Correction LP2 : Gravitation

Agrégation de physique – 2017-2018
Hervé Gayvallet - Guillaume Laibe

1 Remarques générales

- Introduire les lois de la gravité par analogie avec l'électrostatique est pédagogiquement discutable : on est en droit de se demander pourquoi on ne fait pas par exemple l'analogie avec le champ magnétique. Une approche plus fondamentale consiste à donner les équations sur la divergence et le rotationnel du champ de gravité (éventuellement, mentionner l'analogie électrostatique en corollaire).

- Il est important de ne **pas** supposer une densité homogène (i.e. $\rho = \rho_0$ =cste) pour calculer $\mathbf{g}$ à **l'extérieur** d'un astre sphérique homogène et isotrope (c'est d'ailleurs une très mauvaise approximation en pratique, $\rho(r)$ étant plus grand au centre de l'astre). *Quelle que soit* $\rho(r)$, le théorème de Gauss assure qu'à l'extérieur d'un tel astre, le champ de gravitation est en $1/r^2$.

- Ainsi, on n'a pas besoin de supposer que *l'étoile* est ponctuelle pour déterminer le mouvement d'une planète peu massive autour d'elle. C'est la *planète* que l'on suppose ponctuelle au premier ordre (i.e. le système auquel on va appliquer le PFD). En négligeant l'extension spatiale de la planète, on néglige le rôle des forces de marées.

- La méthode du potentiel effectif permet d'étudier certaines propriétés du mouvement pour un champ de force central. On ne doit toutefois pas oublier que le mouvement reste 2D : il existe une énergie cinétique orbitale ($ml^2/2r^2$) !

- Lorsque l'on étudie la nature des trajectoires dans le champ de force en $1/r^2$, il est important de ne pas représenter que des ellipses, mais aussi des mouvement de diffusion hyperboliques (on peut éventuellement évoquer le traitement classique de l'expérience de Rutherford). Le potentiel effectif étant paramétré par le moment cinétique, l'étude du comportement du sytème selon les conditions initiales est à mener avec prudence).

- Dans un schéma illustrant la deuxième loi de Kepler, les aires balayées en un même intervalle de temps doivent être identiques à l'apoastre et au périastre (e.g. Fig. 1). On peut se servir d'un tel schéma pour expliquer que la mise en orbite d'un satellite est plus facile au périastre, où la vitesse relative de la planète par rapport à l'étoile est la plus grande.

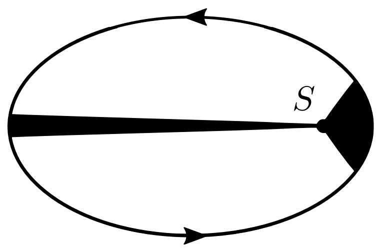

FIGURE 1 – Représentation schématique d'une vitesse aréolaire constante sur une orbite elliptique.

- Il faut connaître le théorème de Bertrand : les seules forces centrales qui admettent des orbites fermées sont les forces en $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}/r^3$.

- La nature fermée de la trajectoire pour la force en $1/r^2$ est liée à la conservation du vecteur de Runge-Lenz $\mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - k\mu\mathbf{e}_r$ (on utilise parfois le vecteur excentricité $\mathbf{e} \equiv \mathbf{A}/k\mu$).

- Il est important de montrer que l'on maîtrise précisément les concepts fondamentaux de mécanique en distinguant au moins une fois centre de masse (barycentre des masses) et centre de gravité (point d'application de la résultante de gravité). Dans le cas d'un champ homogène, les deux points sont confondus. À l'exception de rares cas (effets de petites oscillations sur des satellites), cette approximation marche très bien en pratique.

- La troisième loi de Kepler doit se retrouver/commenter par une analyse aux dimensions ! On peut utiliser le fait que cette relation est une loi de puissance (qui traduit que le problème admet une invariance d'échelle), pour l'écrire sous une forme qui permette de faire des applications rapides pour le système Solaire
$$T \simeq 1\,\mathrm{an} \left(\frac{a}{1\mathrm{UA}}\right)^{3/2}, \tag{1}$$
où 1 UA (unité astronomique) correspond à une fois la distance Soleil-Terre ($\sim 1,5 \times 10^8$ km). Par exemple, Eq. 1 permet d'estimer simplement la période orbitale de Jupiter située a $\sim$ 5UA du Soleil ($T \sim 12$ ans) ou encore la période de l'hypothétique planète 9 située a $\sim$ 500UA ($T \sim 10000$ ans).

- Plus généralement, cette leçon doit être absolument illustrée par des ordres de grandeur. Pour le Système Solaire, on peut évoquer des objets plus exotiques que les planètes habituelles, comme les satellites, les comètes ou l'hypothétique planète 9. Les planètes extra-solaires ($\sim$ 4000 détectés) ont des propriétés orbitales très différentes des planètes de notre Système Solaire (cf. le site de référence : www.exoplanet.eu). On peut aussi commenter la dynamique des d'étoiles binaires (e.g. Kepler 16, système où orbite la première planète similaire à « *Tatooine* »), ou des étoiles autour du trou noir super-massif Sagittarius A*
(e.g. https ://www.youtube.com/watch ?v=duoHtJpo4GY), pour lesquelles les vitesses orbitales sont les plus grandes connues dans l'univers (i.e. $\sim 2-3\%$ de c).

- Il ne faut pas oublier que le théorème de Gauss est une équation scalaire. Ce sont les invariances et les symétries qui donnent les informations complémentaires manquantes pour avoir l'information complète sur le vecteur $\mathbf{g}$. Au niveau local, le théorème de Gauss donne l'information sur $\nabla \cdot \mathbf{g}$. Les invariances et symétries assurent $\nabla \times \mathbf{g} = 0$, ce qui assure que $\mathbf{g}$ dérive d'un potentiel.

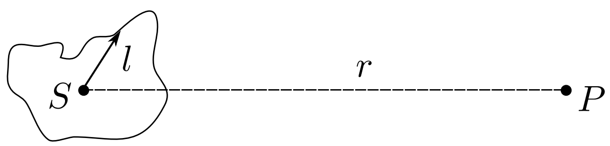

Figure 2 – Distribution quelconque de masse : on effectue un développement multipolaire pour $r \gg l$.

- Le cas d'une distribution de masse quelconque est généralement compliquée (Fig. 2). Toutefois, en se plaçant à une distance r très supérieur à la taille caractéristique de la distribution l, on peut approximer $\mathbf{g}$ par la méthode du développement multipolaire, i.e.
$$\mathbf{g} = -\frac{\mathcal{G}M_{\mathrm{T}}}{r^2}\mathbf{e}_r + \frac{\mathbf{A}\,(r,\theta)}{r^4}l^2 + ... \tag{2}$$
Réduire le membre de droite de l'équation Eq. 2 à son premier terme (terme monopolaire) revient à traiter la distribution comme une masse ponctuelle. En incluant la correction d'ordre supérieur (terme quadrupolaire) permet par exemple d'inclure des déviations aux lois de Kepler. Note : il n'y a pas de terme dipolaire, car il n'existe pas de masse négative. On peut modéliser simplement une déviation à la répartition sphérique en superposant à une sphère une « haltère »de masse correspondant à l'excédant de masse aux pôles, ou en lui soustrayant un tore de matière parallèlement à l'équateur (pour raisonner à masse fixée).

Culturel : la mission Juno vient d'être lancée pour mesurer les moments multiploaires d'ordres élevés ($\sim$8-10) de Jupiter et essayer de contraindre sa structure interne.

- Pour un objet astrophysique quelconque, le champ gravitationnel n'est pas nécessairement radial. Par exemple, le potentiel gravitationnel typique d'une galaxie se met sous la forme canonique

$$\phi(r, z) = \rho \frac{v_0^2}{2} \ln\left[1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2 + \left(\frac{z}{q\, r_c}\right)^2\right], \quad (3)$$

avec $0 < q < 1$. Ainsi, la vitesse v de l'orbite circulaire à r en $z = 0$ s'écrit $v = \frac{r v_0}{\sqrt{r^2 + r_c^2}}$. En particulier, si $r \gg r_c$, $v \sim v_0$ (courbe de rotation plate, i.e. indépendantes de r, interprétée comme résultant de la contribution d'une source de matière invisible au potentiel galactique appelée *matière noire*).

2 Structure de la leçon

- Dans un premier temps, on dégagera les propriétés du champ gravitationnel dans le cadre de la mécanique classique. Même si on ne le dit pas, on se rappellera pour les questions que
  - $v \ll c$, sinon relativité restreinte.
  - $r \gg \frac{\mathcal{G}m}{c^2}$ (rayon d'Einstein), sinon relativité générale.
  - $d \gg h/p$, sinon mécanique quantique.
  - $\Delta l \gg \sqrt{\frac{\mathcal{G}h}{c^3}}$ et $\Delta t \gg \sqrt{\frac{\mathcal{G}h}{c^5}}$ (longueur et temps de Planck), sinon gravitation quantique relativiste.

  On commentera l'équivalence masse inertielle/masse gravitationnelle. On donnera les équations fondamentales sous forme locale et intégrale, en explicitant les propriétés de linéarité et d'instantanéité (cf. des éventuelles questions culturelles sur les ondes gravitationnelles et le prix Nobel 2017).

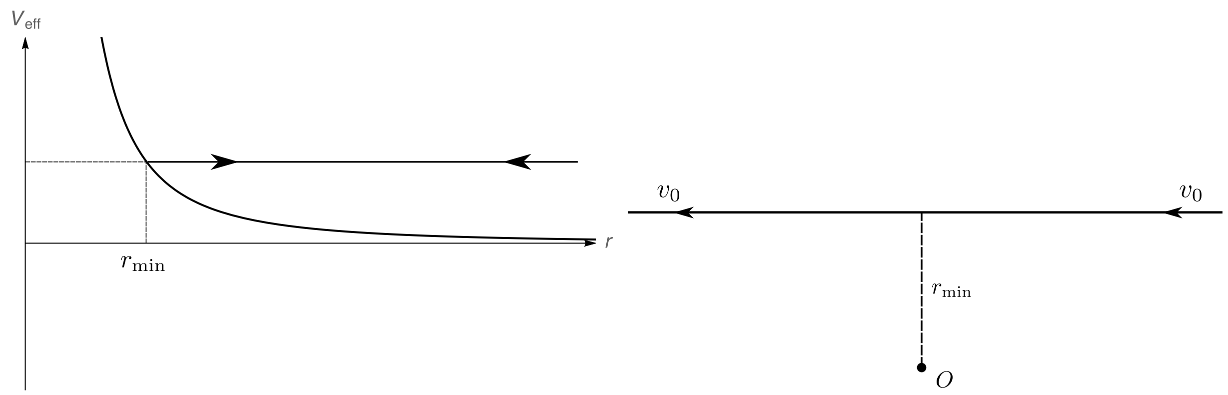

Figure 3 – Potentiel effectif et trajectoire d'une particule libre. La particule est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_0. La distance minimale d'approche par rapport à l'origine du repère dépend du moment angulaire l (constant).

- Dans un deuxième temps, on pourra traiter l'exemple du champ de force en $1/r^2$ (champ de gravité d'un astre à symétrie sphérique hors de l'astre). Dans l'ordre : le TMC permet de justifier une trajectoire planaire et la deuxième loi de Kepler. La conservation de l'énergie et le potentiel effectif permettent de distinguer des trajectoires libres et des trajectoires liées, selon que $E > 0$ ou non (Figs 3 – 4). Il est bon de rappeler et d'interpréter ce qu'est le potentiel effectif d'une particule libre et d'interpréter les deux types de trajectoire comme une compétition moment angulaire/gravité (que l'on retrouve à toute échelle dans l'Univers). La nature conique des trajectoires s'obtient ensuite en montrant explicitement le rôle de la dépendance en $1/r^2$ de la force. On peut ensuite contextualiser cette étude au mouvement des planètes. Il est bon d'en

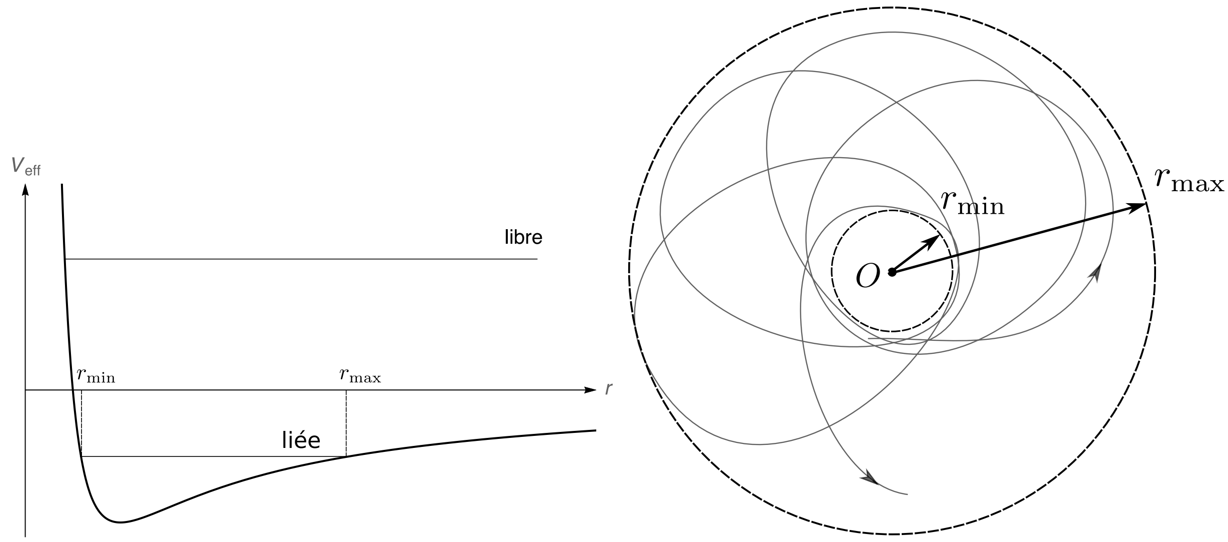

Figure 4 – Potentiel effectif et trajectoire *possible* d'une particule en orbite liée. À ce stade, il n'est pas possible de déterminer si l'orbite est fermée ou non.

rappeler les avantages, mais aussi les limitations (on néglige les perturbations dues aux autres planètes, cf la découverte de Neptune, les effets de taille finie des astres...)

- Enfin, on peut aller plus loin que le problème de Kepler. Un premier choix peut-être de regarder les effets de marées (d'ordre supérieur) dus à la taille finie de la planète. Dans ce cas, il faut commencer par définir *précisément* ce que sont les forces de marées : les forces ressenties i) sur un astre en orbite et ii) situé dans un champ de gravitation non homogène (les forces de marées mettent en jeu deux effets). Un ordre de grandeur des effets peut être obtenu par un calcul scalaire, mais l'expression *vectorielle* de la force permet de discuter l'existence de ~ 2 marées terrestres par jour, ou des effets de type vives eaux vs. mortes eaux.

  Cette partie n'a pas été traitée avec la clarté suffisante dans la leçon. Il est essentiel de bien préciser qu'il s'agit de l'équilibre global d'un objet étendu sous l'action de la pesanteur et de la force d'inertie. On représentera la dépendance radiale de chacune des accélérations pour expliquer que l'équilibre local n'est assuré qu'au croisement de ces fonctions G, chacune des accélérations dominant l'autre selon la position de r par rapport à r_G.

- Une première alternative possible serait de traiter un système non sphérique avec les équations de Poisson (e.g. une galaxie). On peut mettre en évidence les différences avec le problème de Kepler, et commenter le lien courbes de vitesse-présence hypothétique de matière noire.

- Une deuxième alternative possible serait de regarder la conséquence d'effets post-newtoniens additionnels dus à la relativité générale (le traitement se fait par la mécanique classique, cf. la précession du périhélie de Mercure).

3 Questions

- *Comment un être humain peut-il savoir si c'est la Terre qui tourne autour du Soleil ou l'inverse ?* En regardant le mouvement des autres planètes dans le ciel (e.g. le mouvement apparent rétrograde de Mars).

- *Connaissez-vous une conséquence de la conservation du vecteur de Runge-Lenz en mécanique quantique ?* Les niveaux d'énergie de l'hydrogène sont dégénérés en $n + l$, ce qui explique les règles de Klechkowski.

- *Quelles doivent être les propriétés des algorithmes numériques utilisés pour calculer la trajectoire des planètes ?* Ils doivent conserver l'énergie à la précision de la machine, ce qui assure la stabilité du schéma aux grands temps.

- *Pourquoi les planètes du Système Solaire sont-elles à peu près dans un même plan ?* Le Soleil s'est probablement formé lors de l'effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz en rotation contenant des grains de silicates de taille micronique. Par conservation du moment angulaire, un disque protoplanétaire se forme autour de l'étoile, dans un plan orthogonal au vecteur rotation de l'étoile. Les inclinaisons des orbites des grains de poussière par rapport au plan du disques sont rapidement amorties par friction des grains sur le gaz : les embryons des coeurs planétaires sédimentent dans le plan médian du disque avant de coaguler pour former des planètes.