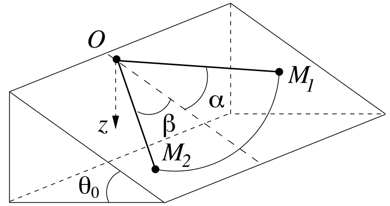
T.D. 19 : Frottements solides

Exercice 1 Pendule avec frottements

Un pendule simple (masse m, longueur ℓ) oscille en glissant avec frottement sur un plan incliné d'angle θ_0 constant avec l'horizontale.



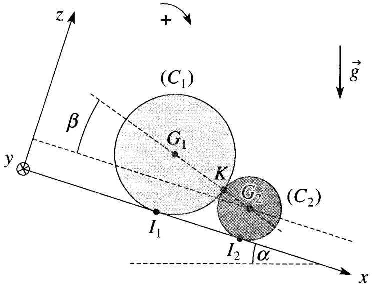
Lâchée en un point M_1 tel que OM_1 fasse un angle absolu α avec la ligne de plus grande pente, la masse remonte après avoir glissé sur le plan, jusqu'en un point M_2. En ce point, le fil fait un angle absolu β avec la ligne de plus grande pente.

Exprimer le coefficient de frottement f entre la masse et le plan incliné en fonction de θ_0, α et β.

Correcteurs par défaut : *Coudert, Sorre, Jarry, Clouet, Delage…*

Exercice 2 Équilibre de deux cylindres sur un plan incliné *

On pose deux cylindres (C_1) et (C_2), homogènes, de même masse m, de rayons respectifs R_1 et $R_2 < R_1$, de centres respectifs G_1 et G_2, sans vitesses initiales sur un plan (P) incliné d'un angle $\alpha \in]0;\pi/6[$ sur l'horizontale. (C_1) est placé derrière (C_2), en contact avec (C_2) au point K. On désigne par β l'angle entre la droite (Ox) et celle qui joint les centres G_1 et G_2 et on suppose $0 < \beta < \alpha$.



Les coefficients de frottement de glissement sont identiques pour chaque contact et égaux à $f < 1$.

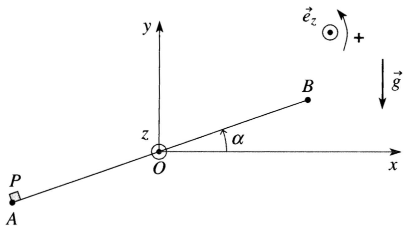
On se propose de rechercher les conditions d'équilibre du système.

1. Calculer les différents modules T_i et N_i des composantes tangentielles et normales des différentes forces de contact en I_1, I_2 et K.
2. En déduire une condition entre les paramètres β et f pour que le système reste en équilibre.
3. Que pensez-vous de cette condition ? Que devient celle-ci lorsque R_1 tend vers R_2 ?

Correcteurs par défaut : *Pruvost, Blumenau, Saint Cast, Cordon…*

Exercice 3 Point matériel sur une barre en rotation

Le repère $(Oxyz)$ est associé à un référentiel galiléen. Une barre homogène AOB, de masse M et de longueur $2a$, est mobile sans frottements autour de l'axe (Oz) horizontal. Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe (Oz) vaut $J = \frac{1}{3}Ma^2$.



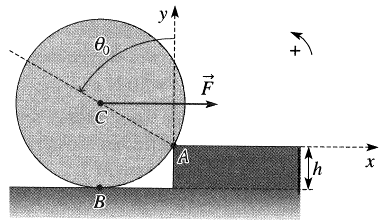
On pose sur la barre, en son extrémité A, un point matériel P de masse m. Le contact entre P et la barre se fait avec un coefficient de frottement de glissement f. On libère l'ensemble {barre + point matériel} sans vitesse initiale dans la position horizontale $\alpha = 0$.

À quelle(s) condition(s) P reste-t-il sur la barre ?

Correcteurs par défaut : *Mérillon, Ilinca, Sylvestre, Zihlmann…*

Exercice 4 Un cylindre contre un trottoir

Un cylindre homogène, de centre C, de masse m et de rayon a, repose sur la chaussée horizontale en étant bloqué contre le trottoir de sommet A et de hauteur h. Le moment d'inertie par rapport à son axe est $J = ma^2/2$ et celui par rapport à l'une de ses génératrices est $J' = 3J$.

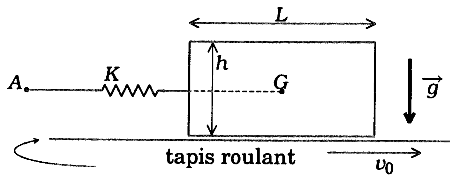


1. Calculer l'angle $\theta_0 = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{Ay})$, (Ay) désignant l'axe vertical ascendant, en fonction de a et h.
2. On cherche à faire monter le cylindre sur le trottoir en exerçant en C une force horizontale et constante $\vec{F}$. On suppose que le coefficient de frottement de glissement f en A est suffisamment important pour éviter tout glissement en A pendant la phase de montée.
   a. Déterminer la valeur minimale F_0 de la norme F de la force $\vec{F}$ pour que le cylindre puisse décoller de la chaussée en B. On exprimera F_0 en fonction de m, g et θ_0.
   b. Montrer que, en maintenant F à une valeur constante supérieure à F_0, le cylindre continue de monter sur le trottoir.
   c. On suppose $F = 2F_0$. Calculer la valeur minimale f_0 de f pour que le cylindre ne glisse pas en A au démarrage. On exprimera f_0 en fonction de θ_0.
   d. Calculer dans ces conditions (pour $F = 2F_0$), la vitesse $\vec{v}(C)$ du centre C du cylindre lorsque C se trouve à la verticale du point A. On exprimera la norme $v(C)$ de la vitesse en fonction de g, a et θ_0.

Correcteurs par défaut : *Raynal, Godon, Lauriol-Frisque, Obeidine…*

Exercice 5 Mobile sur un tapis roulant ***

Un solide rectangulaire, de masse m, peut glisser sur un tapis roulant horizontal qui avance à la vitesse $v_0 > 0$. Le ressort de rappel est accroché à un point fixe A. Les coefficients de frottement sont f (dynamique) et $2f$ (statique).

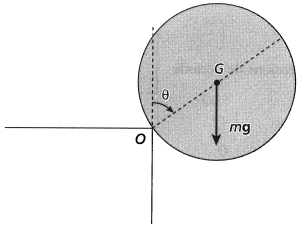


On pose $\omega = \sqrt{K/m}$ et $a = fmg/K$.

1. Quels sont les divers types de mouvements de translation possibles ? On ne cherchera pas à savoir si de tels mouvements peuvent se maintenir indéfiniment.
2. On lâche le solide sans vitesse initiale (par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ dans lequel le tapis roulant avance à la vitesse $\vec{v_0}$). Après un éventuel mouvement transitoire, un régime permanent oscillant est atteint. Décrire ce régime (amplitude, période, graphe) en fonction de la position initiale.

Correcteurs par défaut : *Trottier, Carreau, Ville, Dubois…*

Exercice 6 Modification d'une liaison au cours du mouvement **



Un cylindre plein, homogène, de rayon R, de masse m, est lâché sans vitesse initiale à partir de la position caractérisée par l'angle $\theta = 0$ pour laquelle il était en équilibre (instable) sur l'arête rectiligne horizontale d'une table.

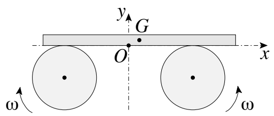
Le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe (passant par G) est $J_G = mR^2/2$ et celui par rapport à une génératrice est $J = 3J_G$.

Le contact entre le cylindre et l'arête de la table est caractérisé par le coefficient de frottement de glissement f. On néglige tout phénomène de frottement de roulement.

Le mouvement de glissement s'amorce-t-il toujours avant la rupture du contact du cylindre avec la table ?

***Correcteurs par défaut** : Deportes, Vairé, Vinet, Gomichon...*

Exercice 7 Un oscillateur curieux **

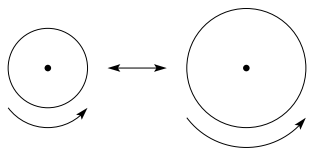


Une planche mince homogène repose horizontalement sur deux cylindres tournant en sens inverses (machine de Timochenko). Les axes de ces deux cylindres sont distants de $2l$ et on désigne par f le coefficient de frottement de la planche sur les cylindres. À l'instant initial, la planche est abandonnée sans vitesse, son centre de masse G n'étant pas sur l'axe (Oy).

1. Déterminer les composantes verticales des réactions des deux cylindres en fonction de l'abscisse x de G.
2. On suppose que les cylindres tournent assez vite pour que la planche glisse sans cesse sur les deux rouleaux. Montrer que cette planche effectue alors des oscillations dont on donnera la période.

***Correcteurs par défaut** : Caillaud, Etienne, Giraudeau, Frossard...*

Exercice 8 Freinage entre deux disques *



Deux disques homogènes D_1 (centre O_1, masse m_1 et rayon R_1) et D_2 (centre O_2, masse m_2 et rayon R_2) tournent à vitesse angulaire constante positive ω_{10} et ω_{20} autour de leurs axes respectifs (Δ_1) et (Δ_2) passant respectivement par O_1 et O_2 et parallèles. Les liaisons d'axe sont parfaites. On rapproche les axes (Δ_1) et (Δ_2) jusqu'à ce que les disques se touchent. Après un certain temps, pendant lequel les axes (Δ_1) et (Δ_2) sont maintenus fixes, les deux disques roulent sans glisser l'un sur l'autre.

1. Calculer, dans l'état final, les vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 de D_1 et D_2.
2. Calculer la variation d'énergie cinétique du système formé par les deux disques entre les instants initial et final.

Le moment d'inertie d'un disque homogène de masse m et de rayon R par rapport à son axe de symétrie de révolution est $J = \frac{1}{2}mR^2$.

***Correcteurs par défaut** : Le Gouic, Morinière, Gailledrat, Valibouse...*

Quelques indications ou solutions...

Exercice 1

$f = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\alpha+\beta}\tan\theta_0$.

Exercice 2

Condition $\tan\beta \geqslant 1/f$ *(impossible à réaliser pour des cylindres de tailles voisines).*

Exercice 3

$\alpha < \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{fM}{M+9m}\right)$.

Exercice 4

$h = 2a\sin^2(\theta_0/2)$; $F_0 = mg\tan\theta_0$; $f_0 = \frac{\cos\theta_0\sin\theta_0}{3(1+\sin^2\theta_0)}$; $\vec{v}(C) = \sqrt{\frac{4ga}{3}\frac{1+\sin^2\theta_0-\cos\theta_0}{\cos\theta_0}}\,\vec{e_x}$.

Exercice 5

Pas d'indication.

Exercice 6

$T = \frac{mg}{3}\sin\theta$, $N = \frac{mg}{3}[7\cos\theta - 4]$. *Rupture du contact pour* $\theta_1 = 55°$. *Une étude graphique montre que le glissement s'amorce avant la rupture de contact.*

Exercice 7

Période des oscillations $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{fg}}$.

Exercice 8

$\Omega_1 = \dfrac{m_1R_1\omega_{10} - m_2R_2\omega_{20}}{R_1(m_1+m_2)}$ *et* $\Omega_2 = \dfrac{-m_1R_1\omega_{10} + m_2R_2\omega_{20}}{R_2(m_1+m_2)}$.