

Corr.1 Pendule avec frottements

Quelques capacités... Identifier l'intérêt d'une méthode énergétique et la nécessité d'utiliser conjointement la relation fondamentale de la dynamique. Utiliser une loi de Newton du frottement.

Le problème est à un seul degré de liberté cinématique mais on doit écrire deux relations scalaires indépendantes de mécanique pour s'en sortir car on a aussi besoin d'exprimer la réaction tangentielle pour remonter au coefficient de frottement.

On applique le théorème de l'énergie mécanique au point M entre M₁ et M₂, dans le référentiel galiléen \mathcal{R} du laboratoire (on peut aussi appliquer le TEC...):

$$\underbrace{\Delta \mathcal{E}_c}_0 + \underbrace{\Delta \mathcal{E}_p}_{mg \Delta h} = W_{\text{réaction}}$$

$\Delta h = h_{M_2} - h_{M_1}$ est la variation d'altitude et elle vaut

$$\Delta h = \ell (\cos \alpha - \cos \beta) \sin \theta_0$$

On doit exprimer le travail de la réaction et on a besoin pour cela de calculer la réaction tangentielle. Celle-ci est reliée à la réaction normale par la loi de Coulomb du glissement $|R_T| = f |R_N|$. L'application de la relation fondamentale de la dynamique au point M dans \mathcal{R} conduit, en projection sur la normale montante au plan incliné, à

$$0 = R_N - mg \cos \theta_0$$

donc
$$\vec{R}_T = -f mg \cos \theta_0 \vec{e}_T$$

où \vec{e}_T est le vecteur tangent à la trajectoire et orienté dans son sens de parcours (la réaction tangentielle est opposée à ce vecteur, bien sûr). Par conséquent,

$$W_{\text{réaction}} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R}_T \cdot d\vec{OM} = \int_{-\alpha}^{\beta} -f mg \cos \theta_0 \ell d\theta$$

soit
$$W_{\text{réaction}} = -f mg \ell (\alpha + \beta) \cos \theta_0$$

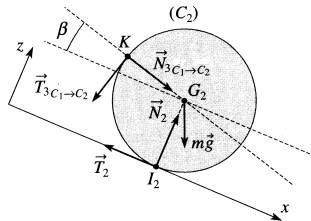
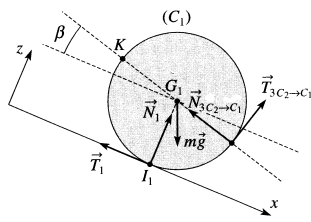
et on vérifie que ce travail est négatif. Finalement, le théorème de l'énergie mécanique déjà écrit donne, après simplification,

$$f = \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\alpha + \beta} \tan \theta_0 > 0$$

Corr.2 Équilibre de deux cylindres sur un plan incliné

Quelques capacités... Déterminer des actions de contact. Faire une figure adéquate. Appliquer le TRD et le TMC en statique. Résoudre un système d'équations. Vérifier un non décollement ainsi qu'un non glissement. Étudier un cas limite.

1. On note $\vec{T}_1 = -T_1 \vec{e}_x$ et $\vec{N}_1 = N_1 \vec{e}_z$ les composantes de la réaction du sol en I₁ sur (C₁). De même, on note $\vec{T}_2 = -T_2 \vec{e}_x$ et $\vec{N}_2 = N_2 \vec{e}_z$ les actions du sol en I₂ sur (C₂). Enfin, au point K, on note \vec{T}_3 et \vec{N}_3 l'action de (C₂) sur (C₁) et leur orientation choisie est celle de la figure (pour l'action de (C₁) sur (C₂), il suffit de changer de signe par le théorème des actions réciproques).



Le TRD sur (C₁) dans le référentiel galiléen d'étude conduit aux relations

$$mg \sin \alpha - T_1 + T_3 \sin \beta - N_3 \cos \beta = 0 \quad (1)$$

et
$$-mg \cos \alpha + N_1 + T_3 \cos \beta + N_3 \sin \beta = 0 \quad (2)$$

Le TMC sur (C₁) par rapport à son centre d'inertie immobile dans le référentiel galiléen d'étude fournit

$$R_1 (T_1 - T_3) = 0 \quad (3)$$

Les mêmes théorèmes traduits pour (C₂) donnent

$$mg \sin \alpha - T_2 - T_3 \sin \beta + N_3 \cos \beta = 0 \quad (4)$$

et
$$-mg \cos \alpha + N_2 - T_3 \cos \beta - N_3 \sin \beta = 0 \quad (5)$$

et
$$R_2 (T_2 - T_3) = 0 \quad (6)$$

La résolution à partir des équations (1) à (6) précédentes permet de tirer aisément

$$T = T_1 = T_2 = T_3 = mg \sin \alpha$$

puis
$$N_3 = mg \sin \alpha \tan \beta$$

$$N_1 = mg \left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right)$$

$$N_2 = mg \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right)$$

2. N₁, N₂ et N₃ sont positifs (car $\beta < \alpha < \pi/6$). Par conséquent, les contacts sont toujours là.

Il reste à vérifier que $|T_i| \leq f |N_i|$ pour les 3 contacts en I₁, I₂ et K. Comme N₁ < N₂, il faut voir si N₁ > N₃, ce qui est le cas si

$$\left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right) > \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \sin \alpha$$

soit
$$\cos(\alpha + \beta) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta \right) > \sin \alpha$$

soit
$$\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta > \alpha$$

soit
$$2\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

ce qui est vérifié car α et β sont inférieures à $\pi/6$! Finalement, on doit avoir $T \leq f N_3$, donc

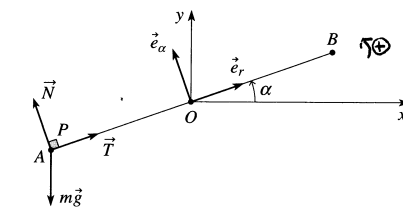
$$\tan \beta \geq \frac{1}{f}$$

3. Pour réaliser la condition précédente et avoir l'équilibre, on a intérêt à choisir f grand et β aussi (cylindres de rayons très différents). L'équilibre devient impossible lorsque $R_1 \rightarrow R_2$ car alors $\tan \beta \rightarrow 0$.

Corr.3 Point matériel sur une barre en rotation

Quelques capacités... Faire une figure pertinente. Appliquer le TRD en projection sur les directions adaptées. Utiliser le TMC. Traduire sur les composantes d'une action de contact entre solides des conditions de non décollement et de non glissement.

On pose $\vec{T} = T \vec{e}_r$ et $\vec{N} = N \vec{e}_\alpha$.



Le TRD appliqué à P dans le référentiel galiléen d'étude conduit à

$$ma \dot{\alpha}^2 = T - mg \sin \alpha \quad (1)$$

et
$$-ma \ddot{\alpha} = N - mg \cos \alpha \quad (2)$$

Il faut calculer $\ddot{\alpha}$ et $\dot{\alpha}^2$ en fonction de α . Pour cela, appliquons le TMC par rapport à O et projeté sur (Oz) pour le système total constitué de la barre et de P. Le référentiel d'étude est galiléen.

Puisqu'on ne doit pas tenir compte des actions intérieures dans ce théorème, on trouve

$$(J + ma^2) \ddot{\alpha} = mga \cos \alpha$$

soit
$$\ddot{\alpha} = \omega^2 \cos \alpha \quad (3)$$

avec
$$\omega = \sqrt{\frac{3mg}{a(M+3m)}}$$

Remarque : On vérifie que cette équation a un signe cohérent puisque le mouvement de rotation de la barre s'accélère dans le sens des α croissants lorsque $\cos \alpha > 0$.

Ensuite, (3) multipliée par $\dot{\alpha}$ s'intègre avec les conditions initiales $(\alpha_0, \dot{\alpha}_0) = (0, 0)$, d'où

$$\dot{\alpha}^2 = 2\omega^2 \sin \alpha \quad (4)$$

Remarque : Cette équation s'obtient aussi rapidement avec un théorème énergétique tel le TEM... Essayez, vous verrez!

Les équations (3) et (4) donnent dans (1) et (2)

$$T = mg \sin \alpha + 2ma\omega^2 \sin \alpha$$

et
$$N = mg \cos \alpha - ma\omega^2 \cos \alpha$$

Le point P reste sur la barre tant que $N > 0$, ce qui impose $g > a\omega^2$ (condition bien toujours vérifiée vu l'expression de ω); de plus, il ne doit pas glisser hors de la barre, ce qui impose la condition $|T| = T \leq fN$, soit

$$\tan \alpha < \tan \alpha_0 = f \frac{g - a\omega^2}{g + 2a\omega^2} = f \frac{M}{M + 9m}$$

soit

$$\alpha < \alpha_0 = \text{Arctan} \left(f \frac{M}{M + 9m} \right)$$

Corr.4 Un cylindre contre un trottoir

Quelques capacités... Effectuer un calcul géométrique. Faire une figure pertinente. Appliquer le TMC et le TRD. Traduire une condition de décollement. Obtenir une condition de non glissement par le calcul des composantes d'une action de contact.

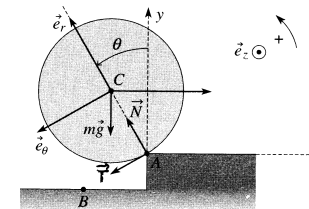
1. Avec le projeté de A sur (BC), il est clair que

$$BC = AC \cos \theta_0 + h$$

donc
$$h = a(1 - \cos \theta_0)$$

soit

$$h = 2a \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right)$$



2.a. Le TMC en A par rapport à la génératrice (Az) sur le cylindre en rotation autour de (Az) fixe car il n'y a pas de glissement donne

$$J \ddot{\theta} = \mathcal{M}_z$$

Toujours avec la fabuleuse technique du bras de levier, on trouve

$$\frac{3}{2} ma^2 \ddot{\theta} = amg \sin \theta - aF \cos \theta \quad (1)$$

Le cylindre décolle si $\ddot{\theta} < 0$ au départ pour $\theta = \theta_0$, donc si

$$amg \sin \theta_0 - aF \cos \theta_0 < 0$$

soit si

$$F > F_0 = mg \tan \theta_0$$

2.b. Lorsque le cylindre monte, θ diminue et \mathcal{M}_z est telle que

$$\mathcal{M}_z = amg \sin \theta - aF \cos \theta$$

soit

$$\mathcal{M}_z = -a \cos \theta \left(F - F_0 \frac{\tan \theta}{\tan \theta_0} \right)$$

donc \mathcal{M}_z reste négative, d'où $\ddot{\theta} < 0$: le cylindre ne peut pas continuer à monter.

2.c. Puisque le cylindre ne glisse pas en A, C a un mouvement de rotation autour de A et $|T| \leq f|N|$ (on oriente algébriquement \vec{T} et \vec{N} comme sur la figure). Le TRD sur le cylindre dans le référentiel galiléen d'étude donne

$$-ma\dot{\theta}^2 = N - F \sin \theta - mg \cos \theta \quad (2)$$

et

$$ma\ddot{\theta} = T - F \cos \theta + mg \sin \theta \quad (3)$$

Avec les équations (1) et (3), on tire

$$T = \frac{1}{3} (F \cos \theta - mg \sin \theta)$$

À l'instant initial, et pour $F = 2F_0 = 2mg \tan \theta_0$,

$$T = T_0 = \frac{1}{3} mg \sin \theta_0$$

De plus, toujours à l'instant initial, $\dot{\theta}_0 = 0$ donc (2) implique

$$N = N_0 = F \sin \theta_0 + mg \cos \theta_0$$

soit

$$N_0 = mg \frac{1 + \sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0}$$

Il n'y a pas de glissement au démarrage si $|T_0| \leq f N_0$ donc si

$$f \geq f_0 = \frac{1}{3} \frac{\cos \theta_0 \sin \theta_0}{1 + \sin^2 \theta_0}$$

2.d. On intègre l'équation (1) multipliée par $\dot{\theta}$ entre l'instant initial (où $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$) et l'instant où C est à la verticale de A ($\theta = 0$). On trouve

$$\frac{3}{4} m a^2 (\dot{\theta}^2 - 0) = -m g a (1 - \cos \theta_0) - a F (0 - \sin \theta_0)$$

Remarque : On obtient aussi rapidement cette relation par une méthode énergétique tel le TEM... Essayez, vous verrez!

Pour $F = F_0 = 2mg \tan \theta_0$, on tire $\dot{\theta}^2$ et $\vec{v}(C) = a \dot{\theta} \vec{e}_x$ vaut

$$\vec{v}(C) = \sqrt{\frac{4ga}{3} \frac{1 + \sin^2 \theta_0 - \cos \theta_0}{\cos \theta_0}} \vec{e}_x$$

Corr. 5 Mobile sur un tapis roulant ***

Quelques capacités... Distinguer les cas avec ou sans glissement pour le mouvement d'un solide. Exploiter les lois de Newton du frottement solide. Appliquer le TRD. Raisonner par étapes. Faire des figures pertinentes. Résoudre une équation d'oscillateur harmonique. Déterminer une période et une amplitude de mouvement périodique.

1. En projection sur (Ox), le solide (\mathcal{S}) est soumis à la force de rappel

$$\vec{F} = -Kx \vec{e}_x$$

(par choix de l'origine $x = 0$ pour le ressort ni comprimé, ni tendu).

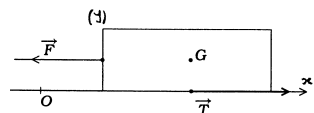
Il est aussi soumis à la force tangentielle de frottement $\vec{T} = T \vec{e}_x$ vérifiant, d'après les lois de Coulomb et $N = mg$ hors basculement,

$$T = +fmg \text{ si } v_{g,x}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) > 0 \text{ soit } \dot{x} > v_0$$

$$\text{et } T = -fmg \text{ si } v_{g,x}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) < 0 \text{ soit } \dot{x} < v_0$$

Si il y a glissement,

$$-2fmg \leq T \leq 2fmg \text{ pour } \dot{x} = v_0$$



On en déduit les trois mouvements de translation possibles :

Mouvement I Pour $\dot{x} > v_0$, $m\ddot{x} = -Kx - fmg$ soit

$$\ddot{x} + \omega^2(x+a) = 0 \quad (I)$$

Mouvement II Pour $\dot{x} < v_0$, $m\ddot{x} = -Kx + fmg$ soit

$$\ddot{x} + \omega^2(x-a) = 0 \quad (II)$$

Mouvement III Pour $\dot{x} = v_0$, $\ddot{x} = 0$ donc $T = Kx$ et $-2a \leq x \leq 2a$.

Les mouvements **I** et **II** sont oscillatoires harmoniques à ω autour des points $x = -a$ et $x = +a$ respectivement.

2. La vitesse initiale du solide \mathcal{S} est nulle donc $\dot{x} < v_0$ au départ et on amorce un mouvement de type **II**. On reste toujours dans cette phase si, pour tout t , $\dot{x} < v_0$. Traduisons cette condition.

La solution de (II) est

$$x(t) = a + B \cos \omega t + C \sin \omega t \text{ avec } (x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, 0)$$

donc

$$x_{II}(t) = a + (x_0 - a) \cos \omega t$$

Ainsi,

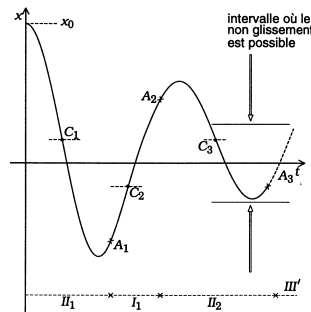
$$\dot{x}_{II}(t) = -\omega(x_0 - a) \sin \omega t$$

et on a $\dot{x} < v_0$ pour tout t si

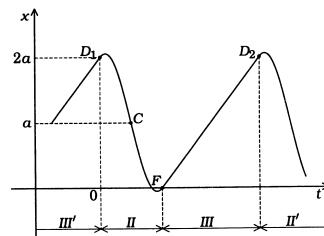
$$a - \frac{v_0}{\omega} < x_0 < a + \frac{v_0}{\omega}$$

Si x_0 est dans ce domaine, on maintient le mouvement $x_{II}(t)$ à tout instant.

Si x_0 n'est pas dans le domaine précédent, le début du mouvement est de type **II** avec $x_{II}(t)$ et il arrive un moment où \dot{x} atteint la valeur v_0 (point A_1 du graphe suivant). Si x_{A_1} n'est pas dans la zone de non glissement (c'est-à-dire entre $-2a$ et $2a$), la suite du mouvement est de type **I** tant que $\dot{x} > v_0$. Quand la vitesse retombe à $\dot{x} = v_0$, il y a à nouveau changement de régime (voir point A_2 du graphe) et ainsi de suite... Les points de changement de phase A_1, A_2, A_3, \dots sont de plus en plus près de l'axe $x = 0$ car les arches de sinusoides des phases sont décentrées (voir centres C_1, C_2, \dots).



Lorsque l'un des points A_i finit par tomber dans la zone de non glissement possible (point A_3 de la figure précédente par exemple), la suite du mouvement est alors un non glissement à vitesse v_0 jusqu'au décrochage qui se produit pour $x = 2a$ et qui redonne la phase **II** (portion de sinusoides centrée entre D_1 et F , symétrique de D_1 par rapport au centre C).



Cherchons la solution $x_{II'}(t)$ de la phase **II'** en prenant l'origine des temps en D_1 . On doit avoir

$$x_{II'}(t) = a + B \cos \omega t + C \sin \omega t$$

avec

$$(x(0), \dot{x}(0)) = (2a, v_0)$$

donc

$$x_{II'}(t) = a(1 - \cos \omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Cette phase se termine pour

$$t_F = 2t_C$$

avec $x_{II'}(t_C) = a$ soit

$$t_C = \frac{1}{\omega} \left[\pi - \text{Arctan} \left(\frac{a\omega}{v_0} \right) \right] = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\pi}{2} + \text{Arctan} \left(\frac{v_0}{a\omega} \right) \right]$$

Ensuite, de F à D_2 , on a une phase **III'** où le mouvement est uniforme et $t_{D_2} = t_F + \frac{2a}{v_0}$ donne une nouvelle phase **II''**... On en déduit que l'on obtient un **mouvement périodique (stick-slip)** de période

$$T = 2t_C + \frac{2a}{v_0}$$

et d'amplitude

$$A_{mvt} = \sqrt{a^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

(voir les coefficients des cosinus et sinus dans $x_{II'}(t)$). On rappelle que l'on arrive à ce régime si au départ x_0 n'est pas entre $a - v_0/\omega$ et $a + v_0/\omega$.

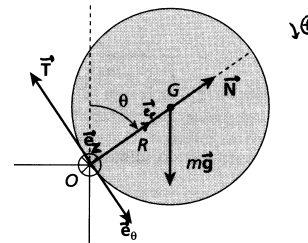
Corr. 6 Modification d'une liaison au cours du mouvement **

Quelques capacités... Traduire une condition de Newton de non glissement. Faire un schéma. Utiliser des coordonnées polaires. Appliquer le TMC, le TRD en projection sur des directions judicieuses. Obtenir des composantes d'une action de contact. Traduire une condition de perte de contact entre solides. Effectuer une analyse graphique.

On détermine l'angle pour lequel cesse le non glissement à l'aide du cas d'égalité de la loi de Coulomb

$$\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$$

et l'angle pour lequel cesse le contact avec $N = 0$ et on voit lequel est le plus faible... Dans tout le corrigé, le système est le cylindre et le référentiel d'étude est galiléen.



Le TMC en O projection sur (Oz) donne

$$J \dot{\theta} = mgR \sin \theta$$

donc

$$\frac{3}{2} R \ddot{\theta} = g \sin \theta \quad (1)$$

Le TRD s'écrit

$$m \vec{a}(G) = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$$

Or, G est en rotation autour de O tant que le cylindre ne glisse pas, d'où

$$\vec{a}(G) = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

et on tire, avec le choix $\vec{T} = -T \vec{e}_\theta$ et $\vec{N} = N \vec{e}_r$

$$-mR \dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N \quad (2)$$

et

$$mR \ddot{\theta} = mg \sin \theta - T \quad (3)$$

La combinaison des équations (1) et (3) donne

$$T = \frac{mg}{3} \sin \theta$$

L'équation (1) multipliée par $\dot{\theta}$ et intégrée donne, sachant que $\theta_0 = 0$ et $\dot{\theta}_0 = 0$,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3R} (1 - \cos \theta)$$

(équation que l'on peut aussi obtenir vite par l'énergie, avec le TEM... Essayez!). Avec l'équation (2), on tire

$$N = \frac{mg}{3} (7 \cos \theta - 4)$$

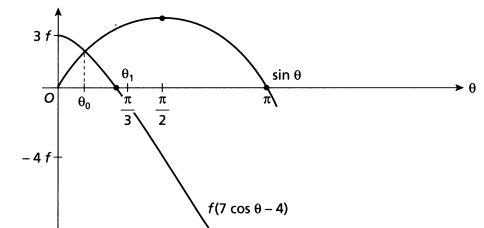
En conclusion, il y a **perte de contact** lorsque $N = 0$, soit pour

$$\theta_1 = \text{Arccos} \frac{4}{7} = 55^\circ$$

et il y a **glissement** lorsque $T = fN (> 0)$ soit

$$\sin \theta_0 = f(7 \cos \theta_0 - 4)$$

On obtient la valeur numérique de θ_0 numériquement ou graphiquement (voir graphe).



Comme on trouve $\theta_0 < \theta_1$, il y a **glissement avant la perte de contact!**

Corr. 7 Un oscillateur curieux **

Quelques capacités... Faire une figure. Appliquer le TMC dans le référentiel barycentrique (en exploitant la technique du bras de levier et en évoquant les actions d'inertie). Expliciter des vitesses de glissement. Appliquer le TRD. Utiliser les lois de Newton du glissement.

1. La planche \mathcal{P} a un mouvement de translation et est immobile dans son référentiel barycentrique \mathcal{R}^* donc son moment cinétique dans ce référentiel est nul en tout point : $\vec{L}^{\mathcal{R}^*}(\mathcal{P}) = \vec{0}$. Le TMC dans \mathcal{R}^* donne par conséquent

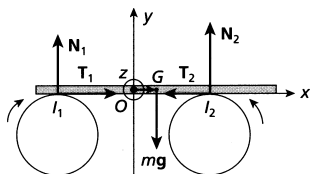
$$\sum \vec{M}_G(\text{actions ext.}) = \vec{0}$$

Les actions d'inertie sur la planche dans \mathcal{R}^* ne jouent pas car les forces réparties d'inertie de Coriolis sont nulles (translation!) et car les forces d'inertie d'entraînement, uniformes sur la planche s'agissant d'une translation, se ramènent à une force unique en G donc de moment nul en ce point. Du coup, l'égalité précédente devient (sachant que la planche est d'épaisseur négligeable, donc pas de moment des actions tangentielles de contact!)

$$(l-x)N_2 = (l+x)N_1 \quad (1)$$

en ayant posé $\vec{N}_i = N_i \vec{e}_y$. Ensuite, le TRD sur la planche, dans le référentiel galiléen du laboratoire, projeté sur la verticale, donne avec le mouvement horizontal de G

$$Mg = N_1 + N_2 \quad (2)$$



Finalement, on en déduit les composantes verticales des réactions sur la planche :

$$N_1 = \frac{l-x}{2l} mg \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{l+x}{2l} mg$$

2. On calcule les vitesses de glissement aux points de contact :

$$\vec{v}_g(I_1, \mathcal{P}/\text{rouleau}) = (\dot{x} - R\omega) \vec{e}_x$$

et
$$\vec{v}_g(I_2, \mathcal{P}/\text{rouleau}) = (\dot{x} + R\omega) \vec{e}_x$$

Au début du mouvement, $\vec{v}_g(I_1, \mathcal{P}/\text{rouleau})$ est suivant $-\vec{e}_x$ donc \vec{T}_1 est suivant \vec{e}_x . De la même façon, on trouve \vec{T}_2 suivant $-\vec{e}_x$. Lorsque la planche se déplace vers la droite, N_2 augmente et donc $T_2 = fN_2$ augmente également et la planche repart dans l'autre sens. C'est alors N_1 et $T_1 = fN_1$ qui augmentent et la planche repart vers la droite... Pour mettre cela en équation, on projette le TRD pour la planche, dans le référentiel galiléen du laboratoire, sur l'horizontale, d'où

$$m\ddot{x} = T_1 - T_2 = f(N_1 - N_2)$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} f x = 0$$

La planche effectue alors des oscillations autour de la position $x = 0$ d'équilibre stable, à la période

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{gf}}$$

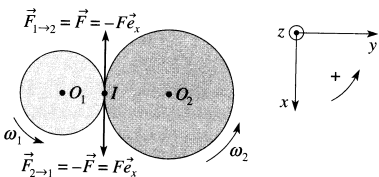
La mesure de cette période permet d'accéder à f . Je vous laisse montrer, à titre d'exercice, que si le sens de rotation des cylindres est inversé, la position $x = 0$ devient un équilibre instable...

Corr. 8 Freinage entre deux disques *

Quelques capacités... Expliciter une vitesse de glissement. Appliquer le théorème du moment cinétique. Interpréter une variation d'énergie cinétique.

1. Attention, il ne faut pas utiliser dans cette question de théorème énergétique car le système est dissipatif (voir seconde question...). On calcule d'abord la vitesse de glissement des disques au contact :

$$\vec{v}_g(I, \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1) = \vec{v}(I \in \mathcal{D}_2/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in \mathcal{D}_1/\mathcal{R})$$



Chaque disque admettant un mouvement de rotation autour de son axe fixe à la vitesse angulaire $\omega_i \vec{e}_z$, on trouve (sans erreur de signe!)

$$\vec{v}_g(I, \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1) = (R_2 \omega_2 + R_1 \omega_1) \vec{e}_x = v_g \vec{e}_x$$

Au départ,
$$v_{g0} = R_2 \omega_{20} + R_1 \omega_{10}$$

À la fin,
$$v_g = 0 = R_1 \Omega_1 + R_2 \Omega_2 \quad (1)$$

Ensuite, les lois de Coulomb donnent notamment que

$$F(t) > 0 \quad \text{car} \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g(I, \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1) < 0$$

Enfin, on applique le théorème du moment cinétique sur chaque disque par rapport à leur axe fixe, en faisant attention aux signes, sans oublier la loi de l'action et de la réaction. On trouve (bras de levier...)

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = -R_1 F \quad \text{et} \quad J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = -R_2 F$$

Ainsi,

$$m_1 R_1 \frac{d\omega_1}{dt} = m_2 R_2 \frac{d\omega_2}{dt}$$

qui donne par intégration entre les instants initial et final

$$m_1 R_1 (\Omega_1 - \omega_{10}) = m_2 R_2 (\Omega_2 - \omega_{20}) \quad (2)$$

La résolution du système formé par les équations (1) et (2) conduit à

$$\Omega_1 = \frac{m_1 R_1 \omega_{10} - m_2 R_2 \omega_{20}}{R_1 (m_1 + m_2)}$$

et

$$\Omega_2 = \frac{-m_1 R_1 \omega_{10} + m_2 R_2 \omega_{20}}{R_2 (m_1 + m_2)}$$

2. La variation d'énergie cinétique est, entre l'état initial et l'état final,

$$\Delta \mathcal{E}_c = \left(\frac{1}{2} J_1 \Omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \Omega_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} J_1 \omega_{10}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_{20}^2 \right)$$

soit

$$\Delta \mathcal{E}_c = -\frac{1}{4} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (R_1 \omega_{10} + R_2 \omega_{20})^2 < 0$$

L'énergie cinétique macroscopique est convertie en énergie cinétique d'agitation thermique (qui provoque un échauffement) lors du freinage des disques.