte est piégée dans un tube de diamètre d sur une hauteur h . Faire un bilan des forces sur le volume de liquide.



3. En déduire que la goutte reste piégée si

$$\cos \theta_2 - \cos \theta_1 = \frac{\rho_l g \mathcal{V}}{\pi d \gamma_{lg}}, \tag{10}$$

où \mathcal{V} désigne le volume de la goutte.

4. En déduire que le piégeage n'est possible qu'en présence d'hystérésis de mouillage et pour des volumes de gouttes suffisamment faibles. On introduira un volume critique \mathcal{V}_c dont on analysera les dépendances.

9 Loi de Jurin et dynamique d'imprégnation de Washburn (*)

On considère un tube de diamètre d qu'on plonge dans un réservoir de liquide. On observe alors que le liquide grimpe le long du tube jusqu'à une hauteur h entre la base du tube et le bas du ménisque, c'est le phénomène d'ascension capillaire. On notera θ l'angle de mouillage.

1. On suppose que le ménisque est sphérique. À quelle condition cette hypothèse est-elle vérifiée ?

2. En raisonnant sur les pressions dans la colonne, montrer que h est donnée par la loi de Jurin :

$$h = h_{\text{eq}} = \frac{4\gamma_{\text{lg}} \cos \theta}{\rho_1 g d}, \quad (11)$$

où γ_{lg} désigne la tension de surface entre le liquide et le gaz, et ρ_1 la masse volumique du liquide.

3. Nous voulons maintenant décrire la dynamique d'imprégnation (d'ascension) du liquide dans le tube. Pour cela, nous avons besoin de connaître le champ de vitesse $\mathbf{v}(\rho, z, t) = v(\rho, z, t)\mathbf{e}_z$ dans le tube. En supposant l'écoulement incompressible et quasi-stationnaire, écrire les équations vérifiées par le champ de vitesse et le champ de pression $p(\rho, z, t)$. On notera η_1 la viscosité du fluide. On rappelle, à toutes fins utiles, que

$$\Delta \mathbf{v}(\rho, z, t) = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}(\rho, z, t) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, z, t) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(\rho, z, t) \right] \mathbf{e}_z. \quad (12)$$

4. Obtenir alors le champ de pression et de vitesse à une fonction du temps près. Quelles sont les conditions aux limites ?
5. En déduire que le champ de vitesse peut se mettre sous la forme

$$v(\rho, t) = \frac{1}{4\eta} \left(\rho_1 g - \frac{4\gamma_{\text{lg}} \cos \theta}{dh(t)} \right) \left[\rho^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Comment s'appelle un tel profil ?

6. En déduire une équation différentielle vérifiée par $h(t)$. En trouver une intégrale première.
7. Montrer qu'au début de la phase d'ascension, la hauteur $h(t)$ vérifie la loi de Washburn

$$h(t)^2 = \frac{\gamma_{\text{lg}} d \cos \theta}{2\eta_1} t. \quad (14)$$

Commenter.

8. Décrire la variation temporelle de $h(t)$ à la fin de la phase d'ascension [$h(t) \simeq h_{\text{eq}}$].
9. À quelle condition l'hypothèse d'écoulement quasi-stationnaire faite précédemment est-elle vérifiée ?
10. On revient à l'équilibre. Montrer que sous une condition qu'on explicitera, le ménisque est assimilable à une sphère.

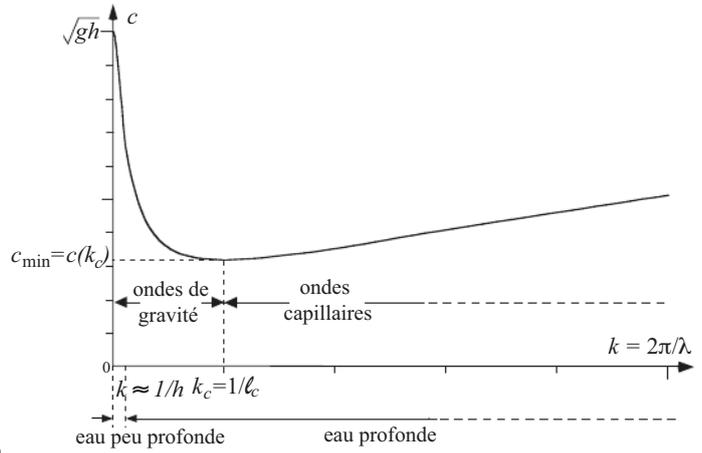
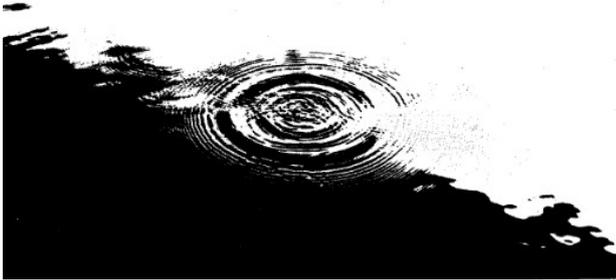
10 Ondes gravito-capillaires (**)

Nous voulons décrire les ondes se propageant à la surface de l'eau, comme les vagues ou les rides. Pour cela, nous proposons un traitement hydrodynamique du problème en faisant un certain nombre d'hypothèses, sur lesquelles nous reviendrons par la suite :

- ▶ on suppose l'écoulement incompressible, le fluide étant caractérisé par sa masse volumique ρ_1 constante,
- ▶ on néglige la dissipation visqueuse, ou encore, on considère l'écoulement parfait,
- ▶ on suppose que le fluide est perturbé par rapport à son état de repos $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- ▶ on considère la perturbation induite par l'onde suffisamment faible de sorte de pouvoir linéariser les différentes équations.

On se place dans un problème bidimensionnel, en considérant le problème invariant par translation selon \mathbf{e}_z . On considère un bassin dont le sol est à une hauteur $y = 0$. On repèrera la hauteur de fluide par la fonction $y = h(x, t)$, où $\eta(x, t) = h(x, t) - h_0 \ll h_0$ avec h_0 désigne la hauteur moyenne du fluide. Le champ de vitesse peut donc s'écrire sous la forme $\mathbf{v}(x, y, t) = v_x(x, y, t)\mathbf{e}_x + v_y(x, y, t)\mathbf{e}_y$.

1. Rappeler la différence entre fluide parfait et écoulement parfait.
2. Donner les équations vérifiées par les champs de vitesse et de pression.



3. On suppose l'écoulement de vorticité nulle $\mathbf{w} = \nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$. En déduire que le champ de vitesse dérive d'un potentiel scalaire $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ dont on précisera l'équation qu'il doit vérifier.
4. Montrer que l'équation vérifiée par le potentiel des vitesses admet une solution de la forme $\Phi(x, y, t) = H(x - ct)G(y)$, où c est une constante. Donner la forme générale des fonctions H et G . En particulier, montrer qu'on peut les mettre sous la forme

$$\begin{cases} H(\xi) = \cos(k\xi), \\ G(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky}, \end{cases} \quad (15)$$

où A et B sont des constantes d'intégration, et où k est un nombre réel qu'on peut prendre positif sans perte de généralité. On pourra poser $\omega = kc$.

5.    partir des équations de Navier-Stokes, montrer la relation de Bernoulli

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y, t) + \frac{1}{\rho_1} p(x, y, t) + gy = F(t), \quad (16)$$

où $F(t)$ est une fonction quelconque du temps.

6. Justifier qu'on peut prendre $F(t)$ constante. Par la suite, on prendra $F(t) = p_0/\rho_1 + gh_0$, où p_0 désigne la pression atmosphérique.
7. Donner les conditions aux limites vérifiées par le champ de vitesse en $y = 0$ et $y = h(x, t)$. En déduire les conditions suivantes vérifiées par le potentiel des vitesses :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, h_0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t). \end{cases} \quad (17)$$

8. En déduire la forme finale de $\Phi(x, y, t)$, ainsi que celle de $\eta(x, t)$. Interpréter.
9. En utilisant le fait que l'équilibre mécanique est vérifié à la surface libre, montrer que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, h_0, t) = \frac{\gamma_g}{\rho_1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(x, t) - g\eta(x, t), \quad (18)$$

où γ_g désigne la tension de surface à l'interface liquide-gaz. On rappelle que la courbure de l'interface est donnée par

$$C(x, t) = - \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(x, t)}{\left\{ 1 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t) \right]^2 \right\}^{3/2}}. \quad (19)$$

En combinant les résultats des questions précédentes, en déduire deux conditions aux limites vérifiées par la seule variable Φ .

10. Montrer alors que $\omega^2 = gk(1 + \kappa^{-2}k^2) \tanh(kh_0)$, où κ^{-1} est une longueur caractéristique qu'on définira et dont on donnera un ordre de grandeur pour l'eau. Que représente cette équation ?
11. Par la suite, on se place dans le cas d'un bassin profond $kh_0 \gg 1$. En déduire une expression simplifiée de la relation $\omega(k)$ et en déduire les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g . Donner une interprétation de ces deux vitesses.
12. Simplifier les expressions des vitesses dans les cas limites où la longueur d'onde λ vérifie $\lambda \gg \kappa^{-1}$ (ondes de gravité) et $\lambda \ll \kappa^{-1}$ (ondes capillaires). Discuter la valeur du rapport v_g/v_φ dans chaque cas.
13. On lance un caillou de taille typique 1 mm dans une mare, et on observe la surface de l'eau (voir la photo jointe). Discuter et justifier ce qu'on observe. On pourra s'aider du tracé joint de la vitesse de phase en fonction de k .

11 Effet Marangoni (*)

On s'intéresse à l'effet d'un gradient de tension superficielle sur l'écoulement d'un fluide. Pour cela on considère un liquide de masse volumique ρ_l et de viscosité η constantes dans un récipient de hauteur h au contact d'une atmosphère gazeuse, et on note γ_{lg} la tension de surface à l'interface liquide-gaz. On considérera un problème invariant par translation selon la direction \mathbf{e}_z et on notera \mathbf{e}_x l'autre direction tangente à l'interface horizontale, et \mathbf{e}_y la direction normale. On prendra l'origine des valeurs de y au niveau du fond du récipient.

1. On imagine que se produit en un point M de la surface une diminution de la tension de surface (par exemple par dépôt d'une impureté). En déduire qu'il s'établit dans le fluide un écoulement dont on précisera le sens.
2. En isolant un élément de surface $dx dz$ sur la surface libre, montrer que la contrainte s'exerçant sur la surface libre du fait d'un gradient de tension de surface s'écrit

$$\sigma_{xy}^\gamma = \frac{d\gamma_{lg}}{dx}. \quad (20)$$

Par la suite on supposera que la tension de surface varie de façon linéaire avec la position.

3. On veut maintenant décrire l'écoulement résultant, appelé écoulement Marangoni. On supposera que l'écoulement est stationnaire. Justifier que le champ de vitesse est de la forme $\mathbf{v}(y) = v(y)\mathbf{e}_x$, et le champ de pression de la forme $p(x, y)$.
4. Écrire les équations vérifiées par ces deux champs. Préciser leurs conditions aux limites.
5. En déduire les expressions (avec p_{atm} la pression atmosphérique) suivantes :

$$\begin{cases} p(x, y) = p_{\text{atm}} + \rho_l g(h - y), \\ \mathbf{v}(y) = \frac{y}{\eta} \nabla \gamma_{lg}. \end{cases} \quad (21)$$

Commenter.

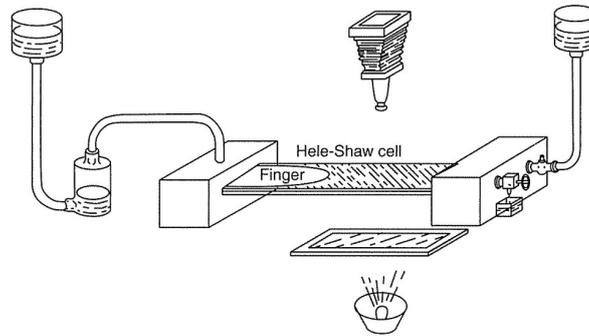
6. Déduire de la question précédente un ordre de grandeur de la vitesse résultant uniquement de la compétition entre effets visqueux et capillaires.

12 Instabilité de Saffman-Taylor (***)

12.1 Écoulement dans une cellule de Hele-Shaw

On s'intéresse tout d'abord à l'écoulement dans une cellule de Hele-Shaw, voir la figure jointe.

Ce dispositif correspond à une cellule rectangulaire dont l'une des dimensions transverses à l'écoulement e est très petite devant les autres dimensions caractéristiques, notamment la longueur totale L de la cellule. Nous voulons décrire l'écoulement dans la cellule de Hele-Shaw d'un fluide de masse volumique constante ρ_l et de viscosité η_l , que nous supposons stationnaire. Pour cela, nous introduisons une base orthonormée $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ où le vecteur \mathbf{e}_z est orthogonal aux deux plans formant la cellule de Hele-Shaw et dirigé selon la verticale.



1. À quelle condition peut-on négliger l'influence de la pesanteur? Faire un ordre de grandeur. Nous supposons cette condition vérifiée par la suite.
2. Écrire les équations vérifiées par les champs de vitesse et de pression.
3. Par la suite, on note V un ordre de grandeur de la vitesse selon les directions \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y . Donner un ordre de grandeur V_z de la vitesse selon \mathbf{e}_z . Que peut-on en déduire?
4. Montrer que sous une condition qu'on explicitera l'équation de bilan de la quantité de mouvement se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \eta_1 \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \eta_1 \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 = \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \quad (22)$$

5. En déduire une équation vérifiée par la seule variable p .
6. Déterminer la forme du champ de vitesse dans le fluide. Quelles conditions aux limites vérifie-t-il?
7. Comme l'épaisseur e est petite devant les autres dimensions caractéristiques, on s'intéresse à l'écoulement moyen ou encore au débit entre les deux plaques, et on moyenne la vitesse du fluide dans le plan (O, x, y) selon la direction transverse, en définissant

$$\bar{v}_x(x, y) = \frac{1}{e} \int_0^e dz v_x(x, y, z), \quad (23)$$

et pareillement pour v_y .

Démontrer la loi de Darcy $\bar{\mathbf{v}}_{\parallel} = -\frac{e^2}{12\eta_1} \nabla_{\parallel} p$, où $\mathbf{v}_{\parallel} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y$ et $\nabla_{\parallel} p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{e}_y$.

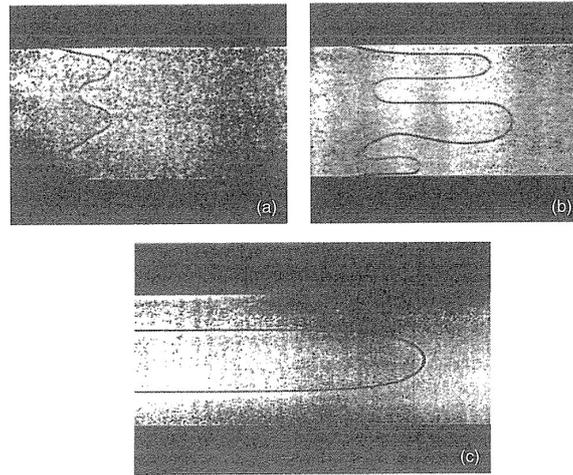
12.2 Analyse qualitative de l'instabilité

Nous nous intéressons maintenant à une cellule dans laquelle nous mettons deux fluides de viscosités η_1 et η_2 différentes, avec $\eta_1 < \eta_2$ (cela sera expliqué plus loin). On suppose qu'on impose une surpression uniforme selon la profondeur \mathbf{e}_y en amont de la cellule, l'aval se trouvant à la pression atmosphérique : le fluide 1 pousse alors le fluide 2 avec une interface plane d'équation $x = \text{cste}$ entre les deux fluides. De plus, on supposera que l'interface entre les deux fluides est libre, de sorte qu'il y a continuité de la vitesse normale car les fluides sont non miscibles, et que l'équilibre mécanique y est réalisé.

1. Démontrer que les profils de vitesse et de pression dans chaque fluide $j = 1, 2$ s'écrivent

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{v}}_j = V \mathbf{e}_x, \\ p_j(x, t) = \tilde{p}_j(x, t) = p_i - \frac{12\eta_j V (x - x_i(t))}{e^2}, \end{cases} \quad (24)$$

où V est une constante positive et $x_i(t)$ la position de l'interface en fonction du temps. Préciser $x_i(t)$ en supposant qu'à $t = 0$ l'interface se trouve en $x = 0$. Représenter les isobares sur un schéma.



2. Nous voulons maintenant expliquer pourquoi cette interface plane peut être instable sous certaines conditions donnant lieu au phénomène de digitation visqueuse, voir la figure jointe. On imagine maintenant que l'interface se déforme un peu de façon sinusoïdale $x_i(y) = \varepsilon \cos(ky)$ où $\varepsilon \ll e$, et pour simplifier, nous allons nous placer dans un cas où la courbure de l'interface est suffisamment faible de sorte qu'on peut négliger la correction de pression dans la loi de Laplace. Pour le reste des questions de cette section, on supposera que $\eta_1 \ll \eta_2$. Représenter les nouvelles isobares sur un schéma.
3. En déduire le champ de vitesse résultant dans le fluide 2 proche de l'interface, et montrer qu'il conduit à une amplification de la déformation. Conclure.
4. Justifier que la tension de surface s'oppose à l'amplification de la déformation et stabilise l'interface.
5. Par analyse dimensionnelle, justifier que la taille typique λ^* de la déformation (doigt de Saffman-Taylor) a l'expression suivante

$$\lambda^* \sim eW(\text{Ca}), \quad (25)$$

où $\text{Ca} = \eta_2 V / \gamma_{12}$ désigne le nombre capillaire, avec γ_{12} la tension de surface entre les deux fluides, et où W est une fonction quelconque. En déduire le temps typique de croissance de l'instabilité.

6. Quel est le sens de variation de $W(\text{Ca})$?

12.3 Traitement quantitatif

Nous voulons décrire le développement de l'instabilité de Saffman-Taylor, et pour cela, nous allons faire plusieurs hypothèses.

- ▶ On considère l'écoulement incompressible de deux fluides non miscibles de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 et de viscosités η_1 et η_2 (quelconques).
- ▶ On se place dans les mêmes hypothèses que celles utilisées pour décrire l'écoulement dans la cellule de Hele-Shaw.
- ▶ On travaillera toujours avec des champs de vitesse moyennés selon l'épaisseur du fluide ($z \in [0, e]$).
- ▶ Nous nous plaçons au début de la phase d'instabilité, et on se contente donc d'étudier les perturbations du système autour de son état stationnaire non perturbé où les deux fluides ont une interface plane (cela a été l'objet de la première question de la section précédente). On introduira donc les champs $\mathbf{v}'_{1,2}$ et $p'_{1,2}$ tels que

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{v}}_j(x, y, t) = V \mathbf{e}_x + \overline{\mathbf{v}}'_j(x, y, t), \\ p_j(x, y, z, t) = \tilde{p}_j(x, t) + p'_j(x, y, t), \end{cases} \quad (26)$$

où $\|\mathbf{v}'_j\| \ll V$, et $|p'_j| \ll |\tilde{p}_j|$ pour $j = 1, 2$.

- ▶ Nous allons étudier le mouvement des fluides dans le référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel du laboratoire à la vitesse $V \mathbf{e}_x$. Dans ce référentiel, le mouvement des fluides est

uniquement caractérisé par les champs de vitesse $\overline{v'_j}(x, y, t) = \overline{v'_{x,j}}(x, y, t)\mathbf{e}_x + \overline{v'_{y,j}}(x, y, t)\mathbf{e}_y$ pour $j = 1, 2$, tandis que l'interface est caractérisée par son équation $x_i(y, t)$, où $|x_i|$ est très petit devant toutes les autres dimensions caractéristiques (proche de l'origine dans ce référentiel mobile). Par ailleurs, dans ce référentiel, le profil stationnaire de pression a l'expression simple $\tilde{p}_j(x) = p_i - 12\eta_j V x / e^2$, pour $j = 1, 2$.

1. Quelle est la relation entre $\overline{v'_j}$ et p'_j pour $j = 1, 2$. En déduire une équation vérifiée par les surpressions p'_j .
2. Montrer que les surpressions se mettent sous la forme

$$\begin{cases} p'_1(x, y, t) = H_1(t)e^{k_1 x} \cos(k_1 y), \\ p'_2(x, y, t) = H_2(t)e^{-k_2 x} \cos(k_2 y), \end{cases} \quad (27)$$

où k_1 et k_2 sont des réels qu'on peut prendre positifs sans perte de généralité, et $H_1(t)$ et $H_2(t)$ deux fonctions inconnues du temps.

3. Donner la condition aux limites vérifiée par les champs de vitesse à l'interface. On introduira le vecteur unitaire normal $\mathbf{n}(x, t)$ à l'interface et dirigé du liquide 1 vers le liquide 2. En déduire les expressions suivantes :

$$\begin{cases} p'_1(x, y, t) = \frac{12\eta_1}{ke^2} J(t)e^{kx} \cos(ky), \\ p'_2(x, y, t) = -\frac{12\eta_2}{ke^2} J(t)e^{-kx} \cos(ky), \\ v'_{x,1}(x, y, t) = -J(t)e^{kx} \cos(ky), \\ v'_{y,1}(x, y, t) = J(t)e^{kx} \sin(ky), \\ v'_{x,2}(x, y, t) = -J(t)e^{-kx} \cos(ky), \\ v'_{y,2}(x, y, t) = -J(t)e^{-kx} \sin(ky), \\ x_i(y, t) = -M(t) \cos(ky), \end{cases} \quad (28)$$

où $M(t)$ désigne une primitive de $J(t)$, et où $J(t)$ est une fonction quelconque du temps.

4. Donner la seconde condition aux limites vérifiée à la surface libre. On rappelle que la courbure de l'interface est donnée par $\mathcal{C}(x, t) = \nabla \cdot \mathbf{n}(x, t)$. En déduire que $dJ/dt = \omega J$, ainsi que

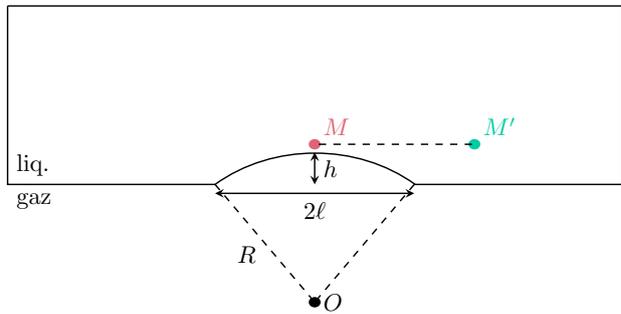
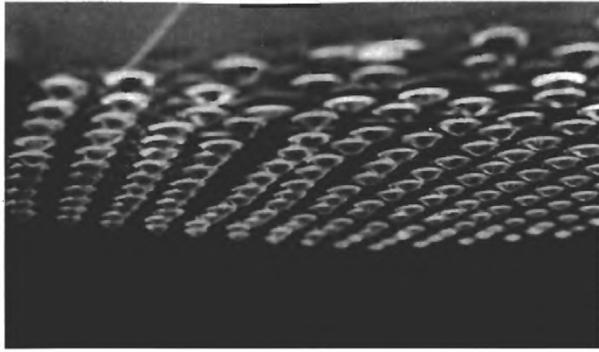
$$\omega = kV \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} - k^3 \gamma_{12} \frac{e^2}{12(\eta_1 + \eta_2)}, \quad (29)$$

où ω est un réel homogène à l'inverse d'un temps qui peut être positif ou négatif.

5. Donner une condition sur les viscosités pour observer une instabilité.
6. Dans l'hypothèse où la condition précédente est vérifiée, pour quelles longueurs d'onde $\lambda = 2\pi/k$ observe-t-on effectivement une instabilité ?
7. Parmi toutes les longueurs d'onde instables, laquelle est observée en pratique ? On la notera λ^* et on déterminera son expression ainsi que celle du temps de croissance τ en fonction du nombre capillaire $Ca = (\eta_2 - \eta_1)V/\gamma_{12}$. Commenter.
8. Quelle hypothèse doit être vérifiée pour assurer la cohérence de notre approche ?

13 Instabilité de Rayleigh-Taylor (**)

Nous souhaitons décrire l'instabilité de Rayleigh-Taylor qui se produit quand un fluide plus dense de masse volumique ρ_l forme une interface horizontale avec un fluide moins dense de masse volumique ρ_g (que nous supposons être un gaz), ce dernier se trouvant en-dessous. Cette situation est évidemment instable du point de vue de la pesanteur, et mène à la rupture du film de liquide dense en gouttelettes, comme le montre la figure jointe.



13.1 Analyse qualitative

1. On cherche tout d'abord à comprendre qualitativement l'instabilité. Pour cela, on imagine que localement le film de liquide s'amincisse, correspondant à une variation d'épaisseur h sur une distance caractéristique 2ℓ . La déformation étant petite ($h \ll \ell$), on peut approximer la déformation par son cercle osculateur de rayon R (voir schéma joint). Donner la relation approchée entre h , ℓ et R .
2. On suppose le système en état de quasi-équilibre. Déterminer la pression dans le liquide au point M au voisinage immédiat de la surface. On notera γ_{lg} la tension de surface à l'interface liquide-gaz et p_{atm} la pression atmosphérique.
3. Déterminer la pression dans le liquide au point M' à la même cote que le point M mais en dehors de la perturbation (là où l'interface est restée plane).
4. En déduire que le film est instable si $(\rho_l - \rho_g)g\ell^2/\gamma_{lg} \gtrsim 1$. Commenter.
5. En supposant que $\rho_l \gg \rho_g$, obtenir par analyse dimensionnelle une estimation du temps typique de croissance τ de l'instabilité. Commenter son expression.

13.2 Traitement quantitatif

Nous voulons décrire l'écoulement du film liquide au début de son instabilité. Pour cela, nous allons faire plusieurs hypothèses que nous détaillons ci-dessous.

- On considère l'écoulement parfait d'un fluide incompressible de masse volumique constante ρ_l (on néglige l'influence de la viscosité).
- On considère le problème invariant par translation selon la direction z . Le système peut donc être décrit en coordonnées cartésiennes, où x désigne la direction longitudinale à l'interface, et y la direction transverse.
- On réalise un développement perturbatif autour de l'état de repos du fluide. En particulier, cela va nous permettre de linéariser les équations du mouvement. Plus précisément, nous supposons que la vitesse du fluide \mathbf{v} est négligeable devant la vitesse des ondes se propageant dans le milieu, et nous supposons que la pression dans le fluide peut se mettre sous la forme

$$p(x, y, t) = p_{hydro}(y) + p'(x, y, t), \quad (30)$$

où $|p'| \ll p_{atm}$ et où p_{hydro} désigne le profil hydrostatique de pression.

- On suppose que l'interface se déforme peu, et on peut la repérer par son équation $h(x, t)$ en coordonnées cartésiennes, où h est infinitésimale par rapport à toutes les autres dimensions du problème (en particulier la longueur d'onde). Autrement dit, l'interface est centrée sur $y = 0$. De plus, on supposera qu'il s'agit d'une surface libre où l'équilibre mécanique est réalisé à chaque instant.
 - On considère le liquide infini selon la direction x ($x \in \mathbb{R}$) et semi-infini selon la direction y ($y \in \mathbb{R}^+$).
1. Écrire les équations vérifiées par le champ de vitesse. En déduire une équation vérifiée par $p'(x, y, t)$.
 2. Montrer que $p'(x, y, t) = H(t)e^{-ky} \cos(kx)$, où k est un réel positif et $H(t)$ une fonction du temps quelconque.

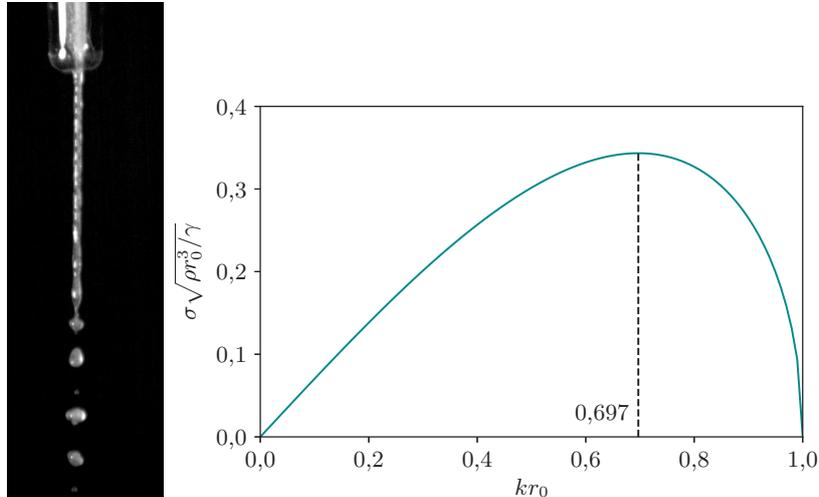
3. En déduire la forme du champ de vitesse. On introduira $H_1(t)$ une primitive de $H(t)$.
4. Donner la condition aux limites vérifiée par le champ de vitesse à l'interface. On introduira le vecteur unitaire normal $\mathbf{n}(x, t)$ à l'interface et dirigé du liquide vers le gaz. En déduire qu'au plus petit ordre non nul, la position de la surface libre se met sous la forme $h(x, t) = \frac{k}{\rho_1} H_2(t) \cos(kx)$, où $H_2(t)$ désigne une primitive de $H_1(t)$.
5. Donner la seconde condition aux limites vérifiée à la surface libre. On rappelle que la courbure de l'interface est donnée par $\mathcal{C}(x, t) = \nabla \cdot \mathbf{n}(x, t)$. En déduire une relation entre la surpression p' à l'interface et la position $h(x, t)$ de l'interface.
6. Montrer alors, en utilisant les expressions des différents champs, que $d^2H/dt^2 = -\omega^2 H$, où ω^2 est un réel homogène au carré de l'inverse d'un temps qui peut être positif ou négatif, et

$$\omega^2 = -\frac{gk}{\rho_1 + \rho_g} \left(\rho_1 - \rho_g - \frac{\gamma_{lg} k^2}{g} \right). \quad (31)$$

7. Donner une condition sur la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ pour observer une instabilité.
8. Parmi toutes les longueurs d'onde instables, laquelle est observée en pratique? On la notera λ^* et on déterminera son expression ainsi que celle du temps de croissance τ . Commenter.
9. À quelle condition est-il légitime de négliger les effets visqueux? On fera un ordre de grandeur.
10. Commenter sur la validité globale de l'approche proposée dans cet exercice.

14 Instabilité de Rayleigh-Plateau (**)

L'instabilité de Rayleigh-Plateau se manifeste lorsqu'un cylindre de liquide de masse volumique ρ_l coule du fait de la gravité. On peut alors observer une fragmentation du jet en gouttelettes, voir la figure jointe.



14.1 Analyse qualitative

1. Expliquer qualitativement pourquoi le cylindre de fluide peut devenir instable. En déduire le rayon r minimal des gouttes formées.
2. En négligeant l'influence de la pesanteur, obtenir par analyse dimensionnelle le temps typique de fragmentation du jet τ . On notera γ_{lg} la tension de surface à l'interface liquide-gaz et R le rayon du cylindre de liquide. Commenter son expression.
3. En déduire une équation différentielle vérifiée par le rayon moyen $R(t)$ de la colonne, toujours par analyse dimensionnelle. La résoudre.

14.2 Étude quantitative

Nous voulons décrire le début de la phase de croissance de l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Pour cela, nous allons réaliser un certain nombre d'hypothèses que nous listons maintenant.

- ▶ On considère l'écoulement parfait d'un fluide incompressible de masse volumique constante (on néglige l'influence de la viscosité).
- ▶ On néglige l'influence de la pesanteur.
- ▶ On réalise un développement perturbatif autour de l'état non perturbé du système, pour lequel la pression dans la colonne est uniforme égale à p_0 et la vitesse constante égale à $\mathbf{v}_0 = -v_0 \mathbf{e}_z$, où v_0 est imposée par le débit du robinet. On écrit maintenant les champs de vitesse et de pression sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\rho, \varphi, z, t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'(\rho, \varphi, z, t), \\ p(\rho, \varphi, z, t) = p_0 + p'(\rho, \varphi, z, t), \end{cases} \quad (32)$$

en se plaçant en coordonnées cylindriques centrées sur le jet, et en supposant que $\|\mathbf{v}'\| \ll v_0$ et $|p'| \ll p_0$.

- ▶ On considère que le fluide garde une forme axisymétrique au cours de sa déformation, de sorte qu'on peut considérer que les champs de pression et de vitesse ne dépendent pas de la variable φ . De plus, on caractérise la surface libre par son équation $\varrho(z) = R + \varrho'(z)$, où $|\varrho'| \ll R$, avec R le rayon initial de la colonne.
 - ▶ On se placera dans le référentiel en translation rectiligne et uniforme à la vitesse \mathbf{v}_0 par rapport au référentiel du laboratoire. Dans ce référentiel, la colonne de fluide est globalement au repos et est décrite par le champ de vitesse \mathbf{v}' d'après la formule de composition des vitesses.
1. Donner l'expression de p_0 . On notera p_{atm} la pression atmosphérique.
 2. Écrire les équations vérifiées par les champs de vitesse et de pression. En déduire une équation sur la seule variable p' .
 3. Montrer que $p'(x, y, t) = H(t)F(\rho) \cos(ky)$, où k est un réel qu'on peut prendre positif sans perte de généralité, et où

$$\frac{d^2 F}{d\rho^2}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{d\rho}(\rho) - k^2 F(\rho) = 0. \quad (33)$$

On admet que la solution de cette équation est la superposition des deux fonctions de Bessel modifiées d'ordre 0 \mathcal{I}_0 et \mathcal{K}_0 dont la seconde diverge quand son argument tend vers 0. En déduire finalement que $p'(\rho, z, t) = H(t)\mathcal{I}_0(k\rho) \cos(kz)$.

4. Déterminer la forme du champ de vitesse. On rappelle que la dérivée de \mathcal{I}_0 est la fonction de Bessel d'ordre \mathcal{I}_1 , et on notera $H_1(t)$ une primitive de $H(t)$.
5. Donner la condition aux limites vérifiée par le champ de vitesse à l'interface. On introduira le vecteur unitaire normal $\mathbf{n}(z, t)$ à l'interface et dirigé du liquide vers le gaz. En déduire qu'au plus petit ordre non nul, la position de la surface libre se met sous la forme $\varrho(z, t) = -\frac{k}{\rho_l} H_2(t)\mathcal{I}_1(kR) \cos(kz)$, où $H_2(t)$ désigne une primitive de $H_1(t)$.
6. Donner la seconde condition aux limites vérifiée à la surface libre. On rappelle que la courbure de l'interface est donnée par $\mathcal{C}(z, t) = \nabla \cdot \mathbf{n}(z, t)$. En déduire une relation entre la surpression à l'interface et la position de l'interface.
7. Montrer alors, en utilisant les expressions des différents champs, que $d^2 H/dt^2 = -\omega^2 H(t)$, où ω^2 est un réel homogène au carré de l'inverse d'un temps qui peut être positif ou négatif, et

$$\omega^2 = -\frac{\gamma_g}{\rho_l R^3} (kR) \frac{\mathcal{I}_1(kR)}{\mathcal{I}_0(kR)} [1 - (kR)^2]. \quad (34)$$

8. Donner une condition sur la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ pour observer une instabilité.
9. Parmi toutes les longueurs d'onde instables, laquelle est observée en pratique? Donner le lien entre $\omega(k)$ et le temps de croissance $\tau(k)$ de l'instabilité.

10. L'inverse de τ en fonction de k est représenté sur la figure jointe. En déduire la longueur d'onde λ^* de l'instabilité observée en fonction de R à un facteur numérique près. En déduire qu'on retrouve à un facteur numérique près le temps de croissance déduit par analyse dimensionnelle.
11. En exploitant la conservation du volume, montrer que le rayon des gouttes après rupture du jet est $r \simeq 1,89R$. Commenter.
12. À quelle condition est-il légitime de négliger les effets visqueux? On fera un ordre de grandeur.
13. Commenter sur la validité globale de l'approche proposée dans cet exercice.