

27 juin 2020

LP02 - Gravitation

Gauthier Legrand et Francis Pagaud

27 juin 2020

Bibliographie

- Mécanique PCSI-MPSI, **Brébec** (Hprepa) chapitre 7 tip top
- Mécanique PCSI-MPSI, **Brasselet** chapitre 8
- Mécanique, **Pérez** chapitre 6
- Physique tout-en-un, **Salamito** (Dunod) chapitre 20
- Mécanique 1, **Feynman** chapitre 7
- Mécanique 1, **BFR** (je n'avais pas la ref mais apparemment bien pour la troisième partie, vers page 171)
- <http://www.astronoo.com/fr/articles/points-de-lagrange.html> pour les points de Lagrange
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Point_de_Lagrange pour les points de Lagrange
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Lois_de_Kepler pour la démonstration de la loi des périodes dans le cas des ellipses

Pré-requis :

- lois de Kepler (lycée)
- électrostatique : théorème de Gauss
- mécanique du point

Table des matières

1	Notion de gravitation	2
1.1	La loi de Newton	2
1.2	Champ gravitationnel	3
2	Analogie électrostatique	4
2.1	Similitudes	4
2.2	Limites	5

3 Interactions entre plusieurs corps	5
3.1 Trajectoires possibles	5
3.2 Points de Lagrange	6

(F) : Une alternative pour une leçon de 30 minutes : I/ Notion de gravitation, 1) La loi de Newton. Elle se déduit des lois de Kepler, blabla. On a ensuite mesurer $\mathcal{G}$. 2) Champ gravitationnel. L'intégrale est compliquée, faisons une analogie. II/ Analogie électrostat. 1) Similitudes, 2) Limites. On comprend tout, mais il faut aller plus loin pour inclure des petites corrections (erreurs de 1% pour la troisième loi de Kepler) : les marées. III/ 1) Phénomène des marées. 2) Conséquences : une Terre non sphérique donne une correction quadripolaire, cf. le Pérez de méca ch. 6. Mais pour le faire il faudrait des ODG, réalisable via les moments d'inertie trouvables [ici, p. 4](#). On peut également sortir [ce py sur les marées](#). (en vrai c'est plutôt la rotation de la Terre qui la déforme, pas les marées)

(F) J'ai changé d'avis en fait, on peut rester là-dessus, parler également de trajectoires de diffusion, comme pour l'expérience de Rutherford, faire le lien. Un point intéressant à évoquer : on peut également faire des développements multipolaires.

Remarques générales

Reste à faire

Commentaires du jury

2015

Introduction

Problématique :

1 Notion de gravitation

Ne pas oublier les hypothèses sous-jacentes ! A part l'hypothèse d'instantanéité, on a :
 $v \ll c$, sinon relativité restreinte. $r \gg \frac{Gm}{c^2}$ (rayon d'Einstein), sinon relativité générale.
 $d \gg h/p$, sinon mécanique quantique $\Delta l \gg \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}$ et $\Delta t \gg \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}$ (longueur et temps de Planck), sinon gravitation quantique relativiste.

1.1 La loi de Newton

Source : Feynman chapitre 7 et <https://fr.wikipedia.org/wiki/Gravitation#Histoire>

C'est l'une des quatre forces fondamentales, à longue portée, de faible amplitude et la première que l'on a découverte. Cette force a été intuitée par Newton par les résultats expérimentaux de Kepler

Sur slide montrer les lois de Kepler ?

Guillaume Laibe : La troisième loi de Kepler doit se retrouver/commenter par une analyse aux dimensions ! On peut utiliser le fait que cette relation est une loi de puissance (qui traduit que le problème admet une invariance d'échelle), pour l'écrire sous une forme qui permette de faire des applications rapides pour le système Solaire

$$T \simeq 1 \text{ an} \left(\frac{a}{1 \text{ UA}} \right)^{3/2}$$

où 1 UA (unité astronomique) correspond à une fois la distance Soleil-Terre ($\sim 1,5 \times 10^8 \text{ km}$) Par exemple, Eq. 1 permet d'estimer simplement la période orbitale de Jupiter située à $\sim 5 \text{ UA}$ du Soleil ($T \sim 12 \text{ ans}$) ou encore la période de l'hypothétique planète 9 située à $\sim 500 \text{ UA}$ $T \sim 10000 \text{ ans}$)

La loi de Newton s'écrit $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

qui vérifie le principe des actions réciproques, dirigée de sorte à ce qu'elle soit toujours attractive.

Donner des ODG : Terre sur moi, moi et membre du jury (lol on a une faible attraction l'un vers l'autre en fait)

On peut parler de masse gravifique/inertielle. <https://youtu.be/E43-CfukEgs>

Cette loi fondée sur des faits expérimentaux semble bien marcher, encore faut-il pouvoir mesurer la constante de gravitation $\mathcal{G}$. C'est ce qu'a permis l'expérience de Cavendish en réalité $\mathcal{G}$ a été introduite bien après l'expérience, Cavendish voulait mesurer la masse de la Terre en comparant le ratio de la force trouvée dans son expérience avec celle de la Terre sur la gravité.

Sur slide : présenter l'expérience https://en.wikipedia.org/wiki/Cavendish_experiment y a pas mal de détails historiques, à lire mais pas à dire

Pour montrer que c'est pas un quelque chose de mystique : <https://www.youtube.com/watch?v=MbucRPiL92Q> des morceaux pas mal notamment le passage en accéléré

En utilisant ces données on trouve $\mathcal{G} = 6,74 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, à 1 % près de la valeur trouvée aussi aujourd'hui Y a pas mal de techniques pour mesurer cette constante, mais le dernier groupe à l'avoir fait le plus précisément en 2018 utilise aussi des pendule de torsion... <https://www.techexplorist.com/physicists-precise-measurement-ever-gravitys-strength/16643/> trouvé dans la page wiki https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_constant

Transition : Comment appliquer cette force dans ces cas plus compliqué que des masses ponctuelles ?

1.2 Champ gravitationnel

Source :

Un outil pratique pour les calculs dynamiques c'est le champ gravitationnel, tel qu'une masse m en un $\vec{r}$ subisse la force $\vec{F} = m\vec{G}(\vec{r})$

On somme les contributions de chaque élément de masse

Sur slide : $\vec{F} = -\mathcal{G}m \sum_i m_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3} \rightarrow -\mathcal{G}m \iiint \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d^3\vec{r}'$

On identifie alors $\vec{G}(\vec{r}) = -\mathcal{G} \iiint \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d^3\vec{r}'$

Dans l'hypothèse d'une Terre sphérique on peut calculer le champ à la surface de la Terre : $\vec{G}(\vec{r}) = -\mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} \vec{u}_r$ à rapprocher de $\vec{P} = m\vec{g}$.

On fait l'AN au niveau du pôle (pour éviter de prendre en compte la force centrifuge) : on trouve $g = 9,83 \text{ m.s}^{-2}$. La valeur n'est pas la même ici à Lyon à cause de la force centrifuge, dont on parlera plus tard

On peut d'ailleurs retrouver l'expression de l'énergie potentielle à une altitude h en faisant un DL.

Transition : Calculer cette intégrale c'est compliqué et il faut souvent avoir recours à des méthodes numériques, il y a en fait plus malin

2 Analogie électrostatique

2.1 Similitudes

Source :

Sur slide tableau avec les analogies

	Électrostatique	Gravitation
$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$	$q_1 q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{4\pi\epsilon_0 \ \vec{r}_1 - \vec{r}_2\ ^3}$	$-\mathcal{G}m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\ \vec{r}_1 - \vec{r}_2\ ^3}$
Charge	q	m
Champ	$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 \ \vec{r} - \vec{r}'\ ^3} d^3\vec{r}'$	$\vec{G}(\vec{r}) = -\mathcal{G} \iiint \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\ \vec{r} - \vec{r}'\ ^3} d^3\vec{r}'$

Par analogie avec l'électrostatique on a donc $\text{div } \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho$ et $\text{rot } \vec{G} = \vec{0}$

Équivalent d'un champ $\vec{B}$ pour la gravitation si la densité de masse évolue au cours du temps ?

On a alors le théorème de Gauss qui simplifie grandement le calcul des intégrales pour le champ gravitationnel.

On fait l'exemple pour une masse sphérique de densité qui ne dépend que de r (pour avoir la symétrie sphérique). **faut-il détailler les calculs sachant que ça a déjà été vu en électrostatique pour le cas d'une densité constante**

- étude des symétries : $\vec{G}(\vec{r}) = G(r)\vec{u}_r$
- à l'extérieur seule la masse totale compte quelle que soit $\rho(r)$: on peut considérer la distribution ponctuelle
- à l'intérieur on suppose une densité constante pour simplifier
- tracer le graphe $G(r)$

Sur l'énergie potentielle d'un volume massique

- énergie potentielle d'une distribution avec le facteur 1/2 : il faut dans ce cas introduire le potentiel gravitationnel $\overrightarrow{\text{grad}} \phi = -\vec{G}$
- sinon on peut faire le calcul comme en prépa où on ajoute des calottes sphériques petit à petit pour trouver le préfacteur -3/5

À partir de cette expression on voit que les objets les plus stables sont les plus denses. On peut se demander alors en combien de temps un objet s'effondre s'il n'est soumis qu'à son propre poids et qu'on néglige tout autre force

Un rapide PFD donne pour un point à la surface de l'astre $\frac{d^2r}{dt^2} = -\mathcal{G} \frac{M_{int}}{r^2}$ donc en

ODG : $\tau_{eff} = \sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}M_{int}}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}\rho}} \simeq 10^3\text{s}$ pour le Soleil. Il faut évidemment prendre en compte d'autres interactions qui le stabilisent, notamment la pression du plasma / gaz dans l'étoile.

Transition : Cette analogie n'est pas strictement parfaite et il convient de montrer ses limites

2.2 Limites

Source :

- La grosse différence est l'inexistence de masse négative. La force gravitationnelle est donc toujours attractive, ce qui explique l'effondrement gravitationnel et la nécessité de la force nucléaire forte pour la stabilité des noyaux.
- ODG : l'interaction entre les deux plus petites charges qu'on puisse faire est $F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$, imaginons que ce soit des protons alors l'interaction gravitationnelle est $F_g = \mathcal{G} \frac{m_p^2}{d^2}$. Donc le rapport des forces est $\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \mathcal{G} m_p^2} \simeq 10^{xx}$
- On peut aussi comparer des forces entre solides non chargés et voir que c'est toujours les interactions électrostatiques qui dominent : interaction de Van der Waals **ref?** (Petit calcul à faire pour l'expérience en vidéo ? C2005 ?)
- principe d'équivalence : la masse se simplifie pour la gravitation seule mais pas pour Coulomb seul
- c'est seulement de l'électrostatique on a toujours $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{G} = \vec{0}$ et si la densité dépend du temps ?

Transition : Nous avons donc compris comment formuler l'interaction gravitationnelle pour un corps dans un champ de gravité, voyons ce qu'il en découle sur la dynamique des corps massiques dans de tels champs

3 Interactions entre plusieurs corps

3.1 Trajectoires possibles

Source : Brasselet page 221 + bouquin de prépa (Salamito page 763 par ex)

Deux possibilités (suivant le temps et l'envie) :

- On considère le Soleil et la Terre, on se place dans le référentiel barycentrique supposé galiléen. Dans ce cas-là on doit prendre en compte la masse réduite et c'est un peu relou, mais plus rigoureux et on simplifie $\mu \simeq M_T$ car $M_S \gg M_T$
- on fait l'approximation que le Soleil est fixe et on considère le référentiel héliocentrique (de Kepler) comme galiléen

On donne alors les équations dans le référentiel galiléen choisi

- TMC : trajectoire dans un plan et constante des aires $\mathcal{C} = r^2 \dot{\theta}$
- conservation énergie : $E = cte = \frac{1}{2} M_T (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + Ep(r)$
- $Ep_{eff}(r) = \frac{M_T \mathcal{C}^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G} M_T M_S}{r}$

Résolution graphique : on parle des états de diffusions, des états liés, de la nécessité d'avoir des ellipses.

Vitesses cosmiques (attention c'est défini pour un satellite par rapport à la Terre) : Brasselet page 242

Mettre du python de partout

Transition : En réalité le satellite subit aussi le champ du Soleil, une étude de ce système met en évidence des points d'équilibre, qu'il est intéressant d'utiliser pour placer des satellites maintenant qu'on a compris comme les faire sortir de l'attraction terrestre

Pour la Lune cf Pérez ex 6.13 : on se place dans le référentiel géocentrique pour étudier la Lune donc les effets du Soleil sont négligeables pour l'étude de l'orbite lunaire autour de la Terre car l'attraction de la Terre est beaucoup plus grande que la différence des attractions du Soleil sur la Lune et la Terre

3.2 Points de Lagrange

Source : <http://www.astronoo.com/fr/articles/points-de-lagrange.html>

Sur slide montrer les 5 points de Lagrange (vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=Gu4vA2ztgGM> 3 min ou <https://www.youtube.com/watch?v=2LjGgJ4ST60> 1 min avec de la 3D dégueu) : ce sont des points d'équilibre, sur lesquels une masse peut rester fixe par rapport aux autres

Déjà les points sont nécessairement dans le plan de l'orbite car les forces ramènent toujours les astres dans ce plan.

On se place dans un référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen centré sur le Soleil dont un axe pointe vers la Terre, un autre dans une direction perpendiculaire au plan de l'orbite terrestre, et le dernier orthogonal aux deux autres. Concrètement c'est un référentiel qui tourne à la vitesse ω a priori non constante.

On note $\vec{R}_T$ la position de la Terre et $\vec{r}$ la position du point courant dont on cherche à déterminer les positions d'équilibre. On veut qu'une masse en un point de Lagrange soit fixe dans le référentiel $\mathcal{R}'$, donc son accélération doit y être nulle. Pour simplifier alors l'étude on va considérer l'orbite terrestre circulaire autour du Soleil ($e \simeq 0,02$ d'après https://fr.wikipedia.org/wiki/Excentricit%C3%A9_orbitale)

Sinon faut prendre en compte les forces d'inertie

$$\vec{F} = -m\vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} - m \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} - m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M})$$

On suppose négligeable que les interactions masse vers Soleil ou Terre sont négligeables devant

Il est utilisé par les scientifiques car c'est un point col donc instable : les astéroïdes ne s'y agrègent pas comme pour L_4 et L_5 . Comme c'est un point instable il faut quand même réussir à bouger le satellite pour le remettre sur ce point de temps en temps.

Transition :

Conclusion

Ouvertures possibles :

Commentaires pendant la prépa aux oraux

- "Il est important de montrer que l'on maîtrise précisément les concepts fondamentaux de mécanique en distinguant au moins une fois centre de masse (barycentre des masses) et centre de gravité (point d'application de la résultante de gravité). Dans le cas d'un champ homogène, les deux points sont confondus. À l'exception de rares cas (effets de petites oscillations sur des satellites), cette approximation marche très bien en pratique."
- En électromagnétisme une charge interagit avec son propre champ via la force d'Abraham-Lorentz. Équivalent en gravitation ? Et d'un point de vue RG ça semble évident qu'un objet massif sent la courbure qu'il induit sur l'espace-temps, mais c'est beaucoup moins flagrant en classique : est-ce une des limites de la théorie classique ?
- on dit souvent qu'on peut utiliser le théorème de superposition, mais quand on fait le PFD l'équation n'est pas linéaire, on ne devrait pas pouvoir le faire non ?
- Masse inerte et masse grave : pourquoi on ne peut pas dire que les deux sont égales quitte à changer $\mathcal{G}$? Ça revient à supposer que les deux masses sont proportionnelles, a priori c'est une fonction plus compliquée. (?)
- force centrale = force uniquement radiale.
- force centrale newtonienne = force uniquement radiale et en $1/r^2$
- limite gravitation classique : https://fr.wikipedia.org/wiki/Tests_exp%C3%A9rimentaux_de_la_relativit%C3%A9_g%C3%A9n%C3%A9rale
- principe d'équivalence https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_d%27%C3%A9quivalence
- pesanteur, impesanteur, microgravité, zero-g ? BUP 963 "Impesanteur et gravité" et BUP 700 (1) "Phénomène d'impesanteur"
- Un vidéo marrante : <https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs&feature=youtu.be>

Questions

Lors de la construction de la force, on l'a construit avec la masse inertielle apparaissant dans la seconde loi de Newton, alors pourquoi revenir dessus en disant que ce n'est pas la bonne masse ? On a jugé important de revenir sur cette notion de masse grave dont le rôle semble s'opposer à la masse inertielle et pourtant on les prend égales. Cette notion est importante quand on parle de gravitation.

C'est quoi l'ordre de grandeur de la force que la Terre exerce sur toi (par exemple) ? On a fait quelques calculs, la force qu'exerce la Terre sur moi est de l'ordre de la centaine de Newton. La force que j'exerce sur l'ordinateur est elle de l'ordre de 10^{-9} N.

C'est quoi la relativité générale ?

C'est quoi une onde gravitationnelle ? On peut utiliser la définition d'une onde (propagation d'une perturbation). Une onde gravitationnelle est donc une perturbation du champ gravitationnel qui se propage dans l'espace.

Comment on la mesure ? On peut la mesurer avec un interféromètre de Michelson géant.

Peux tu revenir sur l'importance du rapport entre de $\mathcal{G}$ et $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$?

Prenons l'exemple du champ électrostatique induit par un électron immobile. Pour que l'intensité du champ gravitationnel soit le même que l'électrostatique, il faudrait que l'électron ait une masse de 100 kg

Dans l'exemple de la cavité tu considère la masse volumique uniforme, est ce le cas ? Non la terre n'est pas uniforme en masse, le noyau est bien plus lourd que les couches extérieures, on l'a supposé pour avoir des arguments de symétries également dans la cavité. En as tu vraiment besoin ? Oui puisque la seconde cavité est excentrée. En fait, on pourrait dire que si la taille caractéristique des variations de ρ est petites devant la taille de la cavité, on peut en prendre la valeur moyenne dans l'intégrale de Gauss pour simplifier le calcul, mais dans ce cas ce ne sera pas la même masse volumique moyenne qu'on a avec la première intégrale, donc pour avoir la simplification des vecteurs et avoir un champ uniforme on en a besoin

Quelle est la charge gravitationnelle ? Quel principe lui est liée ? A quel ordre est-il actuellement vérifié ? (Masse grave égale à la masse inerte d'après le principe d'équivalence. Universalité de la chute libre. Vérifié à l'heure actuelle à 10^{-13})

**Quel est la force à l'intérieur d'un astre homogène à symétrie sphérique ?
Champ dans une cavité interne ? Comment cela est-il utilisé ?**

(Force linéaire en la distance, champ constant dans une cavité interne. Utilisé pour faire de la gravimétrie, recherche de gisement de pétrole, archéologie)

Validité du théorème de Gauss ? Équations locales du champs ?

Si le Soleil disparaissait, quel serait le mouvement de la Terre ? Cela ce ferait-il de manière instantanée ?

(Mouvement rectiligne uniforme instantanément d'après Newton, en contradiction avec la relativité. Propagation du champ à une vitesse limite c , 8 minutes environ entre la Terre et le Soleil)

Qu'est ce qu'une onde gravitationnelle ? Quel événement à donné lieu à l'observation récente des signaux d'onde gravitationnelles par LIGO ?

(Une onde gravitationnelle est une faible déformation de l'espace-temps, similaire à une onde à la surface de l'eau. Coalescence de deux trous noirs.

Qu'est ce qu'un trou noir ? (Région localisée de l'espace-temps de laquelle rien pas même la lumière ne peut s'échapper.)

La lumière est-elle influencée par la gravitation ? (Déviation des rayons lumineux, même en théorie newtonienne (prédit une valeur deux fois trop faible).)

Comment un être humain peut-il savoir si c'est la Terre qui tourne autour du Soleil ou l'inverse ? En regardant le mouvement des autres planètes dans le ciel (e.g. le mouvement apparent rétrograde de Mars).

Connaissez-vous une conséquence de la conservation du vecteur de Runge-Lenz en mécanique quantique ? Les niveaux d'énergie de l'hydrogène sont dégénérés en $n + 1$, ce qui explique les règles de Klechkowski.

Quelles doivent être les propriétés des algorithmes numériques utilisés pour calculer la trajectoire des planètes ? Ils doivent conserver l'énergie à la précision de la machine, ce qui assure la stabilité du schéma aux grands temps.

Pourquoi les planètes du Système Solaire sont-elles à peu près dans un même plan ? Le Soleil s'est probablement formé lors de l'effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz en rotation contenant des grains de silicates de taille micronique. Par conservation du moment angulaire, un disque protoplanétaire se forme autour de l'étoile, dans un plan orthogonal au vecteur rotation de l'étoile. Les inclinaisons des orbites des grains de poussière par rapport au plan du disque sont rapidement amorties par friction des grains sur le gaz : les embryons des coeurs planétaires sédimentent dans le plan médian du disque avant de coaguler pour former des planètes.