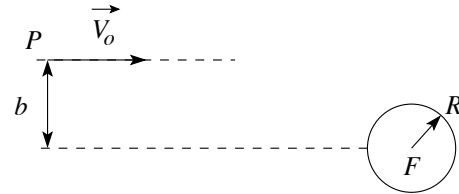


T.D. 17 : Mécanique du point et du solide (1)

Exercice 1 Trajectoire de météorites *

Un point matériel P de masse m est soumis à l'interaction d'une boule de centre F et de rayon R. Cette interaction est caractérisée par une énergie potentielle $E_p = -K/r$ avec $K > 0$ et $r = FP$. On suppose que la boule reste fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen de centre F, référentiel dans lequel s'effectuera l'étude qui suit.

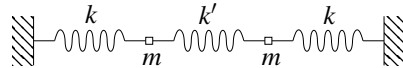


À l'instant initial, la particule est à l'infini; elle est animée d'une vitesse non nulle $\vec{V}_0$ et présente un paramètre d'impact b (voir figure). Obtenir la condition pour que le point matériel P évite la boule. Commenter.

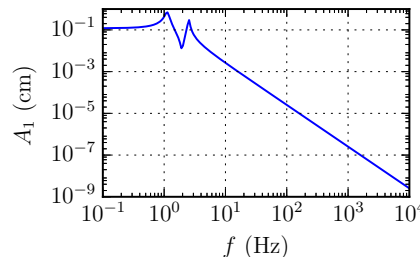
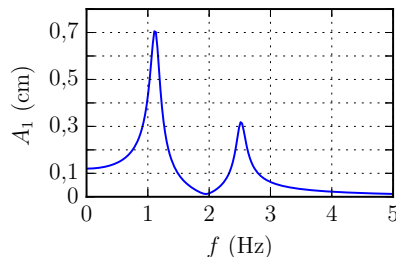
Correcteurs par défaut : Lauriol-Frisque, Sylvestre, Morinière, Saint Cast, Sorre...

Exercice 2 Identification d'un système **

On considère le dispositif mécanique horizontal représenté ci-contre. Il est constitué de deux masses identiques attachées entre elles et avec deux parois par des ressorts. Le ressort central est différent des deux autres (raideur k' au lieu de k). Il existe des frottements de type fluide de nature à amortir les oscillations des masses relativement faibles (force $-\lambda \vec{v}$ de même coefficient λ sur chaque masse).



Un dispositif, non représenté, permet d'exercer une force sinusoïdale (fréquence f , amplitude F_1) supplémentaire sur la masse de gauche. On relève dans le même temps l'amplitude $A_1(f)$ des oscillations forcées de cette masse (voir figures suivantes pour les représentations linéaire et logarithmique).

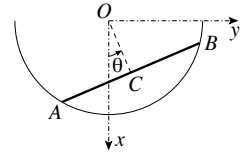


- Commenter les courbes $A_1(f)$ présentées. Donner un exemple d'application pratique exploitant la zone entre les deux pics.
- Estimer les valeurs de k/m , k'/m , F_1/m et λ/m .
- Expliquer pourquoi la masse m n'est pas estimable avec ces tracés.

Correcteurs par défaut : Blumenau, Gomichon, Caillaud, Le Gouic...

Exercice 3 Oscillations d'une tige sur un demi-cercle

Une tige homogène AB, de centre C et de longueur $2l$, glisse sans frottement à l'intérieur d'un demi-cercle de centre O et de rayon $R = 2l/\sqrt{3}$. Ce demi-cercle est situé dans le plan vertical (Oxy) d'un référentiel galiléen. On précise les moments d'inertie de la tige $J_{Cz} = ml^2/3$ et $J_{Oz} = mR^2/2$ (dans les conditions géométriques du dispositif).



- Déterminer l'équation différentielle que vérifie l'angle θ défini par $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OC})$:
 - en appliquant les théorèmes de la résultante cinétique et/ou du moment cinétique ;
 - en appliquant un théorème énergétique.
- Calculer la période des petites oscillations de la tige autour de sa position d'équilibre.

Correcteurs par défaut : Gailledrat, Clouet, Zihlmann, Raynal...

Exercice 4 La fusée de Tintin ? *

On s'intéresse au mouvement suivant une verticale ascendante d'une fusée juste après son décollage dans le référentiel terrestre pris galiléen. On néglige grossièrement les frottements de l'air sur celle-ci et le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme dans la zone considérée.



L'éjection des gaz de la fusée est caractérisée par un débit massique D_m constant (strictement positif) et une vitesse relative d'éjection constante verticale $\vec{u}$ par rapport à la fusée.

- Obtenir l'équation différentielle du mouvement de la fusée de vitesse $\vec{v}(t)$ et de masse $m(t)$ (avec son contenu). Commentaires ?
- Obtenir $\vec{v}(t)$ en supposant que la vitesse initiale est nulle. Commentaires ?

Correcteurs par défaut : Etienne, Frossard, Vairé, Pruvost...

Exercice 5 Les patineurs

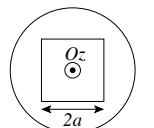
Deux patineurs se déplacent sur deux droites parallèles. Arrivés au même niveau, ils s'accrochent rigidement l'un à l'autre.

En assimilant chaque patineur à un point matériel et en supposant les frottements nuls, étudier le mouvement ultérieur du système des deux patineurs.

Correcteurs par défaut : Jarry, Mérillon, Obeidine, Coudert...

Exercice 6 Tchou tchou le p'tit train ***

On considère un plateau horizontal tournant sans frottement autour d'un axe Oz. Sur ce plateau se trouvent des rails formant un carré de centre O et de côté $2a$. Le moment d'inertie de cet ensemble par rapport à Oz est noté J. Sur ces rails roule un petit train de masse m . À l'instant initial, tout est immobile.

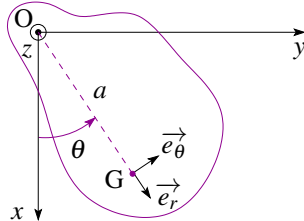


Déterminer l'angle dont a tourné le plateau lorsque le train démarre et parcourt un tour du carré.

Correcteurs par défaut : Cordon, Trottier, Vinet, Valibouse...

Exercice 7 Étude d'un pendule pesant **

On s'intéresse à un pendule pesant en liaison pivot parfait avec un axe horizontal fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'étude. Le repérage est précisé sur la figure ci-contre. On pose I_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à son axe $(\Delta) = (Oz)$ de rotation. Le solide a une masse m et son centre d'inertie G est à la distance a de (Δ) . La théorie des moments d'inertie impose $I_\Delta \geq ma^2$.



- Par une analyse de l'énergie potentielle en fonction de θ , commenter les mouvements possibles.
 - Représenter le portrait de phase du pendule pesant. Pourquoi ce portrait serait-il forcément différent pour un pendule simple ?
 - Représenter, sur le portrait de phase précédent, un exemple de parcours si la liaison pivot n'était pas parfaite.
- On poursuit l'étude avec une liaison pivot parfaite. Obtenir par deux méthodes différentes l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par θ .
- On note T_0 la période des petites oscillations du pendule pesant autour de sa position d'équilibre stable. L'exprimer en fonction des paramètres du pendule.
 - Montrer que, dans le cas d'oscillations du pendule d'amplitude θ_0 quelconque, la période suit la loi d'intégrale elliptique (non calculable analytiquement)

$$T(\theta_0) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} T_0 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

- On note $\vec{R}$ la résultante de la réaction d'axe sur le solide en liaison pivot.
 - Donner les expressions des composantes de $\vec{R}$ dans la base des coordonnées polaires.
 - Quelles informations en déduit-on sur la disposition de $\vec{R}$ par rapport à (OG) ? Dans quel cas y a-t-il alignement de cette réaction avec (OG) ?

Correcteurs par défaut : Carreau, Ville, Deportes, Ilinca...

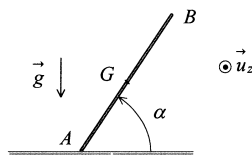
Exercice 8 Tige glissant sur un plan horizontal *

En mécanique, il existe des théorèmes particuliers appelés « théorèmes de Koenig » (hors programme et admis pour cet exercice) qui permettent les calculs respectifs du moment cinétique et de l'énergie cinétique d'un système dans un référentiel d'étude par sommation de deux contributions distinctes : d'une part, celle dans le référentiel barycentrique du système et, d'autre part, celle dans le référentiel d'étude associée uniquement à un point matériel fictif situé au centre d'inertie du système et de masse égale à la masse totale du système...

Une tige homogène AB, de longueur l et de masse m , repose en A sur un sol horizontal. Sa position dans le plan vertical est repérée par l'angle α qu'elle fait avec l'horizontale. On néglige les frottements entre la tige et le sol qui restent toujours en contact.

Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Gz est $J = ml^2/12$. À la date $t = 0$, la tige est abandonnée sans vitesse dans la position $\alpha = \alpha_0$.

- Établir une équation différentielle du premier ordre satisfaite par α .



- Exprimer sous la forme d'une intégrale le temps de chute de la tige.
- On a admis que, lors de son mouvement, la tige restait en contact avec le sol à tout instant. Que faudrait-il faire pour valider cette hypothèse ? Le calcul n'est pas demandé.

Correcteurs par défaut : Dubois, Delage, Godon, Giraudeau...

Quelques indications ou solutions...

Exercice 1

Forcément, il faut que $b > R$ et on trouve la condition supplémentaire $b > R \sqrt{1 + \frac{2K}{RmV_0^2}}$.

Exercice 2

On obtient $k/m = 49,5$ S.I., $k'/m = 101$ S.I., $F_1/m = 0,10$ S.I. et $\lambda/m = 1,0$ S.I. (je vous laisse trouver les unités que vous devez expliciter bien sûr!).

Exercice 3

Période $T = 2\pi \sqrt{R/g}$.

Exercice 4

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t + \ln\left(\frac{m(0) - D_m t}{m(0)}\right) \vec{u}.$$

Exercice 5

Le système des deux patineurs est pseudo-isolé donc on peut écrire la conservation de la quantité de mouvement horizontale. Ensuite, on peut raisonner sur le moment cinétique dans le référentiel barycentrique (c'est-à-dire le référentiel en translation dans le référentiel du laboratoire et où le centre de gravité G est immobile). Le mouvement ultérieur obtenu est caractérisé par la vitesse du centre de gravité G et le vecteur rotation des patineurs autour de G dans le référentiel barycentrique.

Exercice 6

En posant $\eta = \frac{J}{ma^2}$, l'angle de rotation est de $-\frac{8}{\sqrt{1+\eta}} \text{Arctan} \frac{1}{\sqrt{1+\eta}}$.

Exercice 7

Pas d'indications sur cet énoncé guidé (revoir le cours de MPSI!).

Exercice 8

On trouve $(1 + 3 \cos^2 \alpha) \dot{\alpha}^2 = 12 \frac{g}{l} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$. Le temps de chute est $\Delta t = \sqrt{\frac{l}{12g}} \int_0^{\alpha_0} \sqrt{\frac{1+3 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha_0 - \sin \alpha}} d\alpha$.