

# LP1 – CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES, FROTTEMENTS.

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : jsp

## Bibliographie

- ♣ *BUP 822 (1)* pour le modèle des brosses
- ♣ *Tec Doc Olivier (PC-PC\*)*
- ♣ *Mécanique Générale, Gruber* Pour les applications

## Table des matières

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Phénoménologie du contact solide sec</b>       | <b>2</b> |
| 1.1      | Origine microscopique . . . . .                   | 2        |
| 1.2      | Manifestation macroscopique . . . . .             | 3        |
| <b>2</b> | <b>Lois d'Amontons-Coulomb</b>                    | <b>5</b> |
| 2.1      | Des lois phénoménologiques . . . . .              | 5        |
| 2.2      | Étude énergétique . . . . .                       | 6        |
| 2.3      | Étude d'un véhicule à roues : la moto . . . . .   | 6        |
| <b>3</b> | <b>Applications</b>                               | <b>8</b> |
| 3.1      | Le collé-glissé . . . . .                         | 8        |
| 3.2      | Corde sur une poulie : limite du modèle . . . . . | 10       |

## Remarques sur les leçons précédentes

- **2017** : Cette leçon gagne beaucoup à être illustrée par des exemples concrets maîtrisés.
- **2016** : Cette leçon est l'occasion d'appliquer les lois de la mécanique du solide.
- **2015** : Cette leçon est souvent présentée à un niveau trop élémentaire. La compréhension des aspects microscopiques en jeu est appréciée par le jury.
- **2014** : Il est toujours intéressant de posséder des notions sur les modèles microscopiques du frottement. Jusqu'en 2013, le titre était : Contact entre deux solides. Frottement de glissement. Applications au glissement et au roulement.
- **2012** : Les candidats sont invités à réfléchir sur la notion de contact ponctuel et à la réalité microscopique de ce contact. Il peut être intéressant d'illustrer et discuter la différence entre coefficients de frottement statique et dynamique.

Elle est trop chiant cette leçon ya mille trucs à dire et les retours de Gayvallet aident pas à se décider. La leçon de Valentin et Chauchat était bien ya pas mal de trucs à reprendre (dont des images), j'aime bien celle de Francis qui est très complète mais va falloir choisir. Je propose de reprendre ses deux premières parties, y compris l'application du véhicule à roues ça montre que les frottements ça peut servir à avancer blablabla. Ensuite en troisième partie des applications, forcément le stick slip vu qu'on est stylés là-dessus, et le noeud de cabestan/poulie c'est stylé aussi et ça fait une limite du modèle vis a vis de la surface de contact tavu on a un esprit critique.

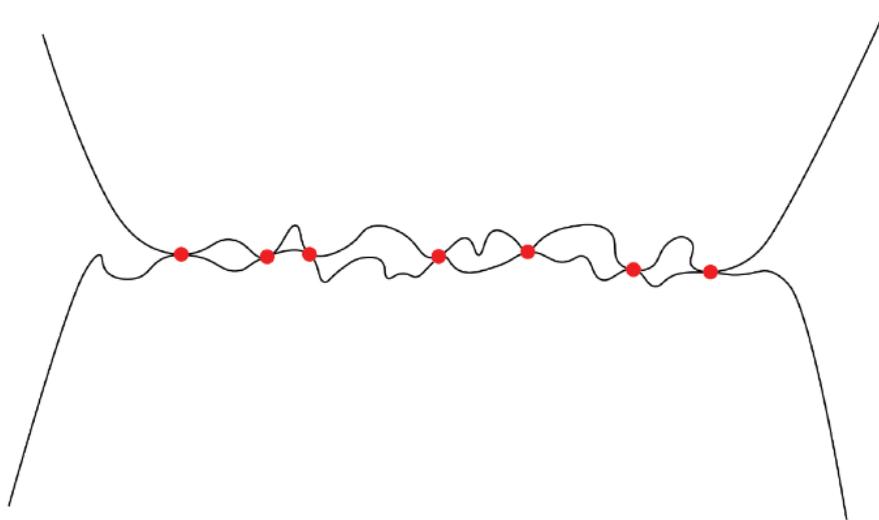
## 1 Phénoménologie du contact solide sec

### 1.1 Origine microscopique

*Un autre modèle microscopique peut expliquer l'OdG des coefficients de frottement et la proportionnalité entre force tangente et force normale (voir Andreotti p22)*

➤ Valentin et Chauchat

On peut d'abord essayer d'expliquer le phénomène de frottements solides avec un modèle microscopique simple. L'image que l'on s'en fait est alors la suivante :



Les surfaces solides ne sont en effet jamais parfaitement lisses et présentent des aspérités. Si l'on applique une force tangentielle sur le solide du dessus, on applique des forces aux niveaux des points de contacts entre ces aspérités qui, par principe d'action réciproque, donne des forces opposées résultant en une force macroscopique opposée à la force tangentielle. Il est alors vraisemblable que la force résultante dépende de la surface effective de contact  $S_{eff}$  entre les deux solides au niveau microscopique. Toutefois cette grandeur n'est pas accessible expérimentalement, de quoi dépend-elle ?

Considérons une surface de contact macroscopique  $S$  soumise à une force normale  $N$  entraînant la formation de  $Q$  zones de contact. Le matériau est caractérisé par sa contrainte de seuil plastique  $\sigma_{sp}$  qui correspond à la contrainte maximale que peut supporter le matériau avant de se déformer significativement. Au niveau des îlots, les contraintes sont très grandes et dépassent ce seuil. Les zones de contacts se déforment alors. Cette déformation opérée au-delà du seuil plastique est proportionnelle à la contrainte à travers un coefficient mécanique  $H$  caractéristique du matériau tel que :

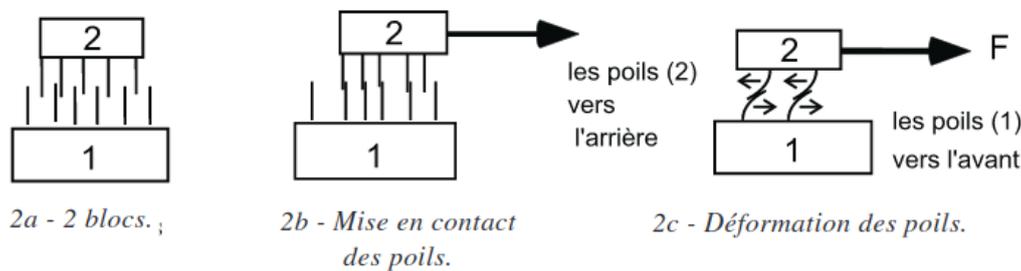
$$s \propto \frac{NH}{S} \quad (1)$$

Si on introduit un coefficient  $\beta$  représentant la quantité d'aspérité par unité de surface du matériau on a :

$$S_{eff} = s\beta S = \beta NH \quad (2)$$

On remarque donc que dans ce modèle, la surface effective de contact et donc a priori la force de frottement tangentielle ne dépend pas de la surface macroscopique du solide frottant. Nous reviendrons sur ce résultat juste après.

Un autre moyen de voir les choses plus simplement est par un modèle de déformation élastique : le modèle des broches. Celui-ci reprend le principe des aspérités mais les considère comme des tiges déformables :



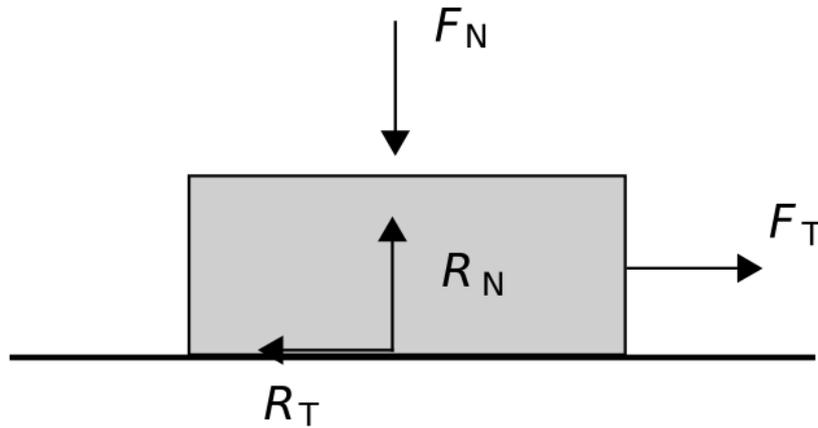
En appliquant une force tangentielle au solide du dessus, on met donc en contact les tiges supérieures et inférieures puis celles-ci se déforiment élastiquement. Comme tout matériaux élastiques, ceux-ci vont exercer une force de rappel sur les solides pour revenir à leur état initial : c'est la force de frottement. Mais du coup on ne peut pas bouger de plus d'un intervalle de tiges? Ça pue la merde de modèle! Non en fait au-delà d'une certaine déformation les tiges se "passent à travers" (faire avec ses mains jsp comment le dire) et donc le solide peu avancer par à-coups de cette manière (prépare le terrain pour l'hystérésis).

↓ Ces modèles permettent de prendre un peu l'intuition du phénomène, mais à notre échelle ça se manifeste comment les frottements ?

## 1.2 Manifestation macroscopique

↪ Olivier PC p 177,203 (je l'ai pas donc je vais me baser surtout sur Valentin et Chauchat)

Les actions mécaniques des forces de contact sur un solide seront souvent modélisées par une force résultante  $\mathbf{R}$ . Si le contact est surfacique et a priori non uniforme,  $\mathbf{R}$  est modélisé par une distribution de contrainte sur l'ensemble de la surface de contact. Dans la suite nous nous placerons dans le cas d'un contact ponctuel ou supposé uniforme. Dans ce cas là,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_N + \mathbf{R}_T$ .  $\mathbf{R}_N$  est appelée force de réaction normale : elle est orthogonale à la surface de contact et orientée vers le solide considéré.  $\mathbf{R}_T$  est appelée force de réaction tangentielle, elle est orthogonale à  $\mathbf{R}_N$  et s'oppose au mouvement.



Pour introduire les outils nécessaires à la description du mouvement de deux solides en contact, considérons le cas de deux solides  $S_1$  et  $S_2$  ou plus particulièrement le cas d'une sphère  $S_1$  en contact ponctuel avec un plan  $S_2$ .  $S_2$  est considéré fixe dans le référentiel du laboratoire, c'est par exemple une table. Soit  $I$  le point de contact entre les deux solides à l'instant  $t$ , on définit les points  $I_1$  et  $I_2$  les points appartenant respectivement à  $S_1$  et  $S_2$  et coïncidant avec  $I$  à l'instant  $t$ . Ces deux points sont donc à la même position mais rien ne dit qu'ils ont la même vitesse ! En effet, si la sphère tourne sur elle-même sans avancer alors la vitesse de  $I_1$  est non nulle alors que celle de  $I_2$  l'est. On définit alors la vitesse de glissement !

$$\mathbf{v}_{\mathbf{g}_{1/2}} = \mathbf{v}|_R(I_1) - \mathbf{v}|_R(I_2) \quad (3)$$

Cette vitesse est alors nulle seulement s'il n'y a pas de phénomènes de glissement. Dans notre cas, si la sphère est de rayon  $R$ , qu'elle tourne sur elle-même à la vitesse angulaire  $\omega$  et qu'elle se déplace à la vitesse  $v$  alors on a **schéma au tableau** :

$$\mathbf{v}|_R(I_2) = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{v}|_R(I_1) = \mathbf{v}|_{R1}(I_1) + \mathbf{v}|_R(G) = \omega \wedge \mathbf{R} + \dot{x}_g \mathbf{u}_x \quad (5)$$

d'où finalement :

$$\mathbf{v}_{\mathbf{g}_{1/2}} = (v - R\omega) \mathbf{u}_x \quad (6)$$

dans le cas de non-glissement on a alors :

$$v = R\omega \quad (7)$$

Comment résoudre un problème de dynamique impliquant des frottements maintenant que l'on a tous les outils de description ? Reprenons l'exemple de la sphère sur le plan. Plusieurs cas sont possibles selon la situation <sup>1</sup> :

|                           |  |                           |     |
|---------------------------|--|---------------------------|-----|
| Statique                  | Inconnues<br>$\mathbf{N}, \mathbf{T}(2)$ | Équations<br>PFD, TMC (3) | (8) |
| Roulement sans glissement | $\mathbf{N}, \mathbf{T}, x_G, \omega(4)$ | PFD, TMC, $v_g = 0(4)$    |     |
| Cas général               | $\mathbf{N}, \mathbf{T}, x_G, \omega(4)$ | PFD, TMC (3)              |     |

Dans le cas général, on a donc plus d'inconnues que d'équations... on ne va pas s'en sortir !

**I** Il va falloir introduire des lois phénoménologiques pour fermer le bordel



## 2 Lois d'Amontons-Coulomb

### 2.1 Des lois phénoménologiques



#### Expérience introductive



Plan incliné par un support élévateur. On augmente l'angle petit à petit et on compare les angles de glissement pour différents solides. Plus l'angle est grand, plus la projection du poids sur la direction tangente au support est grande donc plus la résultante des forces dans cette direction est importante. Au décoller, le poids compense la force de frottement tangentielle. Plus l'angle de décrochage du solide est important, plus la force de frottement tangentielle est importante.

On aligne plusieurs palets de matériaux différents (ça serait plus stylé si ils étaient rangés par ordre croissant de coefficient de frottement). Ils glissent tour à tour : la force nécessaire au glissement dépend du matériau.

On reprend un palet et on le met sur la tranche pour faire varier la surface de contact sans changer la masse. Normalement même angle de glissement donc la force nécessaire au glissement ne dépend pas de la surface de contact.

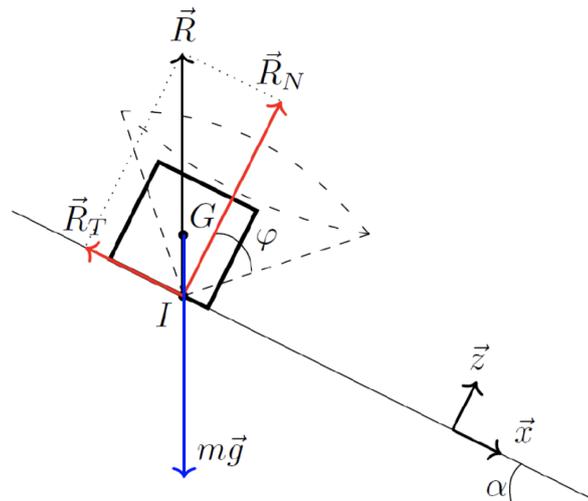


FIGURE 1 – Schéma de l'expérience du plan incliné. On voit notamment que  $I$  n'est pas au centre de la surface de contact : pour le placer on cherche l'intersection entre la force normale (ici le poids) et la surface de contact. Si ce n'est pas possible les forces ne sont plus concourantes, le moment résultant est non nul et le solide bascule.

On remet le schéma avec les forces sur slide pour rappeler les notations  
Quelles lois phénoménologiques pouvons-nous tirer de ces expériences ?

- Partant du repos, il faut appliquer une force  $\|\mathbf{F}_T\| = \|\mathbf{R}_T\| = f_s \|\mathbf{R}_N\|$  pour mettre en mouvement le patin avec  $f_s$  le coefficient de frottement statique. Ainsi avant le mouvement on a seulement :  $\|\mathbf{R}_T\| \leq f_s \|\mathbf{R}_N\|$ .
- Pendant le mouvement on a  $\|\mathbf{R}_T\| = f_d \|\mathbf{R}_N\|$ . La vitesse de glissement  $v_g$  est non nulle, on a  $\mathbf{R}_T / \|\mathbf{v}_g\|$  et  $\mathbf{R}_T \cdot \mathbf{v}_g \leq 0$
- Les coefficient  $f_s$  et  $f_d$  dépendent seulement des matériaux mis en contact et on a typiquement  $0.1 \leq f_d < f_s \leq 1$

1. C'est ici le cas pour un unique point de contact, sinon cela va dépendre de leur nombre

| Type de contact       | $f_s$ | $f_d$ |
|-----------------------|-------|-------|
| acier-acier sec       | 0.6   | 0.4   |
| acier-acier graissé   | 0.1   | 0.05  |
| pneu-chaussée sèche   | 1     | 0.7   |
| pneur-chaussée humide | 0.7   | 0.3   |
| bois-bois             | 0.5   | 0.3   |
| bois-métal            | 0.6   | 0.1   |
| téflon-acier          | 0.04  | 0.04  |

On peut faire plusieurs commentaires sur ces lois :

- Les coefficients de frottement statique et dynamique sont différents : il faut plus de force pour mettre un solide en contact avec un support en mouvement que pour maintenir ce mouvement (on s'en rend compte si on essaye de pousser une armoire). Expérience : on accroche un dynamomètre à un palet et on tire : on observe une chute de la force indiquée quand le solide se met à bouger.
- On peut à l'aide de ces lois revenir sur notre expérience du plan incliné et mettre un critère quantitatif sur le moment du décrochage : tant que le solide accroche on a  $\|\mathbf{R}_T\| \leq f_s \|\mathbf{R}_N\|$ , et égalité au moment du décrochage. On a  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_N + \mathbf{R}_T$ . Soit  $\beta$  l'angle entre  $\mathbf{R}_N$  et  $\mathbf{R}$  : on a  $\tan(\beta) = \mathbf{R}_T/\mathbf{R}_N$ . Ainsi la condition de non décrochage est  $\tan(\beta) \leq f_s$  ou  $\beta \leq \varphi$  avec  $\tan(\varphi) = f_s$ . On peut alors définir un **cône de frottement** dans lequel  $\vec{R}$  doit rester pour que le solide reste immobile. Les pas de vis sont ainsi conçus pour que la vis ne puisse pas ressortir une fois vissée.

## 2.2 Étude énergétique

✦ Tec Doc Olivier (PC-PC\*) page 292

Les forces de frottement sont non conservatives, on peut s'en rendre compte en frottant nos mains : on sent un dégagement de chaleur, donc de l'énergie est dissipée au cours du frottement.

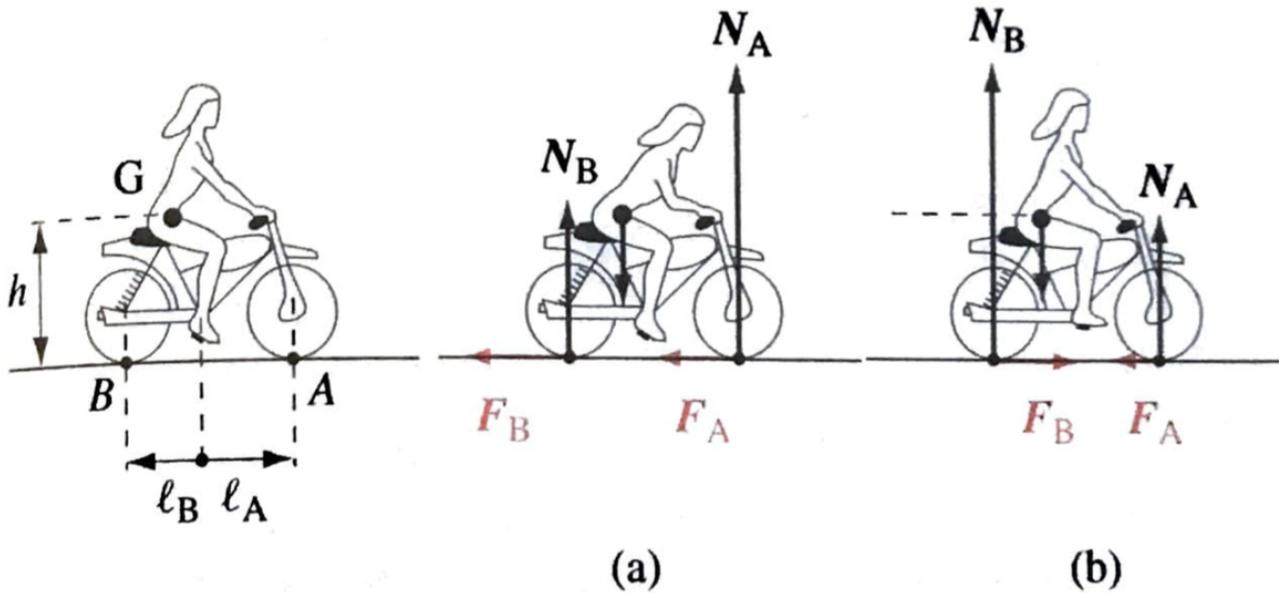
Quand on frotte sur une table une brosse de masse  $m$  entre  $-a$  et  $a$ , on considère le système { brosse + table }. Ce système subit une force d'un opérateur qui sert à déplacer la brosse sur la table, donc le travail de l'opérateur correspond au travail de la table sur la brosse et vaut  $W = 4fmg a$  (sinon se calcule plus proprement cf correction). Comme on fait des allers-retours, on a  $\Delta U = 0$  et  $\Delta S = 0$ .  $\Delta U = 0$  donne  $Q = -W = -4fmg a$  correspondant à la chaleur dissipée par le système, puis  $\Delta S = 0$  donne  $S_c = -S_e = -Q/T = 4fmg a/T > 0$ . La transformation thermodynamique associée est bien irréversible.

Gayvallet : "Notons l'analogie avec un cycle d'hystérésis magnétique  $\frac{B}{\mu_0} = f(H)$  (avec notamment  $W_i = \oint_{\text{cycle}} \vec{F} \cdot \vec{dx}$ ). Dans ce cas, l'irréversibilité est la conséquence du déplacement brutal d'une paroi de BLOCH (zone de transition d'orientation des moments magnétiques entre deux domaines de WEISS). Dans le cas du frottement, elle est due au décrochage d'adhérence brutal au delà du seuil de réponse réversible. La sollicitation macroscopique quasistatique engendre, de façon sous-jacente, des séquences de dynamique brutale c'est-à-dire fortement hors équilibre et donc source d'irréversibilité."

↓ *Le glissement avec frottement s'accompagne donc d'une dissipation d'énergie irréversible, ce que l'on cherche souvent à éviter (trouver un exemple là c con mais je sèche) Cependant le frottement peut aussi se trouver à l'origine du mouvement.*

## 2.3 Étude d'un véhicule à roues : la moto

✦ Gruber p 345 scanné chez Francis



**Fig. 12.30 (a) Freinage ; (b) accélération.**

On comprend facilement que sans frottement on avance pas : la roue glisse sur la route dans le vide, on dérape. On avance si la roue adhère à la route, donc si il ya frottement. Étudions plus précisément le rôle du frottement dans le mouvement de la moto. Pour simplifier, nous négligerons la masse des roues, la résistance de l'air et la résistance au roulement. Le système considéré est défini par la moto et le conducteur. Les forces extérieures sont les frottements secs, les réactions normales de la route et le poids.

Equations du mouvement

$$\begin{cases} Ma_G = \mathbf{F}_A + N_A + \mathbf{F}_B + N_B + Mg \\ \frac{d}{dt} \mathbf{L}_G = \mathbf{GA} \wedge (\mathbf{F}_A + N_A) + \mathbf{GB} \wedge (\mathbf{F}_B + N_B) \end{cases}$$

Loi de Coulomb (absence de glissement)

$$\begin{cases} |\mathbf{F}_A| \leq \mu_s^A N_A & \text{si } \mathbf{v}_A = 0 \\ |\mathbf{F}_B| \leq \mu_s^B N_B & \text{si } \mathbf{v}_B = 0 \end{cases}$$

Absence de culbute (= contact des roues sur la route)

$$z_G = h \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_G = (\mathbf{L}_G)_{A_G} = 0.$$

(car nous avons supposé la masse des roues négligeable).

Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\begin{cases} 0 = N_A + N_B - Mg \\ Ma_G = F_A + F_B \\ 0 = N_A \ell_A + h(F_A + F_B) - N_B \ell_B \end{cases}$$

d'où

$$Ma_G = \frac{1}{h} (N_B \ell_B - N_A \ell_A)$$

et

$$a_G = \frac{1}{h} \left[ \frac{N_B}{M} (\ell_A + \ell_B) - \ell_A g \right]$$

L'équation précédente, qui fait intervenir la géométrie de la moto, exprime la réaction normale  $N_B$  (et  $N_A = Mg - N_B$ ) en fonction de l'accélération. Faudrait mettre tout ça sur slide et simplifier rapido les équations du mvt en barrant les trucs sur slide, c'est à partir de mtn que c'est intéressant

Accélération (roue arrière motrice) : Ayant supposé la masse des roues négligeable ( $L_C = 0$ ), nous avons pour la roue avant (roue porteuse)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_C = \mathbf{C} \mathbf{A} \wedge \mathbf{F}_A = 0$$

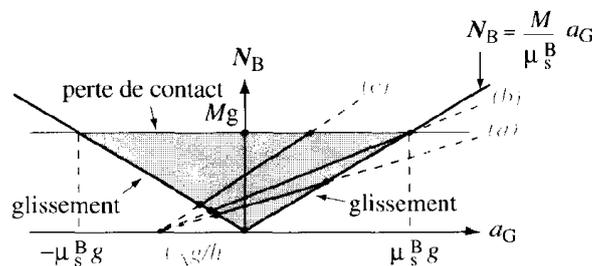
(C = centre de la roue avant) ce qui implique  $F_A = 0$ . Les équations du mouvement sont ainsi

$$\begin{cases} M a_G = F_B \\ a_G = \frac{1}{h} \left[ \frac{N_B}{M} (\ell_A + \ell_B) - \ell_A g \right] \end{cases}$$

avec les conditions  $0 \leq N_B \leq Mg$  (contact des roues sur le sol)

$$-\mu_s^B N_B \leq F_B = M a_G \leq \mu_s^B N_B$$

(roulement sans glissement).



**Fig. 12.31** Réaction normale sur la roue arrière en fonction de l'accélération pour différentes géométries : (a)  $\ell_B > \mu_s^B h$  ; (b)  $\ell_B = \mu_s^B h$  ; (c)  $\ell_B < \mu_s^B h$ . La région hachurée est celle où il n'y a ni glissement ni perte de contact des roues sur la route.

Comme nous le voyons sur la figure 12.31, l'accélération maximale correspond à  $N_B = Mg$  (tout le poids est sur la roue arrière) et  $a_G = g\ell_B/h = \mu_s^B g$  implique

$$\mu_s^B = \ell_B/h, \quad a_G^{\max} = g\ell_B/h$$

Par ailleurs, la figure 12.31 conduit aux résultats suivants :

- si  $\ell_B > \mu_s^B h$  (centre de gravité bas, courbe a), l'accélération maximale est déterminée par  $N_B$ , c'est-à-dire par la limite d'adhérence ;
- si  $\ell_B < \mu_s^B h$  (centre de gravité haut, courbe c), l'accélération maximale correspond à  $N_B = mg$ ,  $N_A = 0$ , et l'on est à la limite de la culbute où la roue avant décolle.

### Remarques

- L'accélération maximale au départ n'est pas limitée par le moteur mais par la force de frottement maximale : au départ, il n'est pas possible d'utiliser le couple moteur maximal, sinon les roues motrices perdent l'adhérence.
- La traction maximale que peut fournir un véhicule autopropulsé est proportionnelle au poids porté par les roues motrices et au coefficient de frottement. D'où l'intérêt des voitures à 4 roues motrices, de l'introduction de pneus sur les métros et de l'accouplement des roues d'une locomotive par des bielles.

## 3 Applications

### 3.1 Le collé-glissé

☞ Andreotti p.24 ou direct leçon de PASCAL ya tout



## Stick-slip

⚡ MP surfaces et interfaces



On constate un effet de seuil. On tire un bloc de bois sur une plaque avec une force constante. On s'aperçoit que le mouvement est saccadé. Puisque les lois de Coulomb sont intrinsèquement à seuil, on pressent qu'on va pouvoir décrire ce phénomène.

**Démarche** **Condition initiale** A l'instant  $t = 0$ , le ressort est au repos (allongement nul) et le patin à la position  $X = 0$ . On commence alors à tirer l'extrémité du ressort à la vitesse constante  $V$ . L'allongement du ressort est alors  $\epsilon = Vt - X(t)$

**Phase de collé** On formule l'hypothèse de non-glissement : le patin est à l'arrêt. Le patin est à l'arrêt. L'allongement du ressort est  $\epsilon = Vt - X(t) = Vt$ . L'hypothèse d'arrêt n'est valable tant que la tension  $F_T$  n'atteint pas la force critique  $F_{T_c} = \mu_s F_N$ . Cette force critique est atteinte à l'instant  $t_1 = \mu_s F_N / (KV)$ .

**Phase de glissé** On formule l'hypothèse de glissement : le patin est en mouvement. Le patin glisse et la force de friction est égale à  $R_T = \mu_d F_N$ . L'équation de la dynamique s'écrit alors

$$m\ddot{X} = K\epsilon - \mu_d F_N$$

ce qui s'écrit en terme d'allongement

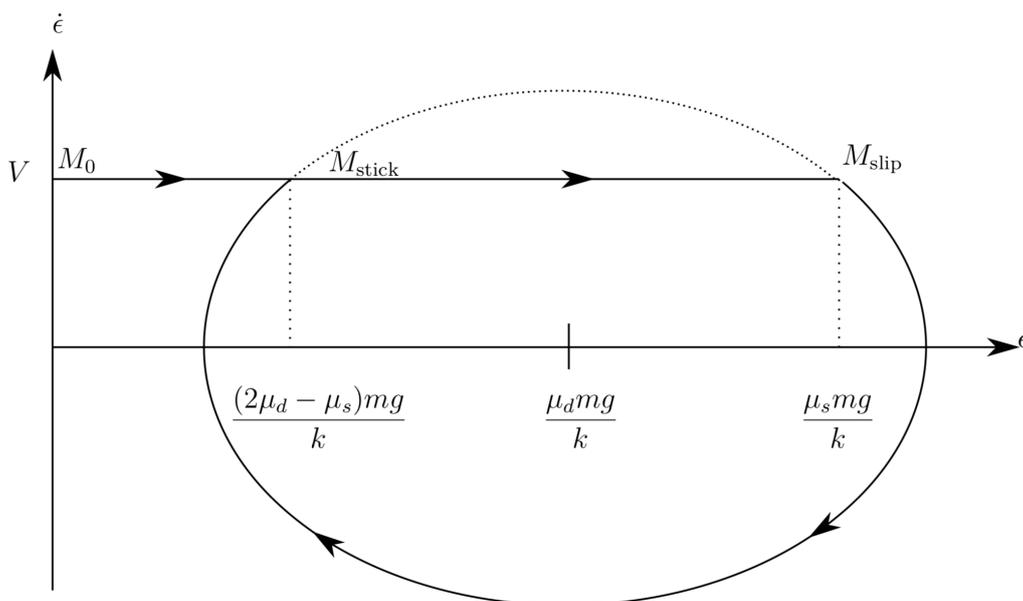
$$\ddot{\epsilon} + \frac{K}{m}\epsilon = \frac{\mu_d}{m}F_N$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique. L'allongement  $\epsilon$  oscille donc à la fréquence  $\sqrt{K/m}$  autour de la valeur  $\mu_d mg / K$ . Lors de cette oscillation le patin va repasser par la vitesse nulle (lorsque  $\dot{\epsilon} = V$ ), et le système est alors renvoyé à la phase de collé.

**Description du mouvement** Le mouvement résultant est donc une succession d'étapes "collées" où le patin est à l'arrêt et où le ressort s'allonge, et d'étapes "glissées" où le patin avance. Se référer à la courbe de la manip of course.

On a là un exemple typique de phénomène non linéaire, puisque une oscillation apparaît alors que le forçage est constant dans le temps. De plus, l'oscillation est non-harmonique dite de relaxation. Cette non-linéarité provient de la non-linéarité de la loi de Coulomb, qui contient intrinsèquement un seuil dans sa formulation.

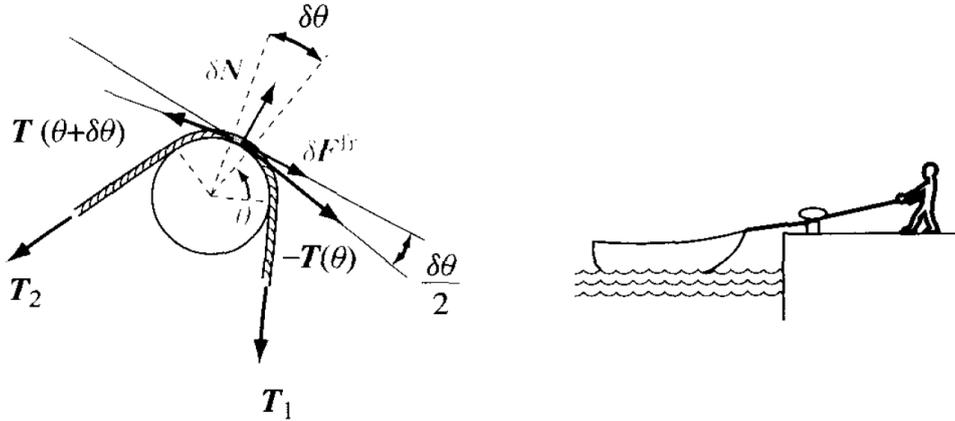
**Portrait de phase** Portrait de phase On dessine le portrait de phase. Bilan d'énergie L'aire du cycle donne l'énergie dissipée par frottement par cycle.



### 3.2 Corde sur une poulie : limite du modèle

➤ Gruber p. 343, Olivier p. 206.

Dépendance des frottements avec la surface. Petite expérience avec un fil enroulé autour d'un bâton, d'un côté une masse, de l'autre on tire et on mesure  $F_c$  telle qu'il y ait mouvement. On change le nombre de tours et on montre que c'est exponentiel. (expérience de l'enroulement d'un fil autour d'un bâton avec une bouteille et une clé à molette de chaque côté?)



Un câble souple (de masse négligeable) est enroulé autour d'un cylindre immobile. Calculons les tensions  $T_1, T_2$  aux extrémités de câble quand il y a imminence de glissement

Soit  $T(\theta)$  la tension de la corde en  $\theta$  (= force exercée par la partie  $\theta' > \theta$  sur la partie  $\theta' \leq \theta$ ). Considérons la portion de câble entre  $\theta$  et  $\theta + \delta\theta$  et posons  $T(\theta + \delta\theta) = T(\theta) + \delta T$ ; désignons par  $\delta F^{\text{fr}}(\theta), \delta N(\theta)$  la force de frottement et la réaction normale sur la portion considérée. Dans le cas statique, la somme des forces agissant sur la portion de câble doit être nulle, d'où de la statique  $\delta F^{\text{fr}} + T(\theta + \delta\theta) - T(\theta) + \delta N = 0$  soit, en projetant sur les axes  $(e_r, e_\theta)$ ,

$$\begin{cases} \delta N - (T + \delta T) \sin \frac{\delta\theta}{2} - T \sin \frac{\delta\theta}{2} = 0 \\ \delta F^{\text{fr}} + (T + \delta T) \cos \frac{\delta\theta}{2} - T \cos \frac{\delta\theta}{2} = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \delta N = 2T \sin \frac{\delta\theta}{2} + \delta T \sin \frac{\delta\theta}{2} \\ \delta F^{\text{fr}} = -\delta T \cos \frac{\delta\theta}{2} \end{cases}$$

Par continuité de  $T(\theta)$  nous avons

$$\lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta F^{\text{fr}}}{\delta N} = -\frac{1}{T} \frac{dT}{d\theta}$$

et, à l'imminence de glissement,  $\delta F^{\text{fr}} = \pm \mu_s \delta N$ . On obtient ainsi

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{d\theta} = \pm \mu_s$$

et, par intégration de  $\theta_1$  à  $\theta_2$ ,

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \pm \mu_s (\theta_2 - \theta_1)$$

où  $\theta_2 - \theta_1$  est l'angle de contact du câble sur la poulie. En conséquence, dans le cas statique, on a l'inégalité

$$e^{-\mu_s(\theta_2 - \theta_1)} \leq \frac{T_2}{T_1} \leq e^{\mu_s(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$e^{-\mu_s(\theta_2 - \theta_1)} \leq \frac{12}{m} \leq e^{\mu_s(\theta_2 - \theta_1)} \quad (\text{avec } [\theta] =$$

radian). Dans le cas où le câble glisse sur la poulie, nous obtenons de façon similaire  $T_2 = e^{\pm \mu_c(\theta_2 - \theta_1)} T_1$

En conclusion, le rapport des tensions aux extrémités croît exponentiellement avec l'angle de contact et ne dépend pas du rayon.

Par exemple, pour  $\mu_s = 0,5$  et  $\theta = 3\pi$  (= 1,5 tour), on a  $T_2 = 112T_1$ , pour  $\theta = 5\pi$  (= 2,5 tours), on a  $T_2 = 2576T_1$

Olivier p. 206 : Bien souvent, les frottements surfaciques sont difficiles à traiter. Il faudrait considérer chaque point de contact, une force normale  $dN$  et en déduire la force tangentielle locale avec le coefficient de frottement local. Donc on voit bien que c'est compliqué. Souvent, on considère des liaisons parfaites : la force tangentielle est négligée. En pratique, cela est le cas pour des roulements à billes.