

T.D. 18 : Mécanique du point et du solide (2)

Exercice 1 Demi-ellipse de transfert

Un satellite de masse m tourne autour de la Terre sur une orbite circulaire (orbite basse de rayon r_1 , vitesse du satellite V_1). On veut le transférer sur une autre orbite circulaire (orbite haute de rayon r_2 , vitesse V_2). Pour cela, on lui fait décrire une demi-ellipse (orbite de transfert) dont un des foyers est le centre de la Terre et qui se raccorde tangentiellement aux deux orbites circulaires précédentes. On allume donc les propulseurs du satellite pendant une durée brève au début et à la fin de cette demi-ellipse, ce qui correspond à communiquer à chaque fois au satellite un supplément de vitesse (sans changement de direction) de façon quasi-instantanée. On donne $r_1 = 6,70.10^3$ km, $r_2 = 42,0.10^3$ km, le rayon terrestre $R = 6,40.10^3$ km et la pesanteur au niveau du sol $g = 9,80$ m.s⁻².

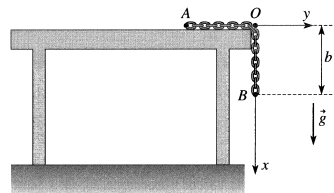
Calculer les suppléments de vitesse.

Correcteurs par défaut : Jarry, Sylvestre, Zihlmann, Frossard, Raynal...

Exercice 2 Mouvement d'une chaîne sur une table **

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Une chaîne AB homogène, sans raideur, de longueur d et de masse m , est posée sur le bord d'une table horizontale, sans vitesse initiale, son extrémité B se trouvant à une distance b du bord de la table.

On néglige tout frottement interne à la chaîne d'une part, et entre la table et la chaîne d'autre part.



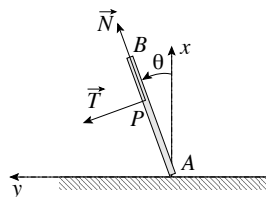
On étudie la chute de la chaîne avant que son extrémité B n'atteigne le sol.

- Déterminer l'équation différentielle que vérifie l'abscisse x de l'extrémité B de la chaîne sur l'axe vertical (Ox) à un instant t (on supposera $x < d$).
- En déduire la loi $x(t)$.
- Déterminer à un instant t la force $\vec{R}$ qu'exerce la table sur la chaîne.

Correcteurs par défaut : Deportes, Vairé, Caillaud, Blumenau, Trottier...

Exercice 3 Rupture d'une tige qui tombe sur le sol **

Une tige AB, homogène, de masse m , de longueur b , posée sur le sol en A, tombe à partir de la position verticale. Nous supposons que, pendant la chute, le point A reste fixe et la tige reste dans le plan vertical (Axy) fixe. Le sol exerce sur la tige en A une action mécanique réductible à un glisseur en A. Pendant la chute, la portion de tige AP exerce sur la portion PB des actions mécaniques qui se traduisent par une résultante et un moment en P notés respectivement $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ et $\vec{\mathcal{M}}_P = \mathcal{M}_P \vec{e}_z$ (voir figure).



Le moment d'inertie d'une tige homogène de masse m et de longueur b par rapport à un axe Δ_G passant par son centre G et perpendiculaire à la tige est $J = mb^2/12$ et, par théorème d'Huygens, on peut déduire celui par rapport à tout axe Δ parallèle à Δ_G et distant de δ en ajoutant la contribution $m\delta^2$.

On admet que le théorème du moment cinétique s'écrit dans le référentiel barycentrique d'un système comme si ce dernier était galiléen (même si ce n'est pas le cas), pourvu qu'on l'applique par rapport à son centre d'inertie.

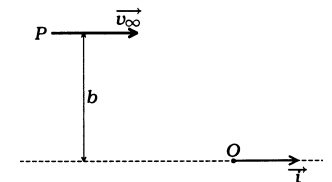
- Exprimer $\vec{T}$ et $\vec{\mathcal{M}}_P$ en fonction de l'angle θ et de la longueur $x = AP$.
- On pose $T_0 = \|\vec{T}\|$ et $\mathcal{M}_{P0} = \|\vec{\mathcal{M}}_P\|$; tracer l'allure de T_0 et de $\mathcal{M}_{P0}$ en fonction de x , pour une valeur de θ donnée.
- En général, une cheminée d'usine que l'on abat se brise avant de toucher le sol. En admettant la validité du modèle précédent, préciser en quel point on peut prévoir cette cassure.

Correcteurs par défaut : Lauriol-Frisque, Gailledrat, Giraudeau, Etienne, Ilinca...

Exercice 4 Déviation par une boule **

Une particule P, de masse m , provient de l'infini avec une vitesse $\vec{v}_\infty = v_\infty \vec{i}$. Elle est soumise à une force $\vec{F}$ associée à l'énergie potentielle $mV(r)$ (avec $OM = r$) telle que

$$V(r > r_0) = 0 \quad \text{et} \quad V(r \leq r_0) = -V_0$$



On note b le paramètre d'impact (voir figure).

Déterminer, notamment en fonction de b , la déviation subie par la particule.

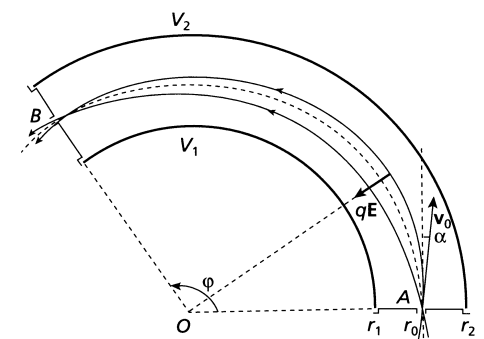
Correcteurs par défaut : Carreau, Pruvost, Dubois, Ville, Delage...

Exercice 5 Mesure de e/m par la méthode de Schaw (1938) **

Un faisceau d'électrons de charge négative $q = -e$ entre, par une fente A située à la distance r_0 de l'axe, à l'intérieur d'un condensateur cylindrique, formé de deux électrodes d'axe (Oz) et de rayons r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$), portées respectivement aux potentiels V_1 et V_2 .

On prend $V = V_2 - V_1 > 0$ et le champ électrique est

$$\vec{E} = \frac{K}{r} \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad K = -\frac{V}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$



L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_z$ uniforme statique dirigé suivant (Oz).

- Montrer que pour une valeur de B et la vitesse initiale v_0 en A donnés, une trajectoire circulaire de rayon r_0 et d'axe (Oz) est possible pour une valeur de K à déterminer en fonction de m , v_0 , q , r_0 et B .
- Montrer qu'à valeur B fixée, il existe une valeur de v_0 pour laquelle K est extrémale, de valeur K' . On réalise en pratique cette condition.

- Les électrons passant en A ont des vitesses de module v_0 mais de directions non rigoureusement orthoradiales (angle α de la figure pas forcément nul mais tout de même petit). Étudier leur trajectoire au voisinage de $r = r_0$. En déduire que le faisceau d'électrons se refocalise en un point de la trajectoire circulaire obtenue pour $\alpha = 0$. Que vaut l'angle ϕ repérant ce point ?
- On place au point de refocalisation une fente de sortie suivie d'un détecteur. On donne $r_1 = 2,7901$ cm, $r_2 = 3,4071$ cm, $r_0 = 3,0971$ cm, $B = 28,428 \cdot 10^{-4}$ T. K est alors extrémal pour $V = 67,999$ V. En déduire la valeur du rapport e/m .

Correcteurs par défaut : Le Gouic, Cordon, Saint Cast, Morinière, Gomichon...

Exercice 6 Mouvement d'un point dans un cône *

Soit un cône d'axe vertical Oz , de demi-angle au sommet α . Un point matériel M de masse m repose sans frottement sur la surface interne du cône. La position du point M est repérée par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) . Les conditions initiales sont quelconques mais connues. Si besoin est, on appellera $\mathcal{E}_0$ l'énergie initiale, v_0 le module de la vitesse initiale et z_0 la valeur initiale de la cote du point.

- Écrire une intégrale première du mouvement en considérant le moment cinétique.
- Déterminer l'équation du mouvement sous forme d'intégrale première du mouvement en utilisant l'énergie mécanique. On mettra cette équation sous la forme :

$$(1 + \tan^2 \alpha) \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + f(z) = \frac{2\mathcal{E}_0}{m}$$

- Montrer que le mouvement du point a lieu entre deux plans de cote $z = z_m$ et $z = z_M \geq z_m$ suivant les valeurs de l'énergie initiale.
- Déterminer la valeur de $\mathcal{E}_0$ pour laquelle le mouvement est circulaire. Quel est le rayon du cercle en fonction de v_0 , g et α ? Retrouver ce résultat avec la relation fondamentale de la dynamique.

Correcteurs par défaut : Sorre, Obeidine, Godon, Coudert...

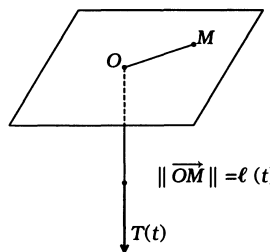
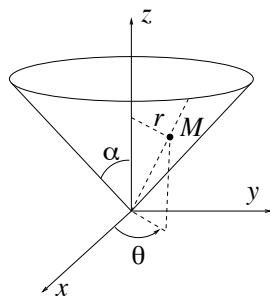
Exercice 7 Traction sur un fil avec masse

Sur un plan horizontal, percé d'un trou O, un point matériel M (de masse m) se déplace sans frottements attaché à un fil passant par un trou (voir figure).

On exerce sur l'autre extrémité du fil une traction $T(t)$ telle que $\ell(t) = a - bt$.

- Décrire le mouvement pour une vitesse angulaire initiale ω_0 de $\vec{OM}$.
- Calculer, de deux façons, le travail fourni par l'opérateur exerçant la force $T(t)$, entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant où $\|\vec{OM}\| = \ell(t)$.

Correcteurs par défaut : Mérillon, Clouet, Vinet, Valibouse...



Quelques indications ou solutions...

Exercice 1

Vous penserez, comme d'habitude (eh oui...), à utiliser les constantes du mouvement du problème (ici, l'énergie mécanique et le moment cinétique). On obtient des suppléments de vitesse $\Delta v_1 = 2,42$ km.s⁻¹ et $\Delta v_2 = 1,47$ km.s⁻¹.

Exercice 2

$\ddot{x} = \frac{g}{d}x$; $x(t) = b \operatorname{ch} \sqrt{\frac{g}{d}}t$. Ne pas s'étonner si l'on trouve une réaction avec une composante horizontale non nulle ! D'ailleurs, pourquoi ne faut-il pas être étonné ?

Exercice 3

Bien faire attention aux actions extérieures ou intérieures... On obtient $T = \frac{(3x-b)(b-x)}{4b^2} mg \sin \theta$ et

$$\mathcal{M}_P = \frac{x(b-x)^2}{4b^2} mg \sin \theta.$$

Exercice 4

Le poids n'est pas à prendre en compte ($\vec{g}$ n'est pas évoqué). Constaté que le mouvement s'effectue dans un plan contenant le point O. En dehors de la frontière $r = r_0$, la force est nulle et la trajectoire est rectiligne ! Penser à utiliser les lois de conservation (intégrales premières du mouvement).

$$\text{On trouve la déviation } \theta_D = 2 \left[\operatorname{Arcsin} \left(\frac{b}{r_0} \right) - \operatorname{Arcsin} \left(\frac{b}{r_0 \sqrt{1 + \frac{2V_0^2}{v_\infty^2}}} \right) \right].$$

Exercice 5

$$\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 6

Intégrale première $r^2 \dot{\theta} = \frac{L_{Oz}}{m}$; $f(z) = \left(\frac{L_{Oz}}{m \tan \alpha} \right)^2 \frac{1}{z^2} + 2gz$ (méthode de l'énergie potentielle efficace);

Cercle de rayon $r_0 = \frac{v_0^2}{g} \tan \alpha$.

Exercice 7

On trouve un mouvement du point matériel en spirale de la forme $\ell = \frac{a}{1 + \frac{b\theta}{a\omega_0}}$ (polaires). Le travail

$$\text{demandé est } W = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \left(\frac{a^2}{\ell^2} - 1 \right).$$