

# LP01 – CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES. FROTTEMENT.

13 octobre 2016

*"Violon. Instrument qui titille les oreilles humaines par le frottement d'une queue d'un cheval sur les boyaux d'un chat."*

Lucas TORTEROTOT & Daniel VILLEGAS

AMBROSE BIERCE

## Niveau : PCSI, MP

### Commentaires du jury

**2016** Cette leçon est l'occasion d'appliquer les lois de la mécanique du solide.

**2015** Cette leçon est souvent présentée à un niveau trop élémentaire. La compréhension des aspects microscopiques en jeu est appréciée par le jury.

**2013**, le titre était : Contact entre deux solides. Frottement de glissement. Applications au glissement et au roulement.

**2002** L'énoncé des lois de Coulomb relatives au frottement de glissement est souvent incomplet. Il faut éviter la confusion entre puissance des actions subies par un des solides en contact, et puissance totale des actions de contact. L'origine microscopique des actions de frottement mérite d'être évoquée.

*Au programme de PCSI : Lois de Coulomb du frottement de glissement dans le seul cas d'un solide en translation. Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.*

### Bibliographie

- *BUP 899-1 (12/2007)*, Du frottement à la tribologie : → précisions sur l'historique et la manière de formuler survol historique, **Ugo Besson** → les lois de frottement solide
- *Tec & Doc Physique PC-PC\**, **Grécias** → les bases du cours
- *Les milieux granulaires*, **Andreotti** → très précis, va plus loin que des ouvrages généralistes
- *Mécanique du solide*, **Brébec** →

### Prérequis

- mécanique du point.
- mécanique du solide.
- frottements fluides en  $-\alpha\vec{v}$ .
- oscillateur harmonique amorti par frottements fluides.

### Expériences

- ☛ Pavé sur plan incliné
- ☛ Sommerfeld
- ☛ *Stick-slip* avec tapis roulant

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Contact entre deux solides</b>	<b>2</b>
1.1	Approche microscopique . . . . .	2
1.2	Approche macroscopique . . . . .	2
1.3	Actions mécaniques des forces de contact . . . . .	3
1.4	Cinématique . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Lois phénoménologiques des frottements solide</b>	<b>4</b>
2.1	L'expérience de Léonard de Vinci . . . . .	4
2.2	Lois d'Amontons-Coulomb . . . . .	4
2.3	Illustration expérimentale . . . . .	5
2.4	Aspect énergétique . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Conséquences</b>	<b>6</b>
3.1	Oscillateur amorti . . . . .	6
3.2	<i>Stick-slip</i> . . . . .	6
3.2.1	Expérience de Sommerfeld . . . . .	6
3.2.2	Son du violon, grincement de porte, crissement de craie . . . . .	6

## Introduction

Un violon émet un son à partir de la vibration d'une corde. Or, l'archet décrit un mouvement de translation rectiligne uniforme. Comment cela est-il possible ?

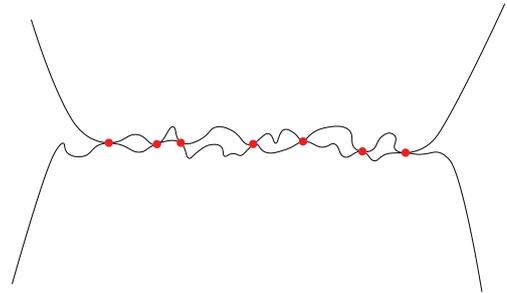
Les frottements fluides ne sont pas les seuls frottements existants. Il existe aussi des frottements entre solides, de nature différente. Sans ces frottements solides, nous ne pourrions pas faire avancer de voiture ni même marcher. Ce sont ces mêmes frottements qui sont à l'origine du grincement des portes et de la vibration des cordes d'un violon. L'objectif de ce cours est de déterminer les origines de ces frottements par l'étude et la modélisation du contact entre deux solides. Les lois de Coulomb pour les frottements solides seront formulées, et nous étudierons leurs conséquences, en particulier la différence avec les frottements fluides.

## 1 Contact entre deux solides

### 1.1 Approche microscopique

➤ **Andreotti**

La plupart des surfaces solides ne sont pas lisses mais présentent une certaine rugosité à l'échelle microscopique. Il y a donc un contact effectif au niveau des rugosités les plus hautes, et la surface de contact effective plus petite que la surface apparente<sup>1</sup>, comme représenté sur la figure 1. Par la suite, le terme de surface de contact désignera toujours la surface de contact apparente.

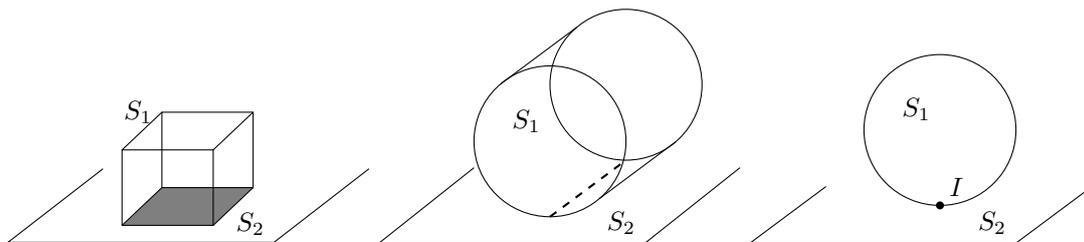


**Figure 1** – Contact entre deux solides au niveau microscopique. La surface effective de contact (zones en rouge) est bien inférieure à la surface de contact apparente !

↓ Nous ne pouvons pas forcément accéder à cette échelle microscopique. Il nous faut pouvoir traiter le problème à notre échelle.

### 1.2 Approche macroscopique

Plusieurs types de contacts entre solides peuvent exister : surfacique, linéique ou ponctuel (avec éventuellement plusieurs points de contact), comme illustré sur la figure 2. Les solides sont dits en contact dès qu'il existe au moins un point  $I$  de contact. En réalité, les solides se déforment légèrement, si bien qu'il existe toujours une certaine surface de contact autour de  $I$  : les contacts linéique et ponctuel ne sont qu'une approximation.



**Figure 2** – Contacts surfacique, linéique et ponctuel.

Le plan tangent commun  $\Pi$  est le plan tangent à  $(S_1)$  et à  $(S_2)$  en  $I$  (sous réserve que les surfaces des solides soient régulières, ce que l'on suppose ici). Sur la figure 2,  $\Pi$  est la surface de  $S_2$ .

↓ Du contact résultent des actions mécaniques. Quelles sont-elles ?

1. Bowden, Tabor : par conséquence, la contrainte normale moyenne supportée par les aspérités est beaucoup plus grande et on fait l'hypothèse de déformation plastique. Alors,  $F_N = \sigma S_r = H S_r$  avec  $H$  la dureté du matériau. Pour glisser, il faut donc appliquer une contrainte tangentielle au niveau des contacts égale à la limite élastique en cisaillement  $\tau_c$  ie  $F_T = \tau_c S_r$ , si bien que la force de frottement est  $F_T = \tau_c / H F_N \rightarrow \mu_s \sim \tau_c / H$ .

### 1.3 Actions mécaniques des forces de contact

Lorsque les deux solides sont en contact, il existe plusieurs actions mécaniques exercées par ( $S_2$ ) sur ( $S_1$ ). Elles sont modélisables par une force résultante  $\vec{R}$  et un moment  $\vec{M}$ , avec une composante dans le plan tangent commun et une composante orthogonale à ce plan. On définit ainsi les résultantes normale, tangentielle et les moment de pivotement et de roulement (figure 3). Ces grandeurs sont *a priori* indépendantes.

Dans la suite de la leçon, nous nous limiterons à l'approximation d'un contact rigoureusement ponctuel. La résultante des actions de contact s'applique alors nécessairement au point  $I$ , et  $\mathcal{M} = \vec{0}$ .

Attention, ceci est une approximation dont une limite est le cas d'une toupie : elle ne tourne pas indéfiniment à cause de  $\vec{M}_\perp$ .

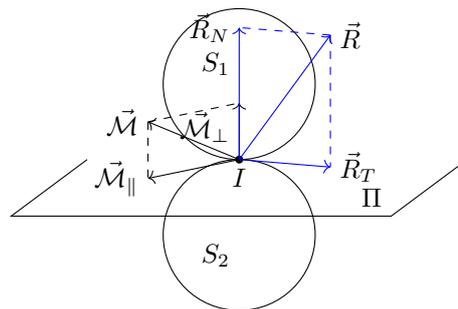


Figure 3 – Les actions mécaniques de contact entre solides

↓ Nous avons décrit les forces en présence, mais que peut-on dire du mouvement des solides en contact ?

### 1.4 Cinématique

#### ⚡ Brebec

Lorsque les deux solides sont en contact, ils peuvent être en mouvement l'un par rapport à l'autre. Ce mouvement est décrit dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . Nous définissons alors la vitesse de glissement de ( $S_1$ ) par rapport à ( $S_2$ ) comme

$$\vec{v}_{gl}(S_1/S_2) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(I \in S_1) - \vec{v}_{\mathcal{R}}(I \in S_2) \tag{1}$$

**Remarque :**  $\vec{v}_{gl}$  est forcément dans  $\Pi$  pour conserver le contact et ne pas que les solides se rentrent dedans !

De même, les solides peuvent être en rotation l'un par rapport à l'autre. Dans le référentiel lié à ( $S_2$ ), nous pouvons alors définir le vecteur rotation de ( $S_1$ ),  $\vec{\Omega}$ . Cette rotation se décompose en pivotement ( $\vec{\Omega}_\perp$ ) et en roulement ( $\vec{\Omega}_\parallel$ ). Le roulement peut s'accompagner, ou non, de glissement !

Illustrer avec une petite manip rapide sur la table et un objet quelconque !

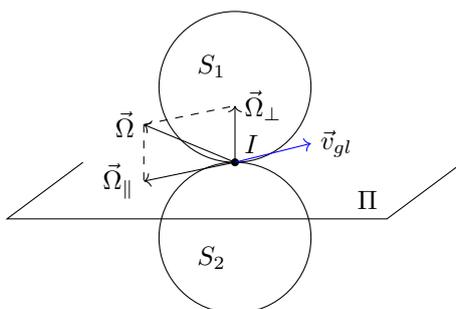


Figure 4 – Cinématique des solides en contact

↓ Nous avons fixé un cadre d'étude pour le contact entre deux solides. Toutefois, nous n'avons pas de loi pour décrire  $\vec{R}_T$  !

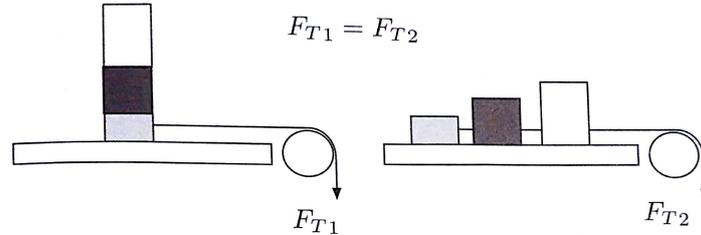
## 2 Lois phénoménologiques des frottements solide

Cette partie est grandement inspirée de la leçon de Justin Péméja de l'an dernier. Elle est bien réalisée et propose un calcul énergétique apprécié du jury.

### 2.1 L'expérience de Léonard de Vinci

✦ **Andreotti**

détailler un peu à l'oral ...



**Figure 5** – L'expérience de Léonard de Vinci. La force nécessaire pour faire glisser les masses est identique dans les deux situations. Elle est indépendante de la surface de contact.

Trois observations sur l'expérience de de Vinci :

1. La force  $F_T$  nécessaire pour mettre en mouvement les blocs est identique, que les blocs soient posés l'un à côté de l'autre ou l'un sur l'autre :  $F_T$  est indépendante de la surface de contact.
2. La force  $F_T$  dépend linéairement de la force normale (ici, l'opposé du poids).
3. La force  $F_T$  mesurée une fois que le patin glisse est inférieure à la force nécessaire pour initier le mouvement.

### 2.2 Lois d'Amontons-Coulomb

✦ **Andreotti**

Lois d'Amontons-Coulomb :

- Partant du repos, il faut que la norme de la réaction tangentielle atteigne  $\|\vec{R}_{Ts}\| = \mu_s \|\vec{R}_N\|$  pour mettre en mouvement le patin. Le facteur  $\mu_s$  est le coefficient de friction statique entre les deux solides en contact. Tant qu'il n'y a pas de mouvement, la réaction tangentielle  $\vec{R}_T$ , appelée aussi force de frottement, est *a priori* indéterminée. On a seulement l'inégalité  $\|\vec{R}_T\| \leq \mu_s \|\vec{R}_N\|$ .
- Une fois le patin en mouvement, la norme de la force de frottement est égale à  $\|\vec{R}_{Td}\| = \mu_d \|\vec{R}_N\|$ , où  $\mu_d$  est le coefficient de friction dynamique. La force de frottement est alors dirigée dans le sens opposé à la vitesse du patin.
- Les coefficients  $\mu_s$  et  $\mu_d$  sont des constantes ne dépendant que de la nature des matériaux en contact, avec typiquement  $0,1 \leq \mu_d < \mu_s \leq 1$  :

Contact	$\mu_s$	$\mu_d$
acier-acier sec	0,6	0,4
acier-acier graissé	0,1	0,05
pneu-chaussée sèche	1	0,7
pneu-chaussée humide	0,7	0,3
bois-bois	0,5	0,3
bois-métal	0,6	0,1
téflon-acier	0,04	0,04

**Table 1** – Quelques valeurs des coefficients de friction : ✦ **Taillet, Dictionnaire de la physique**

Ces lois permettent de retrouver les résultats de de Vinci! En revanche, l'expérience de Léonard de Vinci n'a eu aucune influence sur les travaux d'Amontons et de Coulomb.

## 2.3 Illustration expérimentale

### Plan incliné

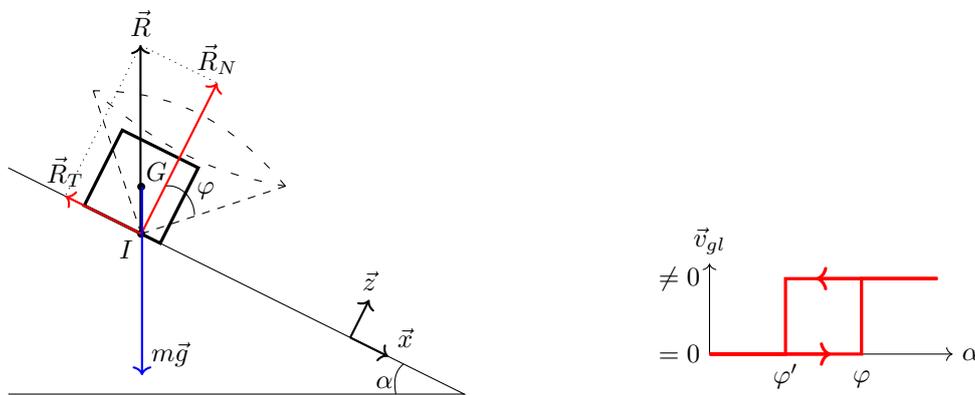
⚡ -

⊖ 2 minutes

Matériel :

- masse en bois avec surface au choix P82
- plan incliné P82

Simplement mettre le morceau de bois sur le plan incliné et augmenter l'angle jusqu'à avoir glissement (donne info sur  $\mu_s$ ). Lorsque l'on diminue légèrement l'angle, le glissement continue ( $\mu_s > \mu_d$ ), il faut diminuer encore plus l'angle pour stopper la masse. Pour déterminer  $\mu_d$ , donner des pichenettes au morceau de bois et regarder s'il continue ou non à glisser. Voir la figure 6. À vos risques et périls, vous pouvez essayer de retrouver les valeurs de certains coefficients, pas sûr que ce soit judicieux en leçon.



**Figure 6** – Droite : l'expérience du plan incliné (situation de non-glissement). Notez la position du point  $I$  qui n'est pas au centre de la surface de contact ! Gauche : hystérésis du frottement solide.

**Arc-boutement** : le cône de frottement statique est défini comme le cône d'angle au sommet  $2\varphi$ , avec  $\tan \varphi = \mu_s$ . Tant que la résultante  $\vec{R}$  est à l'intérieur du cône, il n'y a pas glissement (c'est la condition  $\|\vec{R}_T\| < \mu_s \|\vec{R}_N\|$ ). Attention, le cône de frottement dynamique est différent :  $\tan \varphi' = \mu_d$  ! Lors du glissement,  $\|\vec{R}_T\| = \mu_d \|\vec{R}_N\|$  et  $\vec{R}$  est donc sur la surface du cône de frottement dynamique.

**Hystérésis du frottement** : comme  $\mu_d < \mu_s$ , il y a mise en mouvement à  $\alpha > \varphi$  et arrêt à  $\alpha = \varphi' < \varphi$ , d'où un phénomène d'hystérésis (figure 6).

↓ Nous venons de décrire le comportement des frottements solide. Quelles conséquences sur l'énergie du système ?

## 2.4 Aspect énergétique

Montrons que la puissance totale des actions de contact est négative. Considérons deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) en contact au point  $I$ . La puissance reçue par ( $S_1$ ) est  $\mathcal{P}_1 = \vec{R} \cdot \vec{v}_{\mathcal{R}}(I \in S_1)$ . La puissance reçue par ( $S_2$ ) est, après application de la troisième loi de Newton,  $\mathcal{P}_2 = -\vec{R} \cdot \vec{v}_{\mathcal{R}}(I \in S_2)$ . La puissance totale vaut donc  $\mathcal{P}_{\text{tot}} = \vec{R} \cdot \vec{v}_{gl}$  soit, d'après les lois de Coulomb,  $\mathcal{P}_{\text{tot}} = -\|\vec{R}_T\| \|\vec{v}_{gl}\| \leq 0$ .

Ainsi, la puissance totale des forces de frottement est nulle s'il n'y a pas de frottement, ou s'il n'y a pas de glissement. On peut donc bien avoir une force de frottement non nulle sans avoir de dissipation d'énergie par frottement.

**Remarque** : Il faut bien faire attention à calculer  $\mathcal{P}_{\text{tot}}$ , la puissance totale du frottement. Si ( $S_2$ ) est en mouvement à cause des frottements de contact avec ( $S_1$ ), alors on peut avoir  $\mathcal{P}_2 \geq 0$ .

## 3 Conséquences

### 3.1 Oscillateur amorti

Prendre la situation de la figure 8a avec  $V = 0$ . Faire bien attention à différencier le cas selon le signe de  $\dot{\epsilon}$ , l'équation différentielle n'est pas la même. On obtient des portions de cosinus. Attention, il n'y a pas vraiment d'enveloppe linéaire (vous pouvez vous convaincre en remarquant que la dérivée de  $\epsilon$  est, ici, nulle en 0, mais pas celle de cette pseudo-enveloppe). La condition d'arrêt est  $\dot{\epsilon} = 0$  avec  $|\epsilon| < \mu_s mg/K$  : la position finale n'est pas forcément  $\epsilon = 0$ , contrairement au cas des frottements fluides (qui en plus donnent une décroissance exponentielle des oscillations). Voir figure 7.

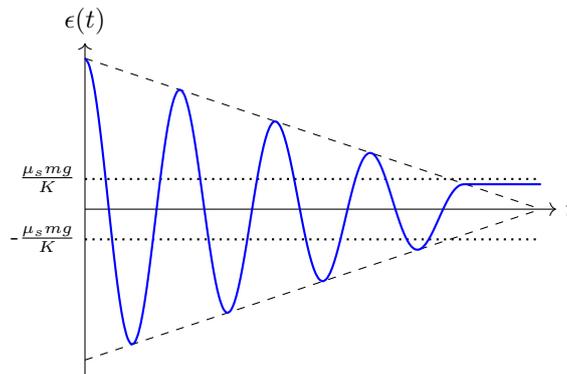


Figure 7 – Allure caractéristique de l'oscillateur amorti par frottement solide. La pente de la pseudo-enveloppe est de  $\pm 4\mu_a mg/K$ .

### 3.2 Stick-slip

#### 3.2.1 Expérience de Sommerfeld

(optionnel) Je ne ferai pas mieux que Justin pour décrire cette petite manip' rapide :

L'expérience prend une minute. On place une règle en appui sur ses doigts. On essaye d'exercer une force égale à droite et à gauche pour rapprocher les deux doigts. Les doigts collent et glissent à tour de rôle pour enfin se rejoindre au centre de la règle. Cette expérience est plutôt marrante et permet de montrer qualitativement comment une variation de la réaction normale exercée par un doigt permet d'être en régime de glissement ou non. Sa mise en équation n'est pas très facile, et prendrait trop de temps dans la leçon, n'y songez pas. Mais vous pouvez si ça vous tente regarder ce très joli sujet de l'X dessus : *X physique 1 PC 2007*.

#### 3.2.2 Son du violon, grincement de porte, crissement de craie

##### Stick-slip

♣ Les expériences à l'agrégation,  
Daniel Lucas, Éd. ENSL

⊖ 3 minutes

Matériel :

- bande de papier ou assimilé (tapis)
- un ressort *bien choisi*
- masse en bois avec surface au choix P82
- tige pour le retour du tapis (en face du moteur)
- dépoli P128.8 ou assimilé
- statiques avec noix pour tenir le tout (3 statiques a priori)
- moteur P95.22/2 avec cylindre fait pour l'occasion

Modélisation de ces situations par :

- un tapis roulant pour avoir une force de frottement vis à vis d'un support à vitesse constante
- un ressort pour la force de rappel (tension de la corde, opérateur ouvrant la porte ou écrivain avec la craie ...)

✎ **Andreotti** Considérons un patin solide posé sur un substrat relié à un ressort de raideur  $K$  (figure 8). À l'instant  $t = 0$ , le ressort est au repos (allongement nul) et le patin à la position  $X = 0$ . On commence alors à tirer l'extrémité du ressort à la vitesse constante  $V$ . L'allongement du ressort est alors  $\epsilon = Vt - X(t)$ . On appelle  $F_T$  la tension du ressort,  $R_T$  la force de friction et  $F_N = mg$  la force normale avec  $m$  la masse du patin. La dynamique du patin s'établit en deux temps :

1. Le patin est à l'arrêt et ne glissera pas tant que la tension  $F_T$  n'atteint pas la force critique  $T_{Tc} = \mu_s F_N$ . On a alors  $\dot{\epsilon} = V$ .
2. Le patin glisse et la force de friction est égale à  $R_T = \mu_d F_N$ . L'équation de la dynamique s'écrit alors

$$m\ddot{X} = K\epsilon - \mu_d F_N \quad (2)$$

Soit en terme d'allongement

$$\ddot{\epsilon} + \frac{K}{m}\epsilon = \frac{\mu_d F_N}{m} \quad (3)$$

L'allongement  $\epsilon$  oscille donc à la fréquence  $\sqrt{K/m}$  autour de la valeur  $\mu_d mg/K$ . Lors de cette oscillation, le patin va repasser par la vitesse nulle (lorsque  $\dot{\epsilon} = V$ ), et le système est alors renvoyé à l'étape 1.

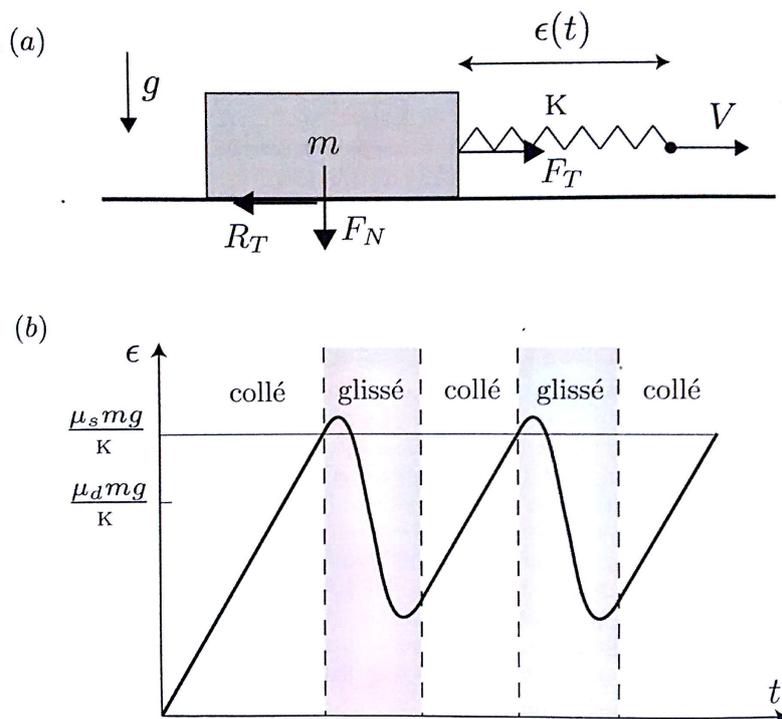


Figure 8 – (a) : schéma de la situation. (b) : allure de  $\epsilon(t)$ .

Le mouvement résultant est donc une succession d'étapes "collées" où le patin est à l'arrêt et où le ressort s'allonge, et d'étapes "glissées" où le patin avance. C'est un phénomène non linéaire (oscillation avec forçage constant dans le temps), et l'oscillation est non harmonique ! La non linéarité provient de la non linéarité de la loi de Coulomb. Conséquences : violon, grincement des portes, crissement des craies, modèle simplifié pour les tremblements de terre (dérive lente des continents) ...

## Conclusion

- sujet complexe, se joue au niveau microscopique
- simplification heureuse avec les lois de Coulomb en première approximation, à l'échelle macroscopique
- permet de traiter les frottements solides dans de nombreux cas (porte, craie, violon, freinage sur différentes chaussées ...)
- les frottements peuvent être dissipatifs ou nécessaires au mouvement :
  - une roue utilise les frottements pour avancer sans que ceux-ci ne dissipent d'énergie
  - lors de la marche, les frottements fournissent l'accélération, mais pas l'énergie qui, elle, est fournie par la puissance des forces intérieures (muscles).
- la tribologie est la science qui étudie les systèmes matériels en contact : nous avons fait de la tribologie dans cette leçon !

### Ouvertures possibles :

- Fonctionnement de l'ABS : revenir dans le cône de frottement statique en débloquent les roues.
- Frottement de pivotement et résistance au roulement. Conséquence : la position d'équilibre d'un appareil comme un voltmètre analogique n'est pas exactement définie par l'égalité du couple électromagnétique et du couple de rappel du ressort, il y a une plage d'équilibre qu'il faut donc réduire au maximum pour limiter l'incertitude.
- L'adhésion influe très peu sur le frottement, mais il y a tout de même une force proportionnelle à la surface de contact *apparente*  $A$  qui s'ajoute :  $R_T = \mu R_N + \kappa A$ .
- On peut aussi citer la conclusion du livre d'Andreotti qui apporte pas mal de précisions :  
*Les lois du frottement solide, bien que vérifiant en première approximation les lois de Coulomb, sont en réalité plus complexes. Tout d'abord, la proportionnalité entre la force de frottement et la charge normale n'est plus vérifiée pour de très fortes charges et/ou des matériaux très mous. Dans ce cas, la force de friction sature vers une constante. Ce phénomène, bien connu des pilotes de F1, provient du fait que la rugosité des surfaces est alors totalement écrasée. L'aire réelle de contact est donc égale à l'aire apparente et ne dépend plus de la charge. L'autre approximation concerne l'hypothèse des coefficients de friction  $\mu_s$  et  $\mu_d$  constants. Des phénomènes comme le vieillissement statique (augmentation de  $\mu_s$  avec l'âge mais diminution avec polissage ...) ou l'affaiblissement cinétique (diminution de  $\mu_d$  avec la vitesse de glissement) sont observés.*