

**Corr.1 Demi-ellipse de transfert**

**Quelques capacités...** Identifier une démarche de résolution. S'appuyer sur des constantes du mouvement (énergie mécanique, moment cinétique...). Étudier le mouvement d'un satellite en orbite circulaire. Traiter un cas classique de changement d'orbite d'Hohmann. Effectuer une application numérique respectant le nombre de chiffres significatifs.

On raisonne dans le référentiel géocentrique dans cet exercice, supposé galiléen. L'application de la relation fondamentale de la dynamique au satellite permet d'arriver à l'équation suivante, l'accélération étant purement centrale,

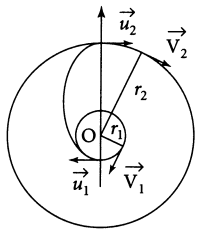
$$V^2 = \frac{GM_T}{r}$$

ce qui détermine la vitesse V du satellite sur une orbite circulaire. On peut remplacer le terme  $GM_T$  en notant que le poids d'un corps au sol est essentiellement dû à la force de gravitation (le terme dû à la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel terrestre est négligeable) :

$$mg \simeq \frac{GM_T m}{R_T^2} \quad \text{soit} \quad GM_T = gR_T^2$$

Ainsi,  $V_1 = R_T \sqrt{\frac{g}{r_1}} = 7,74 \text{ km.s}^{-1}$

et  $V_2 = R_T \sqrt{\frac{g}{r_2}} = 3,09 \text{ km.s}^{-1}$



Moteurs éteints, l'ellipse de transfert est décrite sous le seul effet de la force de gravitation terrestre. La vitesse au départ de la demi-ellipse (au périégée) vaut  $u_1$  ( $u_1 > V_1$ ) et elle vaut  $u_2$  ( $u_2 < V_2$ ) à l'autre extrémité de l'orbite de transfert qui correspond à l'apogée : en effet, l'apogée et le périégée sont les seuls points d'une trajectoire elliptique où la vitesse est orthogonale au rayon vecteur.

L'énergie mécanique se conserve sur cette trajectoire :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m u_1^2 - \frac{GM_T m}{r_1} = \frac{1}{2} m u_2^2 - \frac{GM_T m}{r_2}$$

soit  $u_1^2 - \frac{2gR_T^2}{r_1} = u_2^2 - \frac{2gR_T^2}{r_2}$

La conservation du moment cinétique donne quant à elle

$$C = r_1 u_1 = r_2 u_2$$

Remarque : On pourrait aussi utiliser la connaissance de l'énergie mécanique sur le cas newtonien elliptique  $\mathcal{E}_m = -\frac{GMm}{2a}$  (avec  $a/2 = R_1 + R_2$ ).

Des deux relations précédentes, on peut extraire après calcul  $u_1$  et  $u_2$  :

$$u_1 = R_T \sqrt{\frac{2gr_2}{r_1(r_1+r_2)}} = 10,2 \text{ km.s}^{-1}$$

$$u_2 = R_T \sqrt{\frac{2gr_1}{r_2(r_1+r_2)}} = 1,62 \text{ km.s}^{-1}$$

On en déduit les suppléments de vitesse demandés :

$$\Delta V_1 = u_1 - V_1 = 2,42 \text{ km.s}^{-1}$$

et

$$\Delta V_2 = V_2 - u_2 = 1,47 \text{ km.s}^{-1}$$

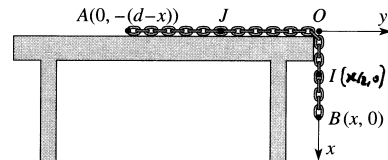
On remarque que les deux mises en marche des propulseurs correspondent effectivement à des augmentations de vitesse. C'était prévisible car l'ellipse de transfert est extérieure à la première orbite circulaire (énergie mécanique plus élevée) alors que c'est la situation inverse pour la deuxième orbite circulaire.

**Corr.2 Mouvement d'une chaîne sur une table \*\***

**Quelques capacités...** Exploiter l'intégrale première du mouvement énergie mécanique. Expliciter une énergie cinétique, une énergie potentielle de pesanteur. Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Appliquer le TRD. Déterminer une action de contact et interpréter le résultat.

1. On se place dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  du laboratoire. Il n'y a pas de frottements donc l'énergie mécanique de la chaîne est forcément constante. Chaque point de la chaîne a la même vitesse (inextensibilité) donc son énergie cinétique vaut

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$



Seul le poids de la partie OB de la chaîne travaille et il est appliqué en son milieu I donc l'énergie potentielle associée est

$$\mathcal{E}_p = -\left(\frac{m}{d} x g\right) \frac{x}{2} + C^{te}$$

Puisque

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = C^{te'}$$

on tire

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \frac{g}{d} x^2 = C^{te'}$$

On dérive cette relation en éjectant le cas  $\dot{x} = 0$  impossible, d'où

$$\ddot{x} = \frac{g}{d} x$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur instable en  $x = 0$ , ce qui est logique ! La chaîne glisse en accélérant sa chute à cause du poids de sa partie pendante de plus en plus important.

2. Avec les conditions initiales, on trouve

$$x(t) = b \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{d}} t\right)$$

3. On utilise le TRD sur la chaîne dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  du laboratoire :

$$m \vec{a}(G) = m \vec{g} + \vec{R}$$

On introduit J, milieu de [AO], où A pour coordonnées  $(0, -d+x)$ . Alors,

$$m \vec{OG} = \frac{m}{d} (x \vec{OJ} + (d-x) \vec{OJ})$$

soit

$$m \vec{OG} = \frac{m}{2d} (x^2 \vec{e}_x - (d-x)^2 \vec{e}_y)$$

On dérive deux fois pour en déduire l'accélération de G et le TRD donne par conséquent les projections

$$\frac{m}{d} (x^2 + x \ddot{x}) = R_x + m g \quad \text{et} \quad \frac{m}{d} (-x^2 + (d-x) \ddot{x}) = R_y$$

En remplaçant  $x(t)$  de la question précédente, on obtient après calcul

$$R_x = m g \left[ \frac{b^2}{d^2} \left( 2 \operatorname{ch}^2 \left[ \sqrt{\frac{g}{d}} t \right] - 1 \right) - 1 \right]$$

et  $R_y = m g \left[ \frac{b}{d} \operatorname{ch} \left[ \sqrt{\frac{g}{d}} t \right] - \frac{b^2}{d^2} \left( 2 \operatorname{ch}^2 \left[ \sqrt{\frac{g}{d}} t \right] - 1 \right) \right]$

Il ne faut pas s'étonner que  $R_y \neq 0$  même s'il n'y a pas de frottements ! C'est dû à l'effet du bord O de la table qui exerce une action non verticale, ce qui explique que le centre de masse de la chaîne ait une composante de déplacement sur (Oy) !

Remarque : Le modèle proposé est critiquable au moins à partir du moment où la réaction s'annule car cela veut dire qu'alors la chaîne décolle !

**Corr.3 Rupture d'une tige qui tombe sur le sol \*\***

**Quelques capacités...** Appliquer le TMC et le TRD pour un système bien choisi. Réaliser des figures adéquates. Tracer soigneusement un graphique. Interpréter des tracés.

1. On applique à la tige complète le théorème du moment cinétique en A, point fixe du référentiel terrestre supposé galiléen, en projection sur (Az) (seules les actions extérieures comptent) :

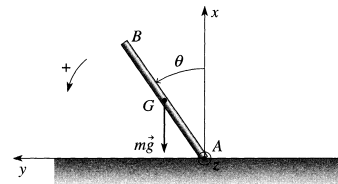
$$J_{Az} \dot{\theta} = m \frac{b}{2} g \sin \theta$$

avec, selon le théorème de Huygens,

$$J_{Az} = \frac{1}{12} m b^2 + m \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m b^2$$

Ainsi

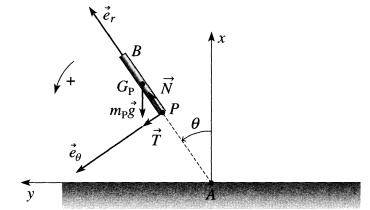
$$\dot{\theta} = \frac{3g}{2b} \sin \theta \quad (1)$$



On applique ensuite à la portion de tige PB, de longueur  $b-x$ , de masse  $m_P = \frac{b-x}{b} m$ , de centre d'inertie  $G_P$  tel que

$$AG_P = AP + PG_P = x + \frac{b-x}{2} = \frac{b+x}{2}$$

le TRD :  $m_P \frac{d^2 AG_P}{dt^2} = m_P \vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$



Alors, les projections sur les axes polaires  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  sont

$$-m_P \frac{b+x}{2} \dot{\theta}^2 = N - m_P g \cos \theta \quad (2)$$

et

$$m_P \frac{b+x}{2} \ddot{\theta} = T + m_P g \sin \theta \quad (3)$$

Enfin, la dernière équation utile s'obtient par application du TMC barycentrique à la portion de tige PB en projection sur  $G_P z$  :

$$J_{Pz} \dot{\theta} = (\vec{GP} \wedge (\vec{T} + \vec{N}) + \vec{M}_{Pz}^g) \cdot \vec{e}_z$$

Par théorème d'Huygens,

$$J_{Pz} = \frac{1}{12} m_P (b-x)^2 = \frac{1}{12} m \frac{(b-x)^3}{b}$$

Par conséquent, il vient

$$\frac{1}{12} m \frac{(b-x)^3}{b} \ddot{\theta} = -\frac{b-x}{2} T + \mathcal{M}_P \quad (4)$$

Il ne reste qu'à utiliser (1) et (3) pour obtenir

$$T = \frac{(3x-b)(b-x)}{4b^2} m g \sin \theta$$

et puis, l'équation (4) donne

$$\mathcal{M}_P = \frac{x(b-x)^2}{4b^2} m g \sin \theta$$

L'équation (2) permettrait de déduire N et d'effectuer une éventuelle analyse de non glissement de la portion de tige PB sur la partie basse AP (voir lois de Coulomb du frottement solide dans le chapitre *ad hoc*).

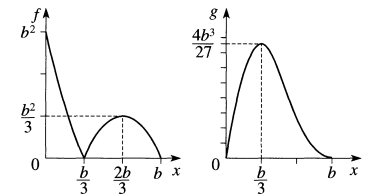
2. On a  $T_0$  qui évolue comme la fonction

$$f(x) = |(3x-b)(b-x)|$$

et  $\mathcal{M}_{P0}$  varie comme la fonction

$$g(x) = x(b-x)^2$$

Les tracés sont les suivants :



3. Si le moment  $\mathcal{M}_{P0}$  dépasse la valeur maximale que la tige peut localement supporter sans casser, ce qui se produit en premier au point  $P_0$  défini par  $x_0 = b/3$ , la tige se brise. Ainsi, lors de sa chute, une cheminée (si ce modèle de tige homogène est correct...) se casse (à la limite se plie car  $\vec{T} = \vec{0}$ ) au tiers de sa hauteur.

**Corr. 4 Déviation par une boule \*\***

**Quelques capacités...** Paramétrer un problème de mécanique. Identifier une méthode de résolution compte tenu des inconnues en jeu. Exploiter la conservation de l'énergie mécanique. Faire un dessin. Utiliser le principe de l'inertie.

Notons d'abord que  $V(r)$  désigne le potentiel et que le champ de force est

$$\vec{F} = -\text{grad}(mV(r))$$

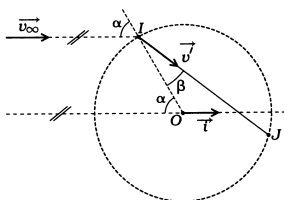
Par conséquent,  $\vec{F}(r \neq r_0) = \vec{0}$

Pour  $r = r_0$ , le potentiel  $V(r)$  subit une brusque discontinuité et la particule y sera soumise à une force radiale (car  $V = V(r)$ ) théoriquement infinie. Cette force (traduisant finalement un choc) n'affectera que la composante radiale  $v_r$  de la vitesse de la particule. En dehors de  $r = r_0$ , le mouvement sans force est rectiligne uniforme.

D'autre part, le champ de force est conservatif et le mouvement s'effectue dans le cadre de la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_c + E_p = C^{te} \quad \text{où} \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{et} \quad E_p = mV(r)$$

Enfin, le champ de force étant radial donc **central**, le mouvement sera plan, la particule demeurant dans le plan défini par  $O, \vec{v}_\infty$  et  $P_\infty$ . On se place dans ce plan dans toute la suite de l'étude. Il y a plusieurs cas : si  $b > r_0$ , la particule n'atteint pas la sphère de potentiel et son mouvement reste rectiligne uniforme (pas de déviation); mais étudions l'autre cas  $b < r_0$ , plus intéressant.



D'après la relation fondamentale de la dynamique au niveau du point I et projetée orthoradialement, la vitesse orthoradiale n'est pas affectée par le passage de  $r = r_0$ , soit, en notant  $\vec{v}'$  la vitesse après traversée de  $r = r_0$ ,

$$v_\infty \sin \alpha = v' \sin \beta$$

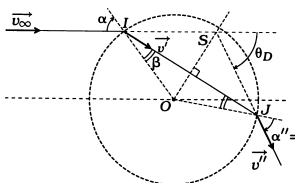
La conservation de l'énergie mécanique assure en plus que

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 + 0 = \frac{1}{2}mv'^2 - mV_0$$

Ces deux équations définissent  $v'$  et  $\beta$ . On a aussi

$$v' = \sqrt{v_\infty^2 + 2V_0} \quad \text{et} \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{2V_0}{v_\infty^2}}} \quad \text{avec} \quad \sin \alpha = \frac{b}{r_0}$$

On aura donc  $\beta < \alpha$  pour  $V_0$  (force attractive en  $r = r_0$ ).



La particule dans la boule a un mouvement rectiligne uniforme (pas de force) à la vitesse  $\vec{v}'$  et ressort en J, la vitesse devenant  $\vec{v}''$

avec  $\|\vec{v}''\| = v_\infty$  d'après la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}mv''^2 + 0 = \frac{1}{2}mv'^2 - mV_0 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 + 0$$

De plus, on a  $(\vec{OJ}, \vec{v}'') = \alpha$

par conservation de la composante tangentielle de la vitesse en J.

La déviation totale de la particule est représentée par l'angle  $\theta_D$  qui vérifie (triangle (JKS))

$$(\alpha - \beta) + \left(\frac{\pi - \theta_D}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

soit  $\theta_D = 2(\alpha - \beta)$

(chaque traversée de  $r = r_0$  fait subir une déviation  $\alpha - \beta$  à la particule). On peut alors conclure que

$$\theta_D = 2 \left[ \text{Arcsin} \left( \frac{b}{r_0} \right) - \text{Arcsin} \left( \frac{b}{r_0 \sqrt{1 + \frac{2V_0}{v_\infty^2}}} \right) \right]$$

On peut faire quelques remarques :

- Pour  $V_0 \gg \frac{1}{2}v_\infty^2$ , l'énergie cinétique prise par la particule par passage en  $r = r_0$  devient très importante, sa vitesse devient très grande et sa trajectoire passe près de O. La particule subit une déviation proche de  $2\alpha$ , ce que l'on peut vérifier sur le résultat final...
- Pour  $V_0 \ll \frac{1}{2}v_\infty^2$ , la déviation devient très faible...
- Pour modéliser la discontinuité de potentiel, on aurait pu envisager une variation continue de  $V(r)$  sur une épaisseur  $e$  (entre  $r_0 - e$  et  $r_0$ ), étudier le mouvement à force centrale correspondant, puis faire tendre  $e$  vers 0. C'est la conservation du moment cinétique dans l'épaisseur  $e$  qui aurait donné  $r_0 v_\infty \sin \alpha = (r_0 - e) v \sin \gamma$  avec  $v$  le module de la vitesse en  $r_0 - e$  et  $\gamma = (\vec{v}, \vec{PO})$ . Comme il se doit, pour  $e \rightarrow 0$ , on serait retombé sur  $v_\infty \sin \alpha = v' \sin \beta$ .

**Corr. 5 Mesure de e/m par la méthode de Schaw (1938) \*\***

**Quelques capacités...** Étudier le mouvement d'une particule chargée en champ électromagnétique statique. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique. Faire des approximations justifiées. Effectuer une application numérique en gérant correctement les chiffres significatifs.

1. Cherchons la valeur de K pour qu'il existe une trajectoire circulaire centrée sur l'axe des cylindres, de rayon  $r_0$ . Pour cela, il faut qu'initialement  $\vec{v}_0$  soit orthogonale à  $(Oz)$  et au rayon (autrement dit,  $\vec{v}_0$  orthoradiale). De plus,  $\dot{\theta}_0 = v_0/r_0$  dans ce cas (coordonnées cylindriques).

L'application du principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel galiléen du laboratoire donne, compte tenu de son mouvement circulaire recherché,

$$-m \frac{v_0^2}{r_0} = \frac{qK}{r_0} + qv_0 B$$

donc

$$K = - \left( \frac{mv_0^2}{q} + v_0 B r_0 \right)$$

2. On dérive K par rapport à  $v_0$  et on trouve son extrémum pour

$$v_0 = \frac{-qB r_0}{2m}$$

La valeur correspondante de K est

$$K' = - \frac{mv_0^2}{e}$$

3. À  $t = 0$ , un électron peut avoir une vitesse un peu différente de  $\vec{v}_0$  en direction, soit

$$\vec{v}'(t=0) = v_0 \cos \alpha \vec{e}_\theta + v_0 \sin \alpha \vec{e}_r$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel du laboratoire qui est galiléen :

$$m \vec{a} = q \vec{E} + q \vec{v}' \wedge \vec{B}$$

En projection sur les axes des coordonnées cylindriques, on tire

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{qK'}{r} + qr\dot{\theta} B \quad (1)$$

et

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -q\dot{r} B \quad (2)$$

Or

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt}$$

donc

$$\frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} = -q\dot{r} B \quad (3)$$

L'intégration de cette équation multipliée par  $r$  donne

$$r^2 \dot{\theta} = -\frac{qB}{2m} r^2 + C^{te}$$

Remarque : L'application du théorème du moment cinétique conduit aussi à cette relation...

L'utilisation des conditions initiales conduit à

$$r^2 \dot{\theta} - r_0 v_0 \cos \alpha = -\frac{qB}{2m} (r^2 - r_0^2) \quad (4)$$

Or

$$v_0 = -\frac{qB r_0}{2m}$$

et  $\alpha$  est petit donc (4) devient

$$r^2 \dot{\theta} + r_0^2 \frac{qB}{2m} \simeq -\frac{qB}{2m} (r^2 - r_0^2)$$

d'où

$$\dot{\theta} \simeq \dot{\theta}_0 = \frac{eB}{2m} = \frac{v_0}{r_0}$$

On remplace dans (1), ce qui donne

$$m \left( \ddot{r} - r \left( \frac{v_0}{r_0} \right)^2 \right) = \frac{mv_0^2}{r} - e r B \frac{v_0}{r_0}$$

L'angle  $\alpha$  étant faible, on se doute que  $r$  est proche de  $r_0$ . On pose  $r = r_0 + \varepsilon$  avec  $|\varepsilon| \ll r_0$ . Le développement de l'équation précédente à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  et ses dérivées fournit

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{2v_0^2}{r_0} \varepsilon = 0$$

Par conséquent, la perturbation de la trajectoire circulaire, en raison de l'angle  $\alpha$  non nul, est une oscillation harmonique de  $r$  autour de  $r_0$ . La résolution, compte tenu de  $r(t=0) = r_0$  et  $\dot{r}_0 = v_0 \sin \alpha$  donne

$$\varepsilon(t) = \frac{r_0 \sin \alpha}{\sqrt{2}} \sin \left( \sqrt{2} \frac{v_0}{r_0} t \right)$$

Le faisceau se refocalise pour la première annulation de  $\varepsilon$ , soit à l'instant

$$t_1 = \frac{r_0}{v_0} \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Cela correspond à une position angulaire  $\varphi \simeq \dot{\theta}_0 t_1$  égale à

$$\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

4. Puisque l'on a  $K' = -mv_0^2/e$  et que  $v_0^2 = eB r_0/(2m)$ , on tire

$$\frac{e}{m} = -\frac{4K'}{B^2 r_0^2} = 1,7563.10^{11} \text{ C.kg}^{-1}$$

Cette valeur est convenable en regard des valeurs actuellement retenues pour  $e$  et  $m$ . Cependant, l'énoncé aurait été plus intéressant s'il avait fait faire une étude de l'incertitude de mesure pour une telle manipulation (un problème de concours en perspective?)...

**Corr. 6 Mouvement d'un point dans un cône \***

**Quelques capacités...** Repérer, mettre en place et utiliser des intégrales premières du mouvement (composante de moment cinétique, énergie mécanique...). Travailler en coordonnées cylindriques. Mener un raisonnement graphique sur une énergie potentielle efficace (ou autre).

1. Les forces appliquées au point matériel sont son poids et la réaction du support **qui coupe l'axe Oz**. On peut donc écrire avec profit le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe  $Oz$  dans le référentiel galiléen d'étude :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = 0$$

On en déduit que  $L_{Oz}$  est une constante du mouvement qui constitue une **intégrale première du mouvement** (ne fait intervenir que des dérivées premières au maximum des paramètres cinématiques). Puisque, en coordonnées cylindriques,

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

alors

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$$

Ainsi,

$$L_{Oz} = (\vec{OM} \wedge m \vec{v}) \cdot \vec{e}_z$$

donne

$$r^2 \dot{\theta} = \frac{L_{Oz}}{m} = C^{te}$$

Cette relation impose notamment que le signe de  $\dot{\theta}$  reste toujours le même pour des conditions initiales données : la rotation du point matériel dans le cône se fait toujours dans le même sens.

2. Le mouvement ayant lieu sans travail d'action non conservative (pas de frottements notamment), l'énergie mécanique se conserve :

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = C^{te'}$$

$$\text{soit} \quad \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) + mgz = \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0$$

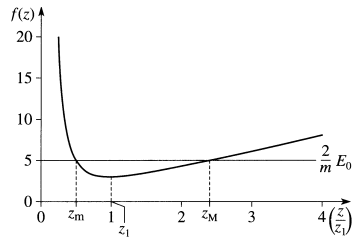
On remplace  $r$  par  $z \tan \alpha$ ,  $\dot{r}$  par  $\dot{z} \tan \alpha$  et  $\dot{\theta}$  par  $\frac{L_{Oz}}{mr^2}$ . Alors, on en déduit l'équation demandée avec

$$f(z) = \left( \frac{L_{Oz}}{m \tan \alpha} \right)^2 \frac{1}{z^2} + 2gz$$

3. Dans l'équation intégrale première de la question précédente, le terme  $(1 + \tan^2 \alpha) \dot{z}^2$  est positif ou nul. Alors, le mouvement n'est possible que si  $f(z) \leq 2 \frac{\mathcal{E}_0}{m}$ . Pour mieux visualiser cette condition, on doit tracer  $f(z)$  en notant que  $f(z)$  est extrémale en

$$z = z_1 = \left[ \frac{1}{g} \left( \frac{L_{Oz}}{m \tan \alpha} \right)^2 \right]^{1/3}$$

(expression obtenue après traduction de  $f'(z_1) = 0$ ...).



On note que le mouvement a lieu entre les deux plans  $z = z_m$  et  $z = z_M$  vérifiant  $f(z) = 2\epsilon_0/m$ .

4. On remarque que si  $2 \frac{\epsilon_0}{m} = f(z_1)$ ,  $z = z_1$  reste constant et le mouvement est circulaire de rayon  $r_0$ . Cela correspond à

$$\epsilon_0 = \frac{3}{2} m \left[ g \frac{L_{Oz}}{m \tan \alpha} \right]^{2/3}$$

et  $r_0 = z_1 \tan \alpha = \left[ \frac{1}{g} \left( \frac{L_{Oz}}{m \tan \alpha} \right)^2 \right]^{1/3} \tan \alpha$

On peut simplifier cette expression en notant que pour le mouvement circulaire,  $L_{Oz} = m r_0 v_0$ , d'où

$$r_0 = \frac{v_0^2}{g} \tan \alpha$$

On peut retrouver ce rayon  $r_0$  en partant de la relation fondamentale de la dynamique pour un mouvement circulaire :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \quad \text{avec} \quad \vec{a} = -r_0 \theta^2 \vec{e}_r + r_0 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

En projection sur  $\vec{e}_z$  et sur  $\vec{e}_r$ , on tire respectivement (en notant R le module de la réaction)

$$0 = R \sin \alpha - mg$$

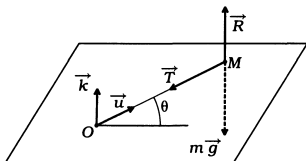
et  $-m r_0 \theta^2 = -R \cos \alpha$

Il ne reste qu'à éliminer R pour obtenir à nouveau l'expression de  $r_0$ ...

**Corr. 7 Traction sur un fil avec masse**

**Quelques capacités...** Réaliser un dessin avec les actions pertinentes en jeu. Exploiter une composante d'accélération nulle. Appliquer les théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique. Utiliser les propriétés des mouvements à force centrale. Travailler en coordonnées polaires. Calculer un travail.

1. On effectue un repérage du point mobile M par ses coordonnées polaires  $(\ell, \theta)$  de centre O, dans son plan de mouvement.



Le théorème du moment cinétique en O est très intéressant à appliquer car le mouvement est un mouvement à force centrale  $\vec{T}$  puisque  $\vec{R} + m \vec{g} = \vec{0}$  (pas de décollement de M du plan) :

$$\frac{dL_O}{dt} = \vec{M}_{O, \text{tension}} = \vec{0}$$

donc  $\vec{L}_O \cdot \vec{k} = C^{te} = m \ell^2 \omega$

soit  $(a - bt)^2 \omega = a^2 \omega_0$

d'où  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{a^2 \omega_0}{(a - bt)^2}$

Une autre méthode pour arriver à ce résultat consiste à exploiter la nullité de l'accélération orthoradiale de M et d'intégrer l'équation à variables séparables correspondante.

Poursuivons... L'intégration de la vitesse angulaire précédente, compte tenu de  $\theta(t=0) = 0$ , donne

$$\theta(t) = \frac{a \omega_0 t}{a - bt}$$

On obtient l'équation polaire de la trajectoire en éliminant t entre cette relation et  $\ell = a - bt$ . On trouve

$$\ell = \frac{a}{1 + \frac{b\theta}{a\omega_0}}$$

2. Le théorème de la résultante cinétique appliqué au point M dans le référentiel galiléen où le plan est fixe s'écrit

$$m \vec{\gamma}(M) = \vec{T} + m \vec{g} + \vec{R}$$

On a noté  $\vec{\gamma}$  l'accélération pour ne pas la confondre avec le paramètre a de l'énoncé. En dérivant deux fois dans la base polaire mobile le vecteur  $\vec{OM}$ , on trouve la partie radiale de l'accélération

$$\vec{\gamma}(M) \cdot \vec{u} = -(a - bt) \omega^2$$

Ainsi, l'expression projetée sur  $\vec{u}$  du théorème de la résultante cinétique est, en posant  $\vec{T} = -T \vec{u}$ ,

$$-m(a - bt) \omega^2 = -T$$

donc  $T = m \ell \omega^2 = m \frac{\ell^4 \omega^2}{\ell^3} = \frac{m a^4 \omega_0^2}{\ell^3}$

Le travail fourni par l'opérateur vaut, en prenant garde au signe,

$$W = \int_a^{\ell(t)} -T(\ell') d\ell'$$

On remplace l'expression précédente de T et on intègre. On trouve

$$W = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \left( \frac{a^2}{\ell^2} - 1 \right)$$

On aurait aussi pu déterminer cette expression par le théorème de l'énergie cinétique. Puisqu'il n'y a pas de frottements,

$$W = \Delta \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

soit  $W = \frac{1}{2} m [(b^2 + \ell^2 \omega^2) - (b^2 + a^2 \omega_0^2)]$

En utilisant  $\ell^2 \omega = a^2 \omega_0$ , on retrouve le même résultat final...