LP01 - Contact entre deux solides. Frottements.

September 24, 2015

Péméja Justin et Alex Torzinsky

"Ta mère, elle est tellement grosse que son cône de frottement est un demi-espace infini"
Un inconnu, à C.A. Coulomb
"Carabistouilles! Le cône ne dépend pas de la masse!"
C.A. Coulomb, à l'inconnu

Niveau : Spé ou L2

Commentaires du jury

2015 : Cette leçon est souvent présentée à un niveau trop élémentaire. La compréhension des aspects microsco- piques en jeu est appréciée par le jury.
2012 : Les candidats sont invités à réfléchir sur la notion de contact ponctuel et à la réalité microscopique de ce contact. Il peut être intéressant d'illustrer et discuter la différence entre coefficients de frottement statique et dynamique.
Avant : La leçon s'intitulait *"Contact entre deux solides. Frottement de glissement. Applications au glissement et au roulement"*. Les commentaires de jury disent d'insister plus sur le roulement, et les plans de leçon sur lesquels j'ai pu tomber ne sont plus très adaptés au titre actuel. Je déconseille donc d'aller puiser des infos datant de plus de 3 ans.

Bibliographie

- ✍ *Toute la mécanique*, **Bocquet, Faroux, Renault (BHR)** ⟶ Aspect microscopique, oscillateur non linéaire amorti par frottement solide
- ✍ *Mécanique*, **Pérez** ⟶ ODG, cône de frottement, aspects énergétiques
- ✍ *Physique MP*, **Sanz** ⟶ Conctuel ponctuel ou non, lois de Coulomb, éxos...
- ✍ *Milieux granulaires*, **Andreotti** ⟶ Approche microscopique.

Prérequis

- ➢ Mécanique du point et des solides

Petites manips

- Pavé sur plan incliné (pour celle-ci on peut parler "d'expérience")
- La règle sur les doigts (Sommerfield)
- Réchauffement de main, effet rétro acrobatique...

Contents

1 Modélisation du contact solide **2**
1.1 Approche microscopique . . . 2
1.2 Approche macroscopique . . . 3
1.3 Le contact rigoureusement ponctuel . . . 3
1.3.1 Modèle . . . 3
1.3.2 Aspect cinématique . . . 3
1.4 Transition: Nécessité d'apporter des lois phénoménologiques du frottement . . . 4

2 Lois phénoménologiques du frottement **4**
2.1 L'expérience de Léonard de Vinci . . . 4
2.2 Enoncé des lois d'Amontons-Coulomb . . . 5
2.3 Illustration expérimentale . . . 5
2.4 Aspect énergétique . . . 6

3 Applications **6**
3.1 Le stick-slip . . . 6
3.1.1 Expérience de Sommerfeld . . . 6
3.1.2 L'oscillateur de Timochenko . . . 7
3.2 Revient ou revient pas? . . . 7
3.3 Oscillateur amorti par frottement solide . . . 7

Introduction

Jusqu'à présent, nous avons négligé les frottements dans les problèmes de mécanique abordés. Nous avons éventuellement vu des cas de frottement fluide ($F \propto v^\alpha$), mais le cas des solides en contact n'a rien à voir. Un aspect intuitif des frottements est qu'ils induisent une dissipation d'énergie au niveau des surfaces des solides en contact. En ne connaissant rien des mécanismes de ces forces, nous pouvons les évaluer à partir de cette dissipation d'énergie.

Manip' : Ordre de grandeur de la force de frottement
Se frotter les mains, ça chauffe!
Rq: Cette manip' nécessité une dextérité expérimentale évidente, l'effectuer en début de leçon est ambitieux certes, mais spectaculaire.
On se frotte pendant $\Delta t = 10$s à la vitesse $v = 1$m/s. $\Delta T = 1$K. On chauffe une surface $S = 0,02\text{m}^2$ sur une épaisseur $e = 1$mm. La main est constituée d'eau, $\rho = 10^3$ kg/m^3 et $c = 4$ J/K.g.

$$Q = mc\Delta T = \rho Sec\Delta T = P_{frottements}\Delta t = Fv\Delta t \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\rho Sec\Delta T}{v\Delta t} \simeq 10\text{N}$$

Cette force est importante (poids d'une masse d'un kg) .

Les frottements provoquent des pertes, oui, mais pas que! Sans eux on ne pourrait pas marcher. Si l'on considère une voiture, la seule action extérieure lui permettant d'avancer est due aux frottements avec route, c'est la route qui tire la voiture. Il devient crucial de comprendre et de décrire les frottements, c'est le but que se donne ce cours.

Objectifs : origines, modélisation, conséquences.
Dans un premier temps, nous verrons diverses façons de décrire le contact entre deux solides: l'approche microscopique nous permettra de comprendre l'origine des frottements, et nous aboutiront au modèle du contact ponctuel jouant un rôle centrale dans la résolution de problèmes à notre niveau de mécanique newtonienne. La deuxième partie s'articulera autour des lois expérimentales de Coulomb, à travers des expériences historiques ayant conduit à leur formulation. La troisième partie rassemble des exercices d'application permettant de voir quelques conséquences des forces de frottements, et de mettre en évidence l'importance de faire des hypothèses sur le régime de glissement pour résoudre un problème de mécanique.

1 Modélisation du contact solide

1.1 Approche microscopique

Du point de vue microscopique, une surface est faite d'aspérités (rugosité), si bien que le contact réel entre deux solide se fait via quelques zones très peu étendues, comme représenté sur la figure. La surface réelle de contact est très inférieure à la surface apparente que l'on croît mesurer macroscopiquement: $S_r << S_a$.

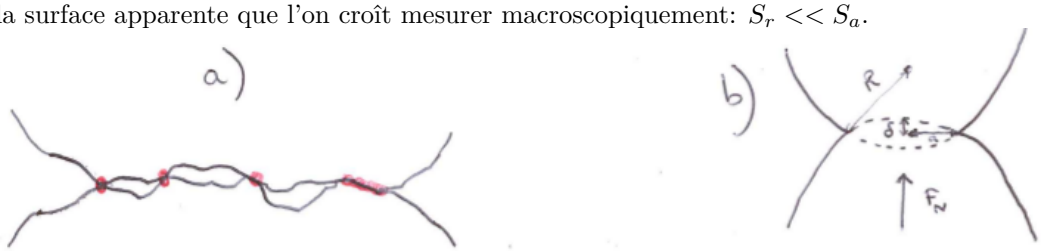


Figure 1: (a)Contact microscopique. (b) Notation pour la loi de Hertz: R est le rayon de courbure de la rugosité.

A l'échelle la plus petite : L'interpénétration entre deux solides est empêchée par des interactions électrostatiques répulsives entre les atomes en surface.

Dans l'hypothèse où ces zones de contact subissent une **déformation élastique linéaire**, Hertz aboutit à une loi faisant le lien entre la déformation locale, la réaction normale s'exerçant sur les surfaces, et les propriétés élastiques du matériau: $N \propto E' R^{1/2} \delta^{3/2}$. L'illustration des poils de la brosse permet de comprendre qualitativement l'origine de la dissipation d'énergie à travers ce modèle. Les poils de la brosse se courbent et stockent de l'énergie, puis la dissipent par mouvement vibratoire amortie quand la brosse glisse.

Le modèle de Tabor va plus loin en disant que, puisque $S_r << S_a$, les contraintes normales au niveau de ces zones de contact sont suffisamment élevées pour **déformer irréversiblement** le matériau. Si la pression dépasse un certain seuil de plasticité du matériau, elle peut être considérée constante dans les équations: $N/S_r \approx$ constante $= H$ où H s'appelle la dureté du matériau. On suppose alors que la force tangentielle à éxercer pour que les rugosités plastifiées glissent les unes par rapport aux autres est proportionnelle à S_r, soit $T_g \propto N/H$. (Le facteur de proportionnalité est la "limite de cisaillement", notée τ. C'est, tout comme H, une grandeur surfacique dépendant du matériau). Cette théorie est très importante puisqu'elle montre que T_g ne dépend pas du tout de la surface apparente du contact!

1.2 Approche macroscopique

Du point de l'expérimentateur, le contact entre deux solides peut se faire selon trois géométries: ponctuelle, linéique et surfacique (bien entendu, il s'agit toujours de surfaces en réalité). On peut citer l'exemple de la rotule très utilisé en mécanique (fig). La modélisation de ce genre de liaison complexe n'est plus au programme et est laissée à la SI.

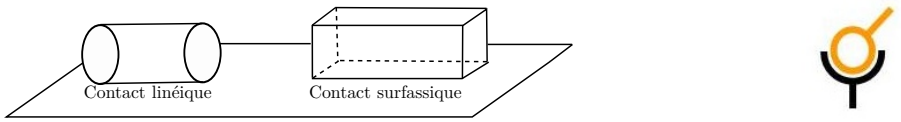


Figure 2: Différentes géométries de contact

Soient deux solides (Σ_1) et (Σ_2) en contact évoluant dans un référentiel $\mathcal{R}$. Dans les cas simples, nous pouvons toujours nous ramener à un contact ponctuel se faisant en un point I en prenant le centre de la zone de contact. L'action de contact alors exercée par (Σ_2) sur (Σ_1) est représentée mathématiquement par :

- Sa résultante : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$,
- Son moment résultant au point I : $\vec{M}_I = \vec{M}_{I,N} + \vec{M}_{I,T}$

Ces vecteurs ont été décomposés en une composante normale et tangente aux surfaces. $\vec{N}$ et $\vec{T}$ sont respectivement les réactions normales et tangentielles. $\vec{M}_{I,N}$ et $\vec{M}_{I,T}$ sont respectivement les moments au point I de résistance au pivotement et de résistance au roulement.
Remarque : Le choix du point I semble assez naturel pour une surface homogène (comprendre "rugosités aléatoirement réparties") et isotrope: le centre de la surface fait l'affaire, et on peut s'en sortir par intégration d'éléments de surface mésoscopiques. Mais pensez tout de même au cas de surfaces anisotropes (stries sur du bois brut, mouvement de failles rocheuses en géologie)...

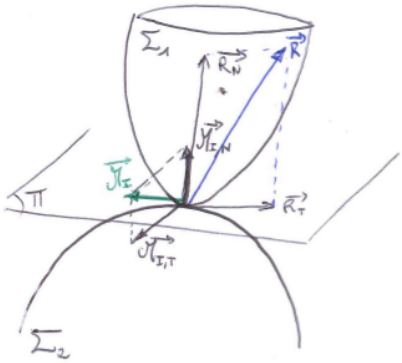


Figure 3: Force et moment éxercée par S2 sur S1 résultant du contact

1.3 Le contact rigoureusement ponctuel

1.3.1 Modèle

Sanz-MP, p265
Nous nous limiterons dans cette leçon à l'approximation d'un contact *rigoureusement ponctuel* entre (Σ1) et (Σ2). La résultante des actions de contact s'applique donc nécessairement au point I, ce qui permet de simplifier grandement le problème puisque $\vec{M}_I(\Sigma 2 - \Sigma 1) = \vec{0}$. Ainsi il ne reste plus que $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$. Il faut bien garder à l'esprit que cette approximation peut dans certains cas conduire à des résultats paradoxaux puisque rien ne s'oppose ni au roulement, ni au pivotement. Par exemple dans ce modèle la mise en mouvement d'une roue par rotation ne nécessite qu'une simple pichenette.

1.3.2 Aspect cinématique

Sanz-MP, p198
Le mouvement des solides est décrit dans un référentiel $\mathcal{R}$. On définit la vitesse de glissement de (Σ1) par rapport à (Σ2).

$$\vec{v_g}(\Sigma 1/\Sigma 2) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(I_1) - \vec{v}_{\mathcal{R}}(I_2) \tag{1}$$

La vitesse de glissement est la vitesse relative des deux solides au point de contact I. On dit qu'il y a glissement lorsque $\vec{v_g}$ est non nulle.

On définit de même aussi le vecteur de rotation relative: $\vec{\Omega}_{\Sigma 1/\Sigma 2} = \vec{\Omega}_{\Sigma 1/\mathcal{R}} - \vec{\Omega}_{\Sigma 2/\mathcal{R}}$.
Remarques: $\vec{v_g}$ appartient à Π (sinon rupture de contact ou interpénétration des solides). En revanche, $\vec{\Omega}_{\Sigma 1/\Sigma 2}$ se décompose selon une composante tangentielle ("rotation de roulement") et une composante normale ("rotation de pivottement"). Enfin, $\vec{v_g}$ et $\vec{\Omega}_{\Sigma 1/\Sigma 2}$ sont indépendants du choix du référentiel $\mathcal{R}$.

Remarque sur la vitesse de glissement

Dans les programmes de prépa actuels, la vitesse de glissement n'est pas vraiment définie, et l'image intuitive qu'ils en font ressemble un peu à la définition que je viens de donner: différence de vitesse entre I_1 et I_2. Cependant la définition exacte est plus rigoureusement la vitesse de I_1 dans le référentiel lié au solide ($\Sigma 2$): $v_g(I) = v_{(\Sigma 2)}(I_1)$. Il n'y a qu'une formule de composition de vitesse entre cette dernière relation et 1.

1.4 Transition: Nécessité d'apporter des lois phénoménologiques du frottement

Problème: L'action de contact se décompose en deux composantes à priori indépendantes que nous ne connaissons pas. En général lorsqu'on étudie le mouvement d'un solide, les inconnues sont : G (mouvement du centre d'inertie), $\vec{\Omega}$ (sa rotation), I, $\vec{T}$, $\vec{N}$. On peut regarder les différentes situations physiques d'une roue pour fixer les idées. Les lois de la mécanique approtent 3 équations (2 bilans de qdm et un bilan de moment). La condition de roulement sans glissement lie les paramètres v_G et $\frac{d\theta}{dt}$ et fournit donc une équation supplémentaire. Il manque une équation pour la situation de glissement.

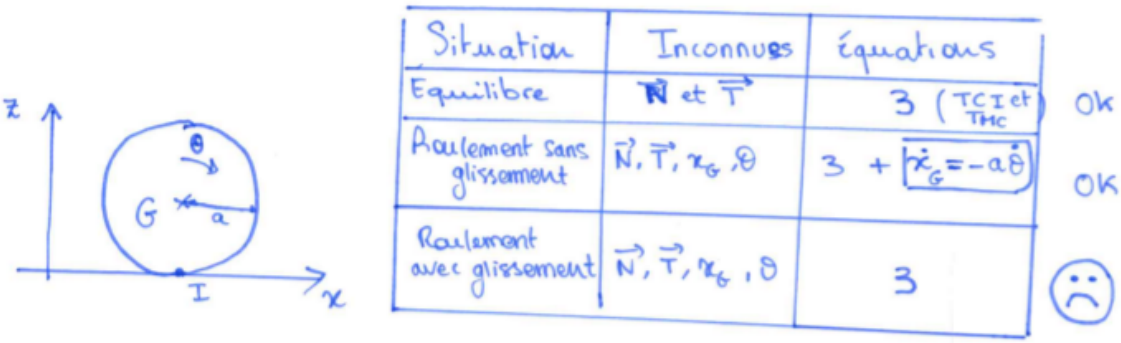


Figure 4: Bilan équation inconnu dans une situation typique de mécanique 2D. On met ici en évidence le fait que si les deux forces $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont indépendantes lors d'un mouvement avec glissement alors le mouvement n'est pas solvable.

Les actions de contact se résument ainsi à une résultante R dont la composante tangentielle est indéterminée, et indéterminable sans une équation supplémentaire qui la relie aux autres forces. Les lois empiriques de Coulomb apportent cette équation manquante.

2 Lois phénoménologiques du frottement

2.1 L'expérience de Léonard de Vinci

Andreotti , p20

Figure 5: Expérience du génial de Vinci.

L'expérience de Léonard de Vinci, schématisée figure 5, consiste à exercer une force de traction connnue sur trois masses faîtes dans le même matériau dans deux configurations différentes. Elle permet quelques observations qui ont conduit à la formulation des lois de la friction entre deux solides par Amontons puis Coulomb 200 ans plus tard.

3 observations :
1. La force $F_{T,s}$ nécessaire pour mettre en mouvement est identique dans les deux configurations : Celle-ci ne dépend pas de la surface de contact.
2. $F_{T,s}$ dépend linéairement de la force normale (ici poids total des blocs).
3. La force de friction $F_{T,d}$ mesurée une fois que le patin glisse est inférieure à $F_{T,s}$.

2.2 Enoncé des lois d'Amontons-Coulomb

Ces lois sont le fruit d'expériences de patins glissants sur un solide. On les considère établies expérimentalement par Amontons en 1699, puis Coulomb en 1785. Elles sont suffisemment robustes pour être utilisés encore aujourd'hui pour décrire de nombreux phénomènes.

- Il n'y a pas glissement si $|\vec{T}| \leq f_s|\vec{N}|$, où f_s est le coefficient de frottement statique.
- Lorsqu'il y a glissement, $|\vec{T}| = f_d|\vec{N}|$, où f_d est le coefficient de frottement dynamique, et $\vec{T}||\vec{v_g}$ avec $\vec{T}.\vec{v_g} \leq 0$.
- f_s et f_d dépendent de la nature des corps en contact et de l'état des surfaces. Expérimentalement $0 \leq f_d \leq f_s$.

2.3 Illustration expérimentale

Nous allons appliquer les lois de Coulomb au problème du pavé sur un plan incliné afin d'illustrer les propriétés macroscopiques du frottements.

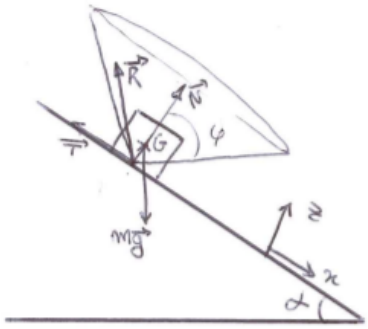


Figure 6: Pavé sur un plan incliné

Phase 1: Le pavé est à l'équilibre

- Théorie:
  La condition d'équilibre s'écrit $T/N = \tan\alpha$, la condition de non-glissement se traduit donc par $\tan\alpha \leq f_S$.
  En posant ϕ tel que $f_s = \tan\phi$, on obtient que le pavé ne glisse pas tant $\alpha \leq \phi$.
  Plus généralement, il n'y a pas glissement tant que la réaction du support $\vec{R}$ reste dans un cône d'angle au sommet ϕ, que l'on nomme le cône de frottement. Mais, que vaut ϕ??

- Expérience:
  Objectif: Trouver ϕ et en déduire f_s pour deux contacts différents. On incline le support du pavé et on mesure l'angle pour lequel il commence à glisser. Puis $f_s = \tan\phi$. On obtient $f_s = 0{,}4$ pour le contact bois/bois testé, et $f_s = 0{,}6$ pour le bois/plastique. On peut comparer à quelques valeurs de la littérature *(Pérez p311, Sanz p971)* dans le tableau ci-dessous. Les valeurs données ne différencient pas les coeffs statiques et dynamiques, il s'agit simplement d'ordre de grandeur, gardons bien en tête que ces coefficients dépendent fortement de l'état des surfaces des matériaux mis en jeu.

Surfaces en contact	$f_s \approx f_d$
acier/acier	0,2
bois/bois	0,3 - 0,5
caoutchouc/bitume sec	0,7
caoutchouc/bitume mouillé	0,1
métal/glace	0,02

- Notion d'arc-bouttement:
  Tant que $\alpha \leq \phi$, le solide ne bouge pas quelque soit sa masse. On peut donc mettre une force verticale aussi grosse que l'on veut ça ne bougera toujours pas.

Application : Le filetage est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Ainsi lorsqu'on regarde l'action exercée par le matériau dans lequel la visse est vissée, on est dans une situation analogue au pavé. Le pas des visses à bois est plus grand que pour les visses à métaux.

Phase 2: Le pavé commence à glisser

- Théorie:
  Si le plan incliné est pile à la limite du cône de frottement, alors la vitesse du pavé s'écrit $v = g\cos\alpha(f_s - f_d)t$. On montre ainsi très simplement que si les deux conditions "glissement" et "$\alpha = \phi$" sont réunies, alors $fs > fd$. D'autre part, supposons qu'il y a glissement, avec un angle α quelconque, la vitesse du pavé s'écrit $v = g\cos\alpha(\tan\alpha - f_d)t$. Cela nous donne un moyen d'accéder à f_d.

- Expérience:
  On baisse la planche et le pavé s'arrête à un angle α tel que $\tan\alpha = f_d$. On vérifie bien que $f_d \leq f_s$.

- Hystérésis du frottement:
  L'expérience réalisée peut être vue selon selon le graphe suivant mettant bien en valeur le phénomène d'hystérésis du frottement.

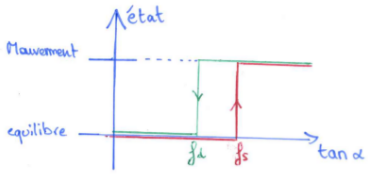


Figure 7: Hystérésis

- Remarques un peu délicates à éventuellement garder pour les questions:
  f_s diminue avec l'âge. f_d ne dépend pas de la taille de la surface en contact mais peut dépendre fortement de la vitesse de glissement v_g. Dans la plupart des cas, f_d diminue avec v_g pour atteindre un palier (peut se comprendre avec le modèle des cils), mais certains polymères présentent le comportement inverse. La lubrification (fine couche d'huile ou autre liquide entre deux solides) altère aussi bien f_d que f_s.

2.4 Aspect énergétique

Perez p326
Montrons que le travail total des actions de contact est négatif. On reprend deux solides ($\Sigma 1$) et ($\Sigma 2$), en contact au point I, avec les points I_1 et I_2 infiniment près de I. La puissance reçue par ($\Sigma 1$) est $P_1 = \vec{R}.\vec{v}(I_1)_{/\mathcal{R}}$. La puissance reçue par ($\Sigma 2$) est, selon le principe d'action/réaction, $P_2 = -\vec{R}.\vec{v}(I_2)_{/\mathcal{R}}$. La puissance totale vaut donc $P_{tot} = \vec{R}.\vec{v_g} = \vec{T}.\vec{v_g}$, qui est négatif d'après la deuxième loi de Coulomb.
Ainsi, la puissance des forces de frottement des nulle s'il n'y a pas de frottement, *ou* s'il n'y a pas de glissement. On peut donc bien avoir une force de frottement T non nulle sans avoir de dissipation d'énergie par frottement.

$$P_{\text{frottements}} = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} v_g = 0 \\ T = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Remarque: Il faut bien faire attention à calculer P_{tot} , la puissance totale du frottement. Supposons que ($\Sigma 2$) a été mis en mouvement à cause des frottements dus au contact avec ($\Sigma 1$), on a $P_2 \geq 0$.

3 Applications

3.1 Le stick-slip

3.1.1 Expérience de Sommerfeld

L'expérience prend une minute. On place une règle en appui sur ses doigts. On essaye d'exercer une force égale à droite et à gauche pour rapprocher les deux doigts. Les doigts collent et glissent à tour de rôle pour enfin se rejoindre au centre de la règle. Cette expérience est plutôt marrante et permet de montrer qualitativement comment une variation de la réaction normale éxercée par un doigt permet d'être en régime de glissement ou non. Sa mise en équation n'est pas très facile, et prendrait trop de temps dans la leçon, n'y songez pas. Mais pouvez si ça vous tente regarder ce très joli sujet de l'X dessus: *X physique 1 PC 2007.*

3.1.2 L'oscillateur de Timochenko

Inspiré de BHR p
N'étant pas convaincus de notre capacité à rapporcher nos doigts avec une force constante sous cette règle, nous pouvons faire cela de façon motorisée, en mettant une planche en appui sur deux rouleux qui tournent à vitesse constante et en sens inverse. L'hypothèse importante est que les rouleaux tournent suffisamment vite pourqu'il y ait toujours glissement au niveau des contacts entre la planche et les rouleaux. Ca permet clairement de simplifier le problème par rapport à l'expérience de Sommerfeld. L'éxo est présenté page 8.

3.2 Revient ou revient pas?

Inspiré de Sanz-MP p279
On considère un solide qui roule en glissant lors de la première phase de son mouvement, de telle sorte que le glissement s'oppose à la progression du solide. Lorsque le glissement cesse, le solide est en roulement pur, et peu soit revenir vers le lanceur (effet rétro: billard, cerceau...), soit continuer sa route (bowling). Je présente l'exercice de façon assez synthétique et sans le contextualiser dans une situation particulière, c'est surtout pour mettre en évidence l'importance de formuler une hypothèse sur la nature du mouvement pour apporter l'équation manquante à la résolution. Ainsi le solide étudié est seulement caractérisé par son moment d'inertie J et sa masse m, on peut adapter l'exercice à n'importe quelle forme pouvant rouler : boule, cylindre, cerceau, Sami. L'éxo est présenté page 9.

3.3 Oscillateur amorti par frottement solide

BHR , p454
Le système correspondant est une masse accrochée à un ressort, oscillant autour d'une position d'équilibre et subissant des frottements avec le support.
Cette oscillateur non linéaire voit son amplitude diminuer linéairement avec le temps, les enveloppes sont des droites. C'est assez original de présenter ce système dans cette leçon mais je le trouve pertinent, d'une part parce que sa résolution fait appel aux lois de Coulomb, puis parce qu'il permet d'illustrer une application du plan de phase. En effet la résolution complète est assez pénible, mais on peut très vite comprendre le mouvement en construisant le début du portrait de phase, ceci est très bien fait dans le BHR. S'il reste du temps en fin de leçon, je présente juste le système et l'équation du mouvement, puis je balance directement le portrait de phase.

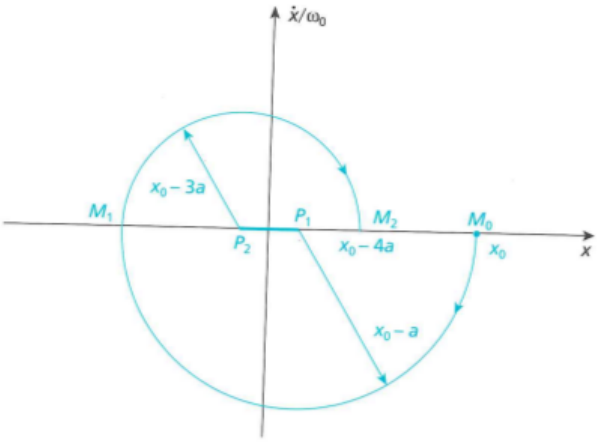


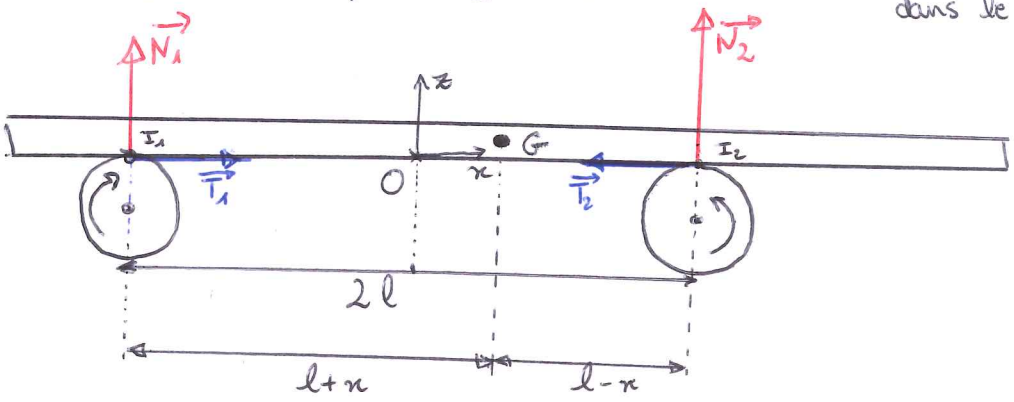
Figure 8: Portrait de phase de l'oscillateur amorti par frottement solide

Oscillateur de Timochenko

(Très inspiré de BHR, ex B.4 p 373)

2 cylindres de rayon a, distants de 2ℓ, en rotations inverses à vitesse angulaire cste $= \omega_0$

1 planche de masse m (épaisseur négligeable) est posée horizontalement et sans vitesse initiale de telle sorte que son centre G soit situé à l'abscisse x_0 du centre de symétrie O du système. Hyp : Il y a toujours glissement en I_1 et I_2, et toujours dans le même sens.



a) Vitesses de glissement initiales

Au point I_2 $\vec{v_{g_2}} = (\dot{x} + a\omega_0)\vec{e_x}$, vers la droite $\Rightarrow \vec{T_2}$ vers la gauche.

($\dot{x}(t=0) = 0$) I_1 $\vec{v_{g_1}} = (\dot{x} - a\omega_0)\vec{e_x}$, vers la gauche $\Rightarrow \vec{T_1}$ vers la droite

b) Équations du mouvement

TCI $\quad mg = N_1 + N_2 \quad /z \quad (1)$

$\quad m\ddot{x} = T_1 - T_2 \quad /x \quad (2)$

TMC $\quad (\ell - x)N_2 = (\ell + x)N_1 \quad (3)$

($\sigma^* = 0$)

Les deux équations manquantes sont fournies par les lois de Coulomb et l'hypothèse de glissement.

$T_2 = fN_2$ (4) $\qquad T_1 = fN_1$ (5)

(1) et (3) nous donnent $N_1 = mg\dfrac{(\ell - x)}{2\ell}$ $\quad N_2 = mg\dfrac{(\ell + x)}{2\ell}$

(2), (4) et (5) nous donnent $\boxed{\ddot{x} + fg\dfrac{x}{\ell} = 0}$ $\rightsquigarrow$ oscillateur $\begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{fg}{\ell}} \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{fg}} \end{cases}$

c) Retour sur les hypothèses

$x(t) = x_0\cos(\omega t)$ $\quad \dot{x} = x_0\omega\sin(\omega t)$ $\quad$ Valeurs extrêmes de la vitesse : $\pm x_0\omega$

Pour que le glissement se fasse toujours dans le même sens $x_0\omega < a\omega_0$

$$\Rightarrow x_0 < x_{max} = \frac{a\omega_0}{\omega}$$

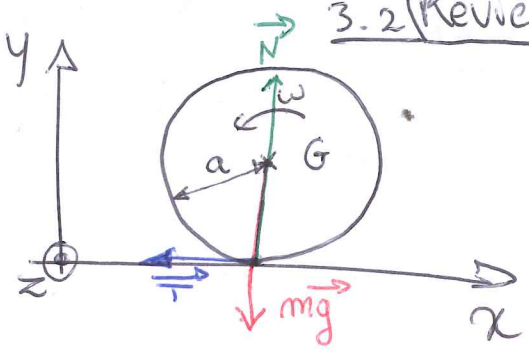
d) Puissance fournie par les moteurs

Le système des 2 cylindres reçoit de la puissance par les frottements.

$$P = -(T_1 + T_2)a\omega_0 = -fmga\omega_0$$

E_c (cylindres) = cte donc $P_{moteur \to cylindre} = +fmga\omega_0$

3.2 Revient, revient pas ?



On lance un solide pouvant rouler (boule, cylindre, peu importe ici) de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation.

$\mathcal{R}_{Terrestre}$ $\quad \vec{\omega} = \omega \vec{e_z} \quad \vec{v_G} = \dot{x}\vec{e_x}$

Réaction du sol $\quad \vec{R} = N\vec{e_y} - T\vec{e_x}$

Initialement $\omega = \omega_0 > 0$ et $\dot{x} = v_0 > 0$.

Le solide tourne donc dans le sens qui s'oppose au mouvement, induisant T.

La première phase du mouvement est une phase de glissement, $\vec{v_g} = (\dot{x} + a\omega)\vec{e_x}$

But : Trouver à quel moment le solide s'arrête de glisser, et s'il revient vers nous ou pas.

TCI $\quad /y \quad N = mg \quad (1)$

$/x \quad m\ddot{x} = -T \quad (2)$

TMC* $J\dot{\omega} = -Ta \quad (3)$

Rmque (1), (2), (3) vrai $\forall$ régime de roulement / glissement.

Inconnues : $N, T, x(t), \omega(t)$.

Phase 1 : glissement $\Rightarrow T = fN \ (4) = fmg$.

$(3) \longrightarrow \dot{\omega} = \dfrac{-fmga}{J}$ donc $\omega(t) = \dfrac{-fmga}{J}t + \omega_0$

$(2) \longrightarrow \ddot{x} = -fg$ donc $\dot{x}(t) = -fgt + v_0$

On recherche l'instant t_{roule} tel que $v_g(t_{roule}) = 0$.

$$v_g(t) = -fgt + v_0 - \frac{fmga^2 t}{J} + a\omega_0 \Rightarrow \boxed{t_{roule} = \frac{v_0 + a\omega_0}{fg\left[1 + \frac{ma^2}{J}\right]}}$$

$$\dot{x}(t_{roule}) = v_0 - \frac{(v_0 + a\omega_0)}{1 + \frac{ma^2}{J}}$$

Le signe de $\dot{x}(t_{roule})$ nous donne le mvmt de la phase 2.

< 0 : $\omega_0 > \dfrac{v_0 ma}{J}$

Le solide revient

Ex : cerceau

> 0 : $\omega_0 < \dfrac{v_0 ma}{J}$

Le solide revient pas

Ex : Bowling.

Rmque Durant la phase 2, $P(\text{forces}) = 0$ car c'est du roulement sans glissement. D'après le TEC, $\dot{x} = cte$.

Conclusion

- Nous avons compris les origines microscopiques des frottements afin de pouvoir s'interroger sur le modèle de contact ponctuel que nous utiliserons à présent.
- La réaction qu'éxerce un support sur un solide est à priori indéterminée, mais les lois de Coulomb nous permettent de faire le lien entre ses deux composantes.
- La condition de glissement ou de non glissement apporte une équation suplémentaire. Il est donc nécessaire de formuler une hypothèse sur le type de mouvement pour résoudre une phase de mouvement, hypothèse devant être vérifiée par la suite.

Ouverture: L'étude microscopique du contact solide connaît depuis quelques années un regain d'intérêt grâce aux progrès techniques. Le calcul théorique des coefficients de frottements statiques et dynamiques reste un problème ouvert actuellement. Les enjeux industriels sont de taille, si bien qu'une branche entière des sciences leur est dédiée : c'est la tribologie.

Commentaires sur la leçon

Sur cette leçon, nous pourrions passer beaucoup de temps à définir des choses et se laisser aller à l'écriture de théorèmes fastidieux et de compositions de référentiels pour faire de la mécanique dans les règles de l'art. Cependant j'ai l'impression en lisant des choses par-ci par-là que nous sommes plus invités à réfléchir à la notion de contact, à cette histoire d'équation manquante et d'indétermination sur $\vec{R}$, et à la signification des coefficients de frottement. Je pense donc qu'il ne faut pas passer trop de temps sur les définitions mais plutôt insister sur des exemples et des exos.

Le stick-slip est vraiment une excellente illustration de cette leçon et une manip quantitative est faisable sur place. Il y a un montage tout fait dans la collection, avec masse ressort et tapis roulant, mais j'avoue ne pas avoir essayé car je savais que j'allais manquer de temps pour la faire.
Des bisous à tous.