

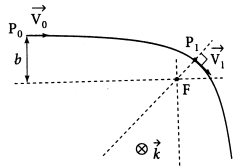
Corr.1 Trajectoire de météorites *

Quelques capacités... Identifier et exploiter des intégrales premières du mouvement. S'appuyer sur les propriétés des forces centrales newtoniennes (en les retrouvant si besoin est).

Il ne s'agit pas de déterminer l'équation de la trajectoire (pénible...) mais plutôt de déduire la condition cherchée des lois de conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique

en F (noté $\vec{L}$).

Soit P_1 le point de la trajectoire le plus proche de F et $r_m = FP_1$. Il suffit d'écrire que $r_m > R$ pour que le point matériel ne rencontre pas la boule. Attention, le centre étant attractif et la particule venant de l'infini avec une vitesse non nulle, la trajectoire est hyperbolique, entourant le centre attracteur F.



Au point P_1 , la vitesse est orthogonale au rayon vecteur puisque $\dot{r}(P_1) = 0$, donc le moment cinétique vaut

$$\vec{L} = \vec{L}(P_1) = m r_m V_1 \vec{k}$$

De plus, ce moment cinétique étant conservé (mouvement à force centrale), il vaut celui de l'instant initial où la masse m est à l'infini, donc

$$\vec{L} = \vec{L}(P_0) = m b V_0 \vec{k}$$

soit

$$r_m V_1 = b V_0 \quad (1)$$

On écrit aussi la conservation de l'énergie mécanique du système conservatif, entre P_0 et P_1 :

$$\frac{1}{2} m V_1^2 - \frac{K}{r_m} = \frac{1}{2} m V_0^2 \quad (2)$$

Entre les deux équations précédentes, on élimine l'inconnue V_1 et on déduit

$$r_m^2 + \frac{2K}{m V_0^2} r_m - b^2 = 0$$

de seule solution positive

$$r_m = -\frac{K}{m V_0^2} + \sqrt{\left(\frac{K}{m V_0^2}\right)^2 + b^2}$$

La condition cherchée s'écrit alors $r_m > R$, soit après une bonne gestion des inégalités,

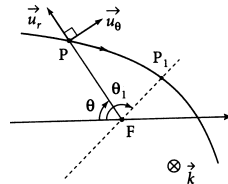
$$b > b_l = R \sqrt{1 + \frac{2K}{R m V_0^2}}$$

Ce résultat est cohérent avec des cas limites que je vous laisse traiter !

Remarque : D'après le cours sur les forces centrales newtoniennes, on sait que la trajectoire est une hyperbole d'équation polaire

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_1)}$$

où p est le paramètre, e l'excentricité (ici $e > 1$) et θ_1 la direction de l'axe focal (FP_1).



Il est possible de démontrer (par exemple avec des formules de Binet hors programme...) que

$$p = \frac{L_0^2}{mK} \quad \text{et} \quad e_m = \frac{1}{2} \frac{mK^2}{L_0^2} (e^2 - 1)$$

donc

$$p = \frac{m b^2 V_0^2}{K}$$

et

$$e^2 = 1 + \frac{2L_0^2 e_m}{mK^2}$$

Or, $e_m = \frac{1}{2} m V_0^2$. Par conséquent, par remplacement,

$$e^2 = 1 + \left(\frac{m V_0^2 b}{K} \right)^2 > 1$$

Il reste à obtenir θ_1 en traduisant que pour $\theta = 0$, r tend vers l'infini :

$$e \cos \theta_1 = -1$$

D'autre part

$$e \sin \theta_1 = \sqrt{e^2 - e^2 \cos^2 \theta_1} = \sqrt{e^2 - 1} = \frac{m V_0^2 b}{K} > 0$$

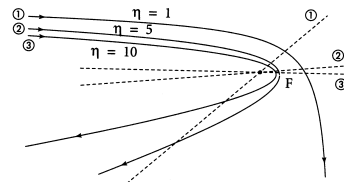
On en déduit finalement l'équation complète de la trajectoire, en posant $\eta = \frac{K}{m V_0^2 b}$:

$$r = \frac{b}{(1 - \cos \theta) \eta + \sin \theta}$$

On retrouve alors le résultat obtenu dans l'exercice (plus simplement...) en calculant

$$r_m = \frac{p}{1 + e}$$

On peut tracer à l'ordinateur différentes trajectoires obtenues en fixant b et en faisant varier V_0 :

**Corr.2 Identification d'un système ****

Quelques capacités...

Analyser et exploiter des tracés fournis (linéaire et logarithmique). Identifier et étudier des résonances. Construire et mener à bien une étude théorique. Traiter un problème avec oscillateur(s) harmonique(s). Effectuer des approximations. Faire des applications numériques. Appliquer le théorème du centre d'inertie. Utiliser la notation complexe pour résoudre un régime forcé. Identifier une pulsation propre.

1. Les courbes montrent deux **résonances** aux fréquences f' et f'' et une **antirésonance** à une fréquence f_{ar} , avec les valeurs numériques (accessibles avec le tracé linéaire)

$$f' \simeq 1,12 \text{ Hz}$$

$$f_{ar} \simeq 1,95 \text{ Hz}$$

$$f'' \simeq 2,52 \text{ Hz}$$

Il est possible que vous obteniez un chiffre significatif de moins suivant la taille du graphique exploité (ce n'est pas grave !).

La présence des deux pics de résonance vient du forçage d'un système linéaire présentant deux fréquences propres. Lorsque la force sinusoïdale excitatrice est ajustée à l'une de ces fréquences propres, il y a effet de résonance. Chaque résonance est bornée par l'existence des frottements. Notons qu'en l'absence de frottements, il n'y aurait quand même pas divergence de l'amplitude $A_1(f)$ car des non linéarités apparaissent en pratique...

La zone d'antirésonance entre les deux pics de résonance, au voisinage de f_{ar} , est **particulièrement intéressante pour réaliser des étouffeurs de vibrations**. Par exemple, lors d'un séisme, on peut souhaiter limiter l'amplitude des oscillations d'un pont donc on lui rajoute des systèmes anti-sismiques calibrés de façon adéquate se comportant comme des oscillateurs. Par couplage, le pont ne vibrera pas trop (analogue à la masse en antirésonance) et les systèmes anti-sismiques vibreront (analogue grossièrement à l'autre masse).

2. Afin d'exploiter les courbes, il faut déterminer l'équation de la courbe $A_1(f)$.

On commence par définir la cinématique du problème en posant un axe (Ox) horizontal (orienté de gauche à droite : je vous laisse faire la figure obligatoire). On repère chaque masse par son déplacement *par rapport à sa position d'équilibre* : ξ_1 pour celle de gauche et ξ_2 pour celle de droite. Autrement dit, $\xi_1 = 0$ et $\xi_2 = 0$ en l'absence

de la force excitatrice $\vec{F}_1$ et à l'équilibre.

On traduit ensuite la dynamique du problème. Par application du théorème du centre d'inertie dans le référentiel galiléen d'étude où les parois sont fixes, en projection sur l'axe horizontal, à chacune des masses considérée séparément, il vient

$$m \ddot{\xi}_1 = -k \xi_1 - k' (\xi_1 - \xi_2) - \lambda \xi_1 + F_1 \cos \omega t \quad (1)$$

$$m \ddot{\xi}_2 = -k \xi_2 - k' (\xi_2 - \xi_1) - \lambda \xi_2 \quad (2)$$

On a choisi l'origine des temps de sorte à pouvoir traduire ainsi la

force $\vec{F}_1$ avec $F_1 > 0$ et on a noté $\omega = 2\pi f$ la pulsation. Puisque l'on s'intéresse au régime forcé (ce qui sous-entend que les frottements ont quand même pu faire disparaître le régime libre...), on passe en notation complexe en $e^{j\omega t}$:

$$-m \omega^2 \underline{\xi}_1 = -k \underline{\xi}_1 - k' (\underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_2) - j \omega \lambda \underline{\xi}_1 + F_1 e^{j\omega t}$$

$$-m \omega^2 \underline{\xi}_2 = -k \underline{\xi}_2 - k' (\underline{\xi}_2 - \underline{\xi}_1) - j \omega \lambda \underline{\xi}_2$$

On parvient sans difficulté à isoler $\underline{\xi}_1$ de ce système :

$$\underline{\xi}_1 = \frac{k + k' - m \omega^2 + j \omega \lambda}{(k + k' - m \omega^2 + j \omega \lambda)^2 - k'^2} F_1 e^{j\omega t}$$

Les courbes $A_1(f)$ de l'énoncé ne doivent donc être rien d'autre que les représentations linéaire et logarithmique du module de $\underline{\xi}_1$ en fonction de la fréquence $f = \omega/(2\pi)$. Il ne reste qu'à exploiter ces courbes en relation avec ça...

Commençons par exploiter les résonances. Comme les frottements sont faibles, il est raisonnable d'approcher les valeurs des fréquences de résonance f' et f'' par celles pour $\lambda = 0$ et qui annulent le dénominateur de $\underline{\xi}_1$. Elles sont donc telles que

$$(k + k' - m \omega^2)^2 \simeq k'^2$$

soit

$$k + k' - m \omega^2 = \pm k'$$

d'où

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega'' = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}$$

Ainsi

$$\frac{k}{m} = 4\pi^2 f'^2 = 49,5 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

et

$$\frac{k'}{m} = 2\pi^2 (f''^2 - f'^2) = 101 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

On peut valider cette approche avec $\lambda = 0$ en considérant la fréquence d'antirésonance qui annule le numérateur de $\underline{\xi}_1$ et ces deux valeurs numériques de k/m et k'/m :

$$f_{ar} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k + k'}{m}} \simeq 1,95 \text{ Hz}$$

C'est parfaitement cohérent avec le relevé précédent !

On peut accéder à la valeur de F_1/m en envisageant, par exemple, l'asymptote aux valeurs de ω élevées manifestement affine sur la représentation logarithmique. En haute fréquence,

$$\underline{\xi}_1 \simeq -\frac{F_1}{m \omega^2} e^{j\omega t}$$

donc, en pensant bien à passer en variable f , l'asymptote en représentation logarithmique est bien affine, « de pente -2 » (en raisonnant avec les logarithmes décimaux des valeurs écrites sur les axes) et d'ordonnée pour $f = 10^0$ Hz valant

$$\frac{F_1}{4\pi^2 m} = 0,25 \text{ cm}$$

donc

$$\frac{F_1}{m} \simeq 0,10 \text{ m}$$

On peut contrôler ce résultat en vérifiant la valeur de l'amplitude A_1 à fréquence nulle ($A_1(0) \simeq 0,12$ cm sur le graphique de gauche) :

$$A_1(0) = \frac{k + k'}{(k + k')^2 - k'^2} F_1$$

$$\text{soit} \quad A_1(0) = \frac{k/m + k'/m}{(k/m + k'/m)^2 - (k'/m)^2} \frac{F_1}{m} \simeq 0,12 \text{ cm}$$

avec les valeurs numériques de k/m , k'/m et F_1/m évaluées précédemment. Ça colle !

Pour accéder à λ/m , on peut par exemple exploiter l'amplitude $A_{1,\max} \simeq 0,70$ cm à la première résonance, telle que

$$A_{1,\max} = \left| \frac{k + k' - m \omega'^2 + j \omega' \lambda}{(k + k' - m \omega'^2 + j \omega' \lambda)^2 - k'^2} \right| F_1$$

$$\text{soit} \quad A_{1,\max} = \left| \frac{1 + j \omega' \lambda / k'}{(k' + j \omega' \lambda)^2 - k'^2} \right| F_1$$

Les frottements étant faibles, $\omega' \lambda \ll k'$ et on parvient à

$$A_{1,\max} \simeq \frac{F_1/m}{2 \omega' \lambda / m}$$

donc

$$\frac{\lambda}{m} = \frac{F_1/m}{2 A_{1,\max} \sqrt{k/m}} \simeq 1,0 \text{ s}^{-1}$$

Vous pouvez vérifier sans difficulté qu'une telle valeur permet de retrouver les amplitudes à l'antirésonance et à la seconde résonance...

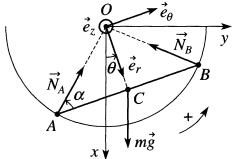
3. La masse m n'est pas estimable car les équations (1) et (2), divisées par m , montrent que ce sont les facteurs k/m , k'/m , λ/m et F_1/m qui pilotent l'évolution des déplacements des masses !

Corr. 3 Oscillations d'une tige sur un demi-cercle

Quelques capacités...

Réaliser un beau dessin adapté. Appliquer les théorèmes de la dynamique (TRD, TMC selon utilité!) et de l'énergétique (TEM...). Justifier qu'un système est conservatif. Obtenir une période de petites oscillations.

1.a. On note que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ et $OC = \sqrt{R^2 - l^2} = R/2$ donc $\alpha = \frac{\pi}{6}$ sur la figure suivante précisant des notations éventuellement utiles...



L'application du théorème de la résultante dynamique sur la tige n'est pas judicieuse du tout car elle ajoute des inconnues dynamiques (actions de contact en A et en B!). Par contre, on peut s'en sortir rapidement avec le théorème du moment cinétique appliqué à la tige dans le référentiel galiléen du laboratoire par rapport à l'axe Oz fixe; dans ce cas, seul le poids présente un moment (calculable rapidement par la technique du bras de levier) car les actions de contact en A et en B sont des forces coupant l'axe Oz en l'absence de frottement! Il vient

$$J_{Oz} \ddot{\theta} = -mg \frac{R}{2} \sin \theta$$

d'où

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta \quad (E)$$

1.b. Dans le référentiel terrestre galiléen, en l'absence de frottements, le système de la tige est conservatif (aucune action non conservative ne travaillant), ce qui se traduit par théorème de l'énergie mécanique en

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = C^{te}$$

Comme la tige est en rotation autour de l'axe Oy, on peut expliciter facilement l'énergie cinétique et déduire

$$\frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2 - m g \frac{R}{2} \cos \theta = C^{te}$$

En explicitant cette relation et en la dérivant, on retrouve bien l'équation (E). Il était aussi possible de raisonner avec le théorème de la puissance mécanique bien sûr!

2. L'équilibre de la tige correspond à $\ddot{\theta} = 0$, soit $\theta = 0$ ici (vu la configuration du système, $\theta = \pi$ n'est pas possible). Les petites oscillations autour de cette position correspondent à $|\theta| \ll 1$, donc (E) donne

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique (stable, ouf!) de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Corr. 4 La fusée de Tintin?

Quelques capacités...

Appliquer une loi de la dynamique à un système fermé bien choisi. Faire un bilan de quantité de mouvement. Intégrer une équation différentielle. Critiquer un modèle. Représenter un graphique avec une légende complète.

1. Notons ($\mathcal{S}$) le système **ouvert** de la fusée et son contenu (masse $m(t) = m_0 - D_m t$). On peut définir un système fermé ($\mathcal{S}^*$) tel que

- à l'instant t , c'est le contenu de ($\mathcal{S}$);
- à l'instant $t + dt$, c'est le contenu de ($\mathcal{S}$), ainsi que la matière éjectée entre t et $t + dt$.

On effectue alors un bilan de quantité de mouvement pour ($\mathcal{S}^*$) entre les instants t et $t + dt$ pour en déduire sa variation par unité de temps. Par extensivité,

$$\dot{\vec{P}}^*(t) = m(t) \vec{v}(t)$$

$$\text{et } \vec{P}^*(t + dt) = m(t + dt) \vec{v}(t + dt) + D_m dt [\vec{v}(t) + \vec{u}]$$

$$\text{d'où } \frac{d\vec{P}^*}{dt} = \frac{d[m(t) \vec{v}(t)]}{dt} + D_m [\vec{v}(t) + \vec{u}]$$

La variation par unité de temps du système fermé est la somme de celle du système ouvert avec le débit de quantité de mouvement sortante (associée aux gaz éjectés).

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système fermé dans le référentiel terrestre galiléen donne

$$\frac{d\vec{P}^*}{dt} = m(t) \vec{g}$$

d'après les hypothèses grossières du modèle. En utilisant l'équation précédemment écrite, il vient après simplification l'équation différentielle du mouvement

$$m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m(t) \vec{g} - D_m \vec{u}$$

On constate que l'équation différentielle ressemble à celle que l'on pourrait écrire pour un point matériel de masse m soumis à son poids et à une force supplémentaire $-D_m \vec{u}$ appelée **force de poussée (orientée vers le haut, vu le sens descendant de $\vec{u}$)**.

De plus, la fusée ne peut avoir une accélération effectivement ascendante que si la force de poussée l'emporte sur le poids. Pour qu'il y ait décollage, il faut que $m(0)g < D_m \|\vec{u}\|$.

2. Puisque $m(t) = m(0) - D_m t$, on peut séparer l'équation différentielle précédente en

$$d\vec{v}(t) = \left(\vec{g} - \frac{D_m}{m(0) - D_m t} \vec{u} \right) dt$$

donc

$$\vec{v}(t) = \vec{g} t + \ln \left(\frac{m(0) - D_m t}{m(0)} \right) \vec{u}$$

Si on trace l'évolution de la vitesse $v_z(t)$ (faites-le!), on se rend compte que celle-ci augmente de plus en plus et démarre avec une pente initiale $-g + D_m \|\vec{u}\|/m(0) > 0$ si la condition de décollage est valide (la courbe est convexe, au-dessus de sa tangente à l'origine $[-g + D_m \|\vec{u}\|/m(0)]t$). La vitesse ne diverge pas pour autant dans la mesure où le carburant vient forcément à manquer (de toute façon, le modèle est largement critiqueable au niveau de la non prise en compte des frottements, de la non uniformité du champ de pesanteur, du débit réel non constant...).

Corr. 5 Les patineurs

Quelques capacités...

Paramétrer un problème et identifier une méthode de résolution. Étudier un système pseudo-isolé de deux points. Exploiter les constantes du mouvement.

Puisqu'on néglige les frottements, l'ensemble des deux patineurs n'est soumis qu'à des forces extérieures verticales : la quan-

tité de mouvement, dans le plan horizontal, se conserve donc (**attention, on ne tient compte que des actions extérieures dans la relation fondamentale de la dynamique**). Avec des notations évidentes,

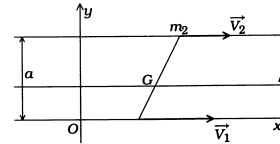
$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_G = C^{te}$$

Précisons la position du point G (centre de gravité des patineurs).

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

donc

$$y(G) = a_1 = \frac{m_2 a}{m_1 + m_2}$$



Le point G décrit, avant et après liaison le système étant pseudo-isolé, la droite Δ à la vitesse $\vec{v}_G$ obtenue en dérivant (1), soit

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \vec{e}_x$$

Notons que cette vitesse étant constante, le référentiel barycentrique du système des deux patineurs est galiléen (ce qui n'est généralement pas le cas!).

Passons à présent à la considération du moment cinétique de l'ensemble, dans le référentiel barycentrique (galiléen), par rapport au point G fixe dans ce référentiel. Par théorème du moment cinétique et puisque $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G) = \vec{0}$ (**attention, on ne tient compte que des actions extérieures dans le théorème du moment cinétique**), il vient que **le moment cinétique en G est conservé dans le référentiel barycentrique** (on pourrait même montrer que ça marche dans le référentiel du laboratoire où G n'est pas fixe...):

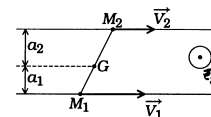
$$\vec{L}_{\text{av}}^*(G) = \vec{L}_{\text{ap}}^*(G) \quad (2)$$

(la précision du point G n'est pas obligatoire car le torseur cinétique est un torseur couple dans le référentiel barycentrique... mais cette propriété est hors programme et n'est pas primordiale ici!). Posons pour les calculs

$$a_2 = y(M_2) - y(G) = a - a_1$$

avec

$$\frac{a_1}{m_2} = \frac{a_2}{m_1} = \frac{a}{m_1 + m_2}$$



On explicite le moment cinétique barycentrique avant accrochage :

$$\vec{L}_{\text{av}}^*(G) = \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_G) + \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_G)$$

En posant $\vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_x$ et $\vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_x$ les vitesses avant accrochage, on trouve

$$\vec{L}_{\text{av}}^*(G) = (-m_2 a_2 v_2 + m_1 a_1 v_1) \vec{e}_z$$

Après accrochage, les patineurs M_1 et M_2 tournent avec la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ autour du point G (facile à imaginer dans le référentiel barycentrique!). Alors,

$$\vec{L}_{\text{ap}}^*(G) = J_G \omega \vec{e}_z \quad \text{où } J_G = m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2$$

On remplace les expressions des moments cinétiques dans (2) et on remplace a_1 et a_2 en fonction de a et on trouve, après simplifications,

$$v_1 - v_2 = a \omega$$

Finalement, le vecteur rotation dans le référentiel barycentrique est

$$\vec{\omega} = \frac{v_1 - v_2}{a} \vec{e}_z$$

On vérifie que $\vec{\omega}$ est le vecteur nul lorsque $v_1 = v_2$, ce qui est après tout logique!

Corr. 6 Tchou tchou le p'tit train***

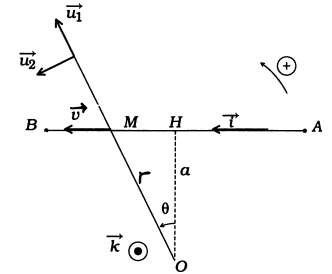
Quelques capacités...

Exploiter le théorème du moment cinétique. Voir l'existence d'une intégrale première du mouvement. Paramétrer judicieusement un problème de mécanique. Intégrer une équation à variables séparables.

Le système complet (train et plateau), dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen du laboratoire, est **isolé** en moment par rapport à (O_z) (les actions **extérieures** n'ont pas de moment par rapport à cet axe : poids et action de liaison pivot parfaite) : le moment cinétique L_{O_z} est constant pour ce système. Or, initialement, l'ensemble est immobile donc

$$L_{O_z} = 0 \quad (\text{intégrale première du mouvement})$$

Calculons par conséquent le moment cinétique total par rapport à (O_z). On étudie dans un premier temps le parcours d'un côté AB du carré. On note $\vec{v}$ la vitesse du train **par rapport au plateau** et $\alpha \vec{e}_z$ la vitesse angulaire du plateau par rapport au sol.



En décomposant sur chaque sous-système, on a

$$L_{O_z} = [\overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}(\text{train}/\mathcal{R})] \cdot \vec{e}_z + J \alpha$$

soit

$$L_{O_z} = [m r \vec{u} \wedge (v \vec{v} + r \alpha \vec{u})] \cdot \vec{e}_z + J \alpha$$

d'où

$$L_{O_z} = m r v \cos \theta + m r^2 \alpha + J \alpha$$

donc

$$L_{O_z} = m a v + (J + m r^2) \alpha$$

Le fait que ce moment cinétique L_{O_z} soit toujours nul donne la relation importante

$$\alpha = -\frac{m a v}{J + m r^2} \quad (1)$$

On relie alors v à $\theta(t)$:

$$HM = x = a \tan \theta$$

soit

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{a \dot{\theta}}{\cos^2 \theta}$$

Comme $r = a / \cos \theta$, la relation (1) devient avec ce qui précède

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{ma^2}{J+m\frac{a^2}{\cos^2\theta}} \frac{1}{\cos^2\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

soit

$$d\alpha = -\frac{d\theta}{1+\eta \cos^2\theta} \quad \text{où} \quad \eta = \frac{J}{ma^2}$$

Le signe $-$ traduit la rotation inverse du plateau par rapport au train, ce qui est logique d'après la conservation du moment cinétique.

Il reste à intégrer. On pose $\xi = \tan \theta$ et l'équation précédente devient

$$d\alpha = -\frac{d\xi}{c^2 + \xi^2} \quad \text{en posant} \quad c^2 = 1 + \eta > 0$$

Pour le parcours du côté [AB] du carré, la rotation du plateau est de

$$\Delta\alpha_{AB} = -2 \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{1+\eta \cos^2\theta} = -2 \int_0^1 \frac{d\xi}{c^2 + \xi^2}$$

soit

$$\Delta\alpha_{AB} = -\frac{2}{c} \left[\text{Arctan} \frac{\xi}{c} \right]_0^1$$

d'où

$$\Delta\alpha_{AB} = -\frac{2}{\sqrt{1+\eta}} \text{Arctan} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\eta}} \right]$$

et pour un tour complet du carré, on obtient une rotation

$$\Delta\alpha = 4\Delta\alpha_{AB} = -\frac{8}{\sqrt{1+\eta}} \text{Arctan} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\eta}} \right]$$

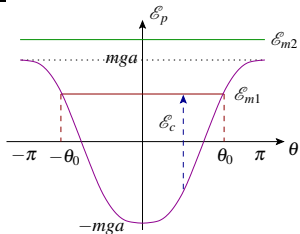
Corr.7 Étude d'un pendule pesant **

Quelques capacités... Exploiter un tracé d'énergie potentielle (efficace pour discuter des mouvements. Représenter et commenter un portrait de phase. Appliquer les théorèmes de la dynamique (énergie, moment cinétique, résultante cinétique). Expliciter la période d'un mouvement périodique. Expliciter une résultante inconnues. Raisonner dans une base de coordonnées polaires.

1.a. L'énergie potentielle du système est due uniquement à l'action de pesanteur, soit, à une constante près :

$$\mathcal{E}_p = -mga \cos \theta$$

Son tracé est le suivant sur le domaine $[-\pi; \pi]$ (c'est une période) :



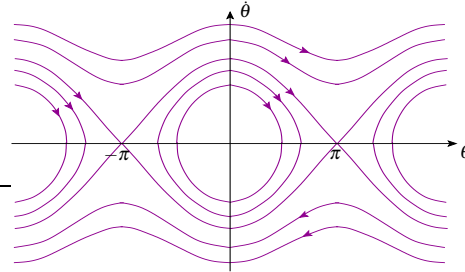
Pour commenter les mouvements possibles, il est nécessaire de noter que le système du pendule est **conservatif** puisqu'aucune action non conservative ne travaille (la liaison est parfaite). Son énergie mécanique constante est

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 - mga \cos \theta = C^te$$

La constante est déterminée par les conditions initiales $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$. Le minimum d'énergie potentielle en $\theta = 0$ (resp. maximum en $\pm\pi$) correspond forcément à la position d'équilibre stable (resp. instable) puisque l'énergie cinétique doit toujours rester positive.

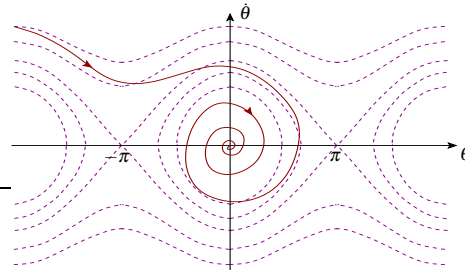
L'espace accessible est, pour la même raison, tel que $\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_p$. On a deux types de mouvements : un état lié pour $|\mathcal{E}_m| < mga$ qui correspond au **mouvement pendulaire oscillant** et un état libre pour $|\mathcal{E}_m| > mga$ qui correspond au **mouvement révolutif**.

1.b. L'équation cartésienne du portrait de phase est l'expression précédente de l'énergie mécanique ! On en déduit informatiquement l'allure suivante :

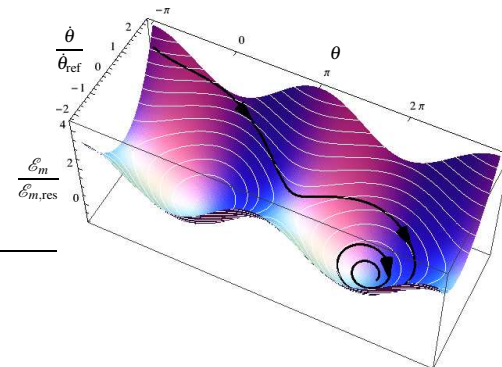


Pour un pendule simple, le portrait de phase est forcément différent puisque le fil d'un tel pendule peut se détendre (lorsque sa tension s'annule) !

1.c. L'énergie mécanique diminue progressivement. On peut imaginer se trouver au départ sur un mouvement révolutif et puis se retrouver, lorsque l'énergie mécanique devient inférieure à mga , sur un mouvement pendulaire oscillant amorti. La trajectoire sur le portrait de phase est la suivante :



Une autre visualisation d'une trajectoire de phase est possible en 3D en portant sur la troisième axe l'énergie mécanique. On voit alors bien ce qui se passe dans les cas conservatifs (lignes blanches), ainsi que dans les cas dissipatifs (cas du tracé noir fléché, conduisant au fond d'un puits énergétique).



Remarque : La notion de portrait de phase est fondamentale en théorie des systèmes dynamiques. Elle permet de mieux visualiser

les trajectoires de phase de systèmes pouvant être complexes et de percevoir la notion de chaos.

2. La première méthode consiste à dériver l'expression de l'énergie mécanique déjà écrite à la première question. Il vient

$$\dot{\theta} [I_A \ddot{\theta} + mga \sin \theta] = 0$$

Or, on ne s'intéresse pas à la solution avec $\dot{\theta}$ nulle à tout instant (positions d'équilibre déjà connues), donc

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I_A}}$$

Une seconde méthode n'est pas d'utiliser le théorème de la résultante dynamique (résultante d'axe inconnue !). Il faut penser au théorème du moment cinétique appliqué au solide dans le référentiel galiléen d'étude et en projection sur l'axe (Δ) :

$$\frac{d[I_A \dot{\theta}]}{dt} = -mga \sin \theta$$

par la technique du bras de levier et sachant que l'on a une liaison pivot parfait. On en déduit le même résultat que précédemment.

3.a. Pour les petites oscillations, l'équation du mouvement est celle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

d'où la période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{mga}}$$

3.b. Le plus direct est de partir de l'intégrale première énergie ! En se basant sur l'expression de l'énergie mécanique en θ_0 où la vitesse est nulle, il vient

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

On se place sur un quart de période où t varie de 0 à $T/4$ pendant que θ varie de 0 à θ_0 . Alors,

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2}\omega_0 \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}$$

On sépare les variables et on intègre sur le quart de période :

$$\sqrt{2}\omega_0 \int_0^{T/4} dt = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

Il n'est pas difficile de conclure...

Remarque : Si l'on veut l'isochronisme des oscillations à 5 % près (c'est-à-dire la quasi-indépendance de la période avec l'amplitude θ_0), l'étude numérique de l'intégrale conduit à la condition $\theta_0 < 0,9 \text{ rad} \simeq 50^\circ$ environ, ce qui est somme toute peu exigeant !

4.a. Appliquons (enfin) le théorème de la résultante dynamique au solide dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

$$\vec{a} (G \in \mathcal{S}/\mathcal{R}) = m \vec{g} + \vec{R}$$

Par conséquent, il vient

$$\begin{pmatrix} -ma\dot{\theta}^2 \\ ma\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta + R_r \\ -mg \sin \theta + R_\theta \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)}$$

Ceci permet d'isoler les expressions de R_r et R_θ mais il y intervient encore $\dot{\theta}^2$ et $\ddot{\theta}$... Or, on a déjà montré que

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta$$

De plus, le théorème de l'énergie mécanique en partant de l'état $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ donne accès à

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0) + \dot{\theta}_0^2$$

$$d'où \quad R_r = m [-2a\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0) - a\dot{\theta}_0^2 - g \cos \theta]$$

et

$$R_\theta = m [-a\omega_0^2 + g] \sin \theta$$

4.b. La disposition de $\vec{R}$ par rapport à (OG) est donnée par la composante R_θ qui n'est pas nulle en général ! On peut préciser les choses :

$$-a\omega_0^2 + g = -\frac{mga^2}{I_A} + g \geq 0$$

grâce à l'inégalité $I_A \geq ma^2$ (conséquence du théorème d'Huygens hors-programme...). Par conséquent, la composante R_θ est du signe de $\sin \theta$.

Il y a alignement de $\vec{R}$ avec (OG) lorsque $R_\theta = 0$, soit :

- quand $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (mais ce ne sont que des valeurs particulières d'angle).
- quand on a le cas d'égalité sur l'inégalité précédente, ce qui n'est possible que pour $I_A = ma^2$: c'est le cas du pendule simple de longueur a avec une masse m .

Moralité : il ne faut pas vendre la peau de l'ours avant de l'avoir tué ! On ne sait comment est disposée la réaction d'axe qu'une fois qu'on l'a démontré (ne pas affirmer des bêtises).

Corr.8 Tige glissant sur un plan horizontal *

Quelques capacités...

Exploiter les intégrales premières du mouvement (quantité de mouvement horizontale, énergie mécanique). Utiliser un théorème fourni. Déterminer un temps de chute sans chercher à résoudre l'équation différentielle du mouvement. Traduire une condition de non décollement. Expliquer une démarche sans la réaliser.

1. Je vous laisse faire le dessin (obligatoire !) avec les actions sur la tige qui sont le poids et la réaction du sol qui sont toutes deux verticales (pas de frottement). On remarque que **G a forcément un mouvement vertical** : en effet, le TRD sur la barre projeté sur l'horizontale montre que son accélération est nulle et comme sa vitesse est nulle... Il faut bien réaliser que le point A de contact bouge (et ne surtout pas utiliser de TMC en ce point dans le référentiel du sol) !

Ainsi, il ne reste qu'un problème à un seul degré de liberté cinématique α et il est rapide d'obtenir son équation du premier ordre en utilisant le TEM pour la tige. Le système est conservatif (même si la tige glisse sur le sol, il n'y a pas de frottements alors le travail des actions de contact est nul). Le TEM s'écrit

$$\mathcal{E}_c(t) + mg \frac{l}{2} \sin \alpha = \mathcal{E}_c(0) + mg \frac{l}{2} \sin \alpha_0 \quad (*)$$

Il reste à obtenir l'expression de l'énergie cinétique. Grâce au fantastique théorème de Koenig pour l'énergie cinétique,

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2} m v(G)^2$$

Or,

$$y_G = \frac{l}{2} \sin \alpha$$

donc

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{l}{2} \sin \alpha \right) \right)^2$$

soit

$$\mathcal{E}_c = \frac{ml^2}{24} \dot{\alpha}^2 + \frac{ml^2}{8} \cos^2 \alpha \dot{\alpha}^2$$

d'où

$$\mathcal{E}_c = \frac{ml^2}{24} (1 + 3 \cos^2 \alpha) \dot{\alpha}^2$$

Enfin, l'énergie cinétique initiale étant nulle, on reporte ça dans (*) et on trouve

$$(1 + 3 \cos^2 \alpha) \dot{\alpha}^2 = \frac{12g}{l} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$$

2. Pendant la chute, l'angle α **décroît** donc l'équation différentielle précédente permet d'isoler

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = -\sqrt{\frac{12g}{l}} \sqrt{\frac{\sin \alpha_0 - \sin \alpha}{1 + 3 \cos^2 \alpha}}$$

d'où
$$dt = -\sqrt{\frac{l}{12g}} \sqrt{\frac{1 + 3 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha_0 - \sin \alpha}} d\alpha$$

On obtient le temps de chute Δt de la tige en intégrant cette expression entre le début du mouvement et l'arrivée au sol (**et on note bien ici dans la démarche que l'on n'a pas besoin de connaître la loi $\alpha(t)$ pour s'en sortir!**) :

$$\Delta t = -\sqrt{\frac{l}{12g}} \int_{\alpha_0}^0 \sqrt{\frac{1 + 3 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha_0 - \sin \alpha}} d\alpha$$

On pourrait représenter Δt en fonction de α_0 numériquement ; on s'attend à obtenir Δt infini pour $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ (position d'équilibre (instable) de la tige).

3. La réaction $\vec{R} = R \vec{e}_y$ du sol sur la tige doit vérifier la condition

$$R > 0$$

à tout instant pour valider l'hypothèse de non décollement de la tige du sol. Il faut donc expliciter R en utilisant le TRD appliqué à la tige dans le référentiel galiléen du sol en projection sur la verticale $\vec{e}_y$. Cela conduit à une équation où interviennent l'angle α , ainsi que ses dérivées première et seconde. On peut éliminer ces deux dernières en exploitant le résultat de la première question et sa version dérivée dans le temps. Ainsi, on déduit R en fonction de α et des paramètres du système et on peut conclure en analysant son signe pour α quelconque compris entre α_0 et 0.

Il est important de noter qu'il n'est pas forcément utile de connaître la loi $\alpha(t)$ pour s'en sortir!

Remarque : Voici des équations clés que l'on trouve lorsqu'on a le courage de réaliser la démarche précédente... Le TRD projeté donne

$$m \frac{l}{2} (\cos \alpha \ddot{\alpha} - \sin \alpha \dot{\alpha}^2) = R - mg$$

et on parvient, au terme de l'élimination des fonctions dérivées de α , à

$$R = \frac{3mg}{(1 + 3 \cos^2 \alpha)^2} \left[\frac{4}{3} - \sin^2 \alpha_0 + (\sin \alpha - \sin \alpha_0)^2 \right]$$

On constate que, puisque $4/3 - \sin^2 \alpha_0 > 0$, R reste strictement positive pour tout α entre α_0 et 0, ce qui assure le maintien du contact de la tige avec le sol.