

Observations et lois historiques

- **Brumaghupta** (VIIe siècle): « La terre est ronde et tous les corps chutent vers le centre de la Terre. »
- **Kepler** (XVIe siècle)
 - Loi des orbites « Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers »
 - Loi des périodes « Le rapport entre le demi grand axe de la trajectoire au cube avec le carré de la période est une constante du système solaire »
- **Galilée** (XVIIe siècle) Tout corps en chute libre a la même vitesse, donc indépendante de la masse.
- **Newton** (fin XVIIe siècle)
 - Principe fondamental de la dynamique
 - Principe des actions réciproques.

Ordres de grandeur

$$G \simeq 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$$

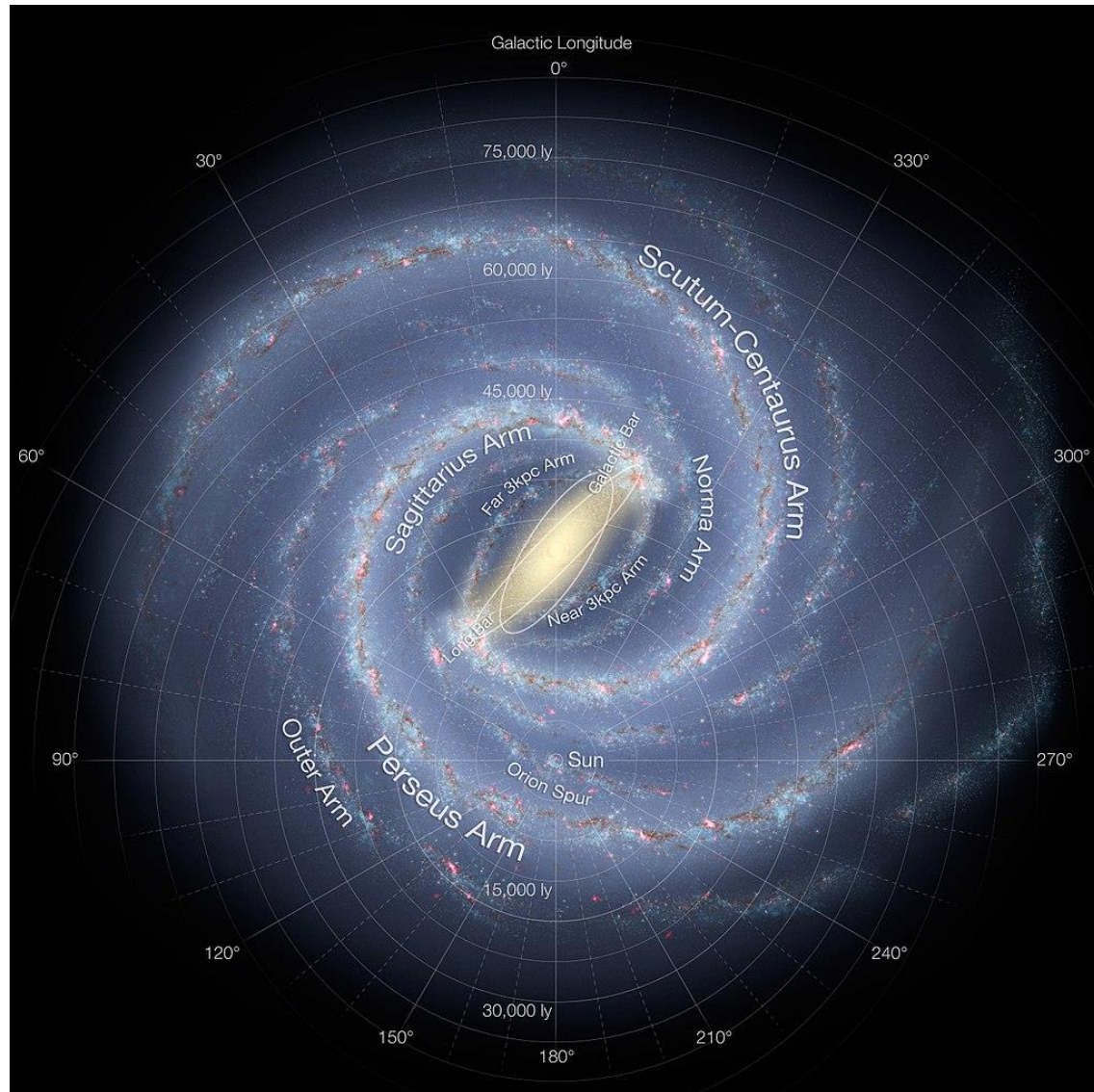
$$F_{\text{proton} \rightarrow \text{electron}} \sim 10^{-47} \text{ N} \quad \ll \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon (1\text{\AA})^2} \sim 10^{-8} \text{ N}$$

dans un atome

$$F_{\text{Terre} \rightarrow \text{humain}} \sim 10^3 \text{ N}$$

$$F_{\text{Soleil} \rightarrow \text{Terre}} \sim 10^{22} \text{ N}$$

Vue d'artiste de la voie Lactée



Trajectoire



$$\vec{R} = \vec{v} \times \vec{L} - K \vec{e}_r$$

$\vec{R} \cdot \vec{L} = 0 \rightarrow \vec{R}$ dans le plan du mouvement

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \vec{r} &= (\vec{v} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - K \vec{e}_r \cdot \vec{r} \\ &= (\vec{v} \times (m \vec{v} \times \vec{r})) \cdot \vec{r} - Kr \\ &= m |\vec{v} \times \vec{r}|^2 - Kr \\ R \cdot r \cos \theta &= \frac{L^2}{m} - Kr \end{aligned}$$

Trajectoire conique

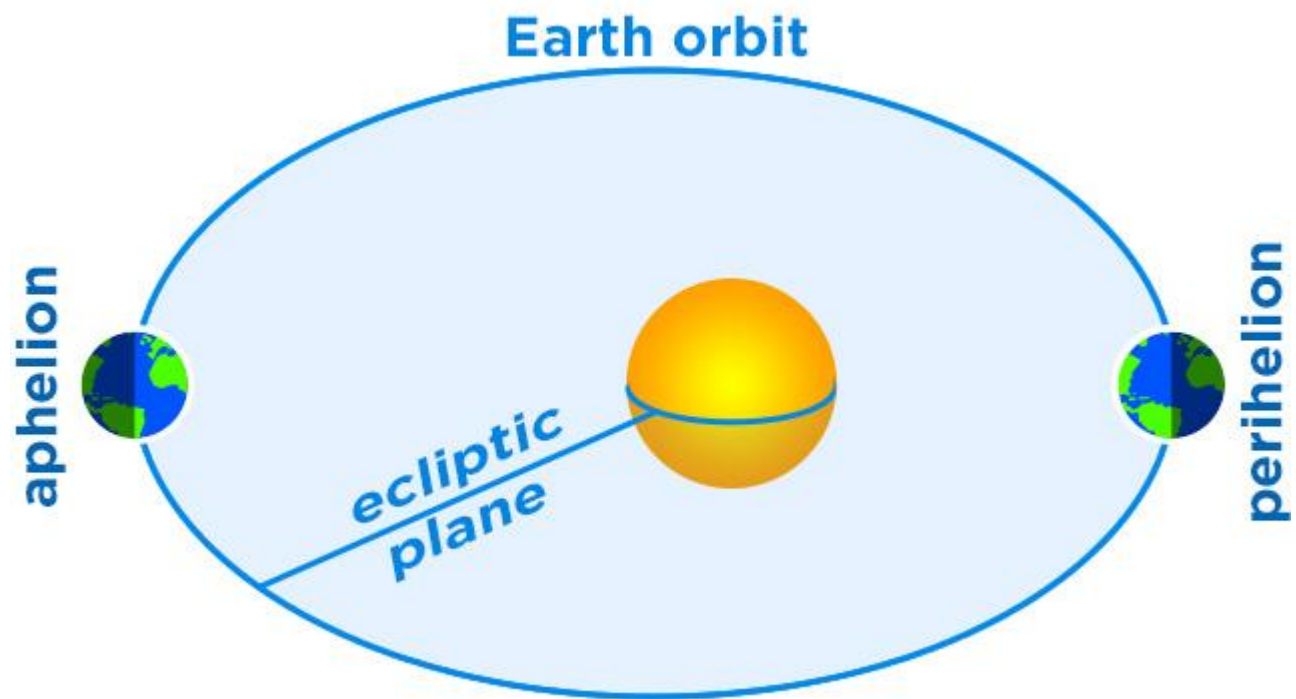
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

$$e = \frac{R}{K}, \quad p = \frac{L^2}{mK} = \frac{L^2}{G_T m^2 M}$$

Si $e < 1$, la trajectoire est liée.

Application : $e = 0.017 < 1$
 $p = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$

orbite de la Terre
 autour du Soleil



Potentiel gravitationnel

On remarque $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\text{grad}}_{\vec{r}} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$

donc $\vec{G}(\vec{r}) = + G \iiint_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \underbrace{\vec{\text{grad}}_{\vec{r}} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}$

$$\vec{G}(\vec{r}) = \vec{\text{grad}}_{\vec{r}} \left(G \iiint_V \frac{d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

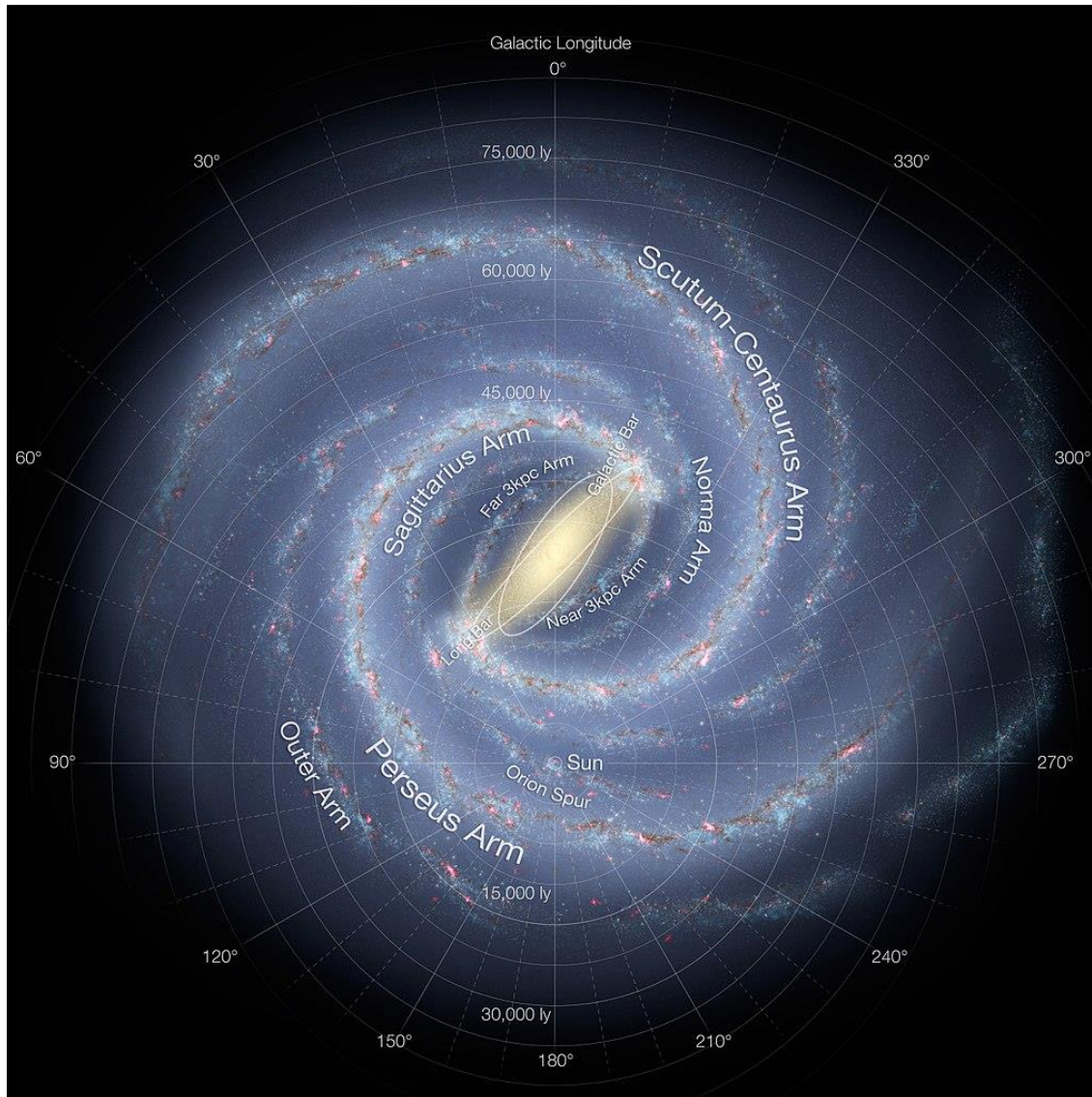
$\phi(\vec{r})$ potentiel gravitationnel

—

$$\vec{\text{rot}} \vec{G} = 0$$

	Electrostatique	Gravitation
Charge du champ	q	m
Champ	$\vec{E}$	$\vec{G}$
Force	$q\vec{E}$	$m\vec{G}$
Constante	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9 \times 10^9 \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$	$-\mathcal{G} = -6,67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Relation champ - potentiel	$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$	$\vec{G} = -\vec{\nabla}\Phi$
Equations locales	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$	$\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho$
Théorème de Gauss	$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{int}/\epsilon_0$	$\iint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$
Equation de Poisson	$\Delta V = -\rho/\epsilon_0$	$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\rho$

Vue d'artiste de la voie Lactée



Ordres de grandeur:

bulbe ~ 1 kpc

taille totale ~ 200000 a.l.
 ~ 60 kpc

masse $\sim 10^{10}$ masses solaires

epaisseur ~ 0.3 kpc

masse volumique

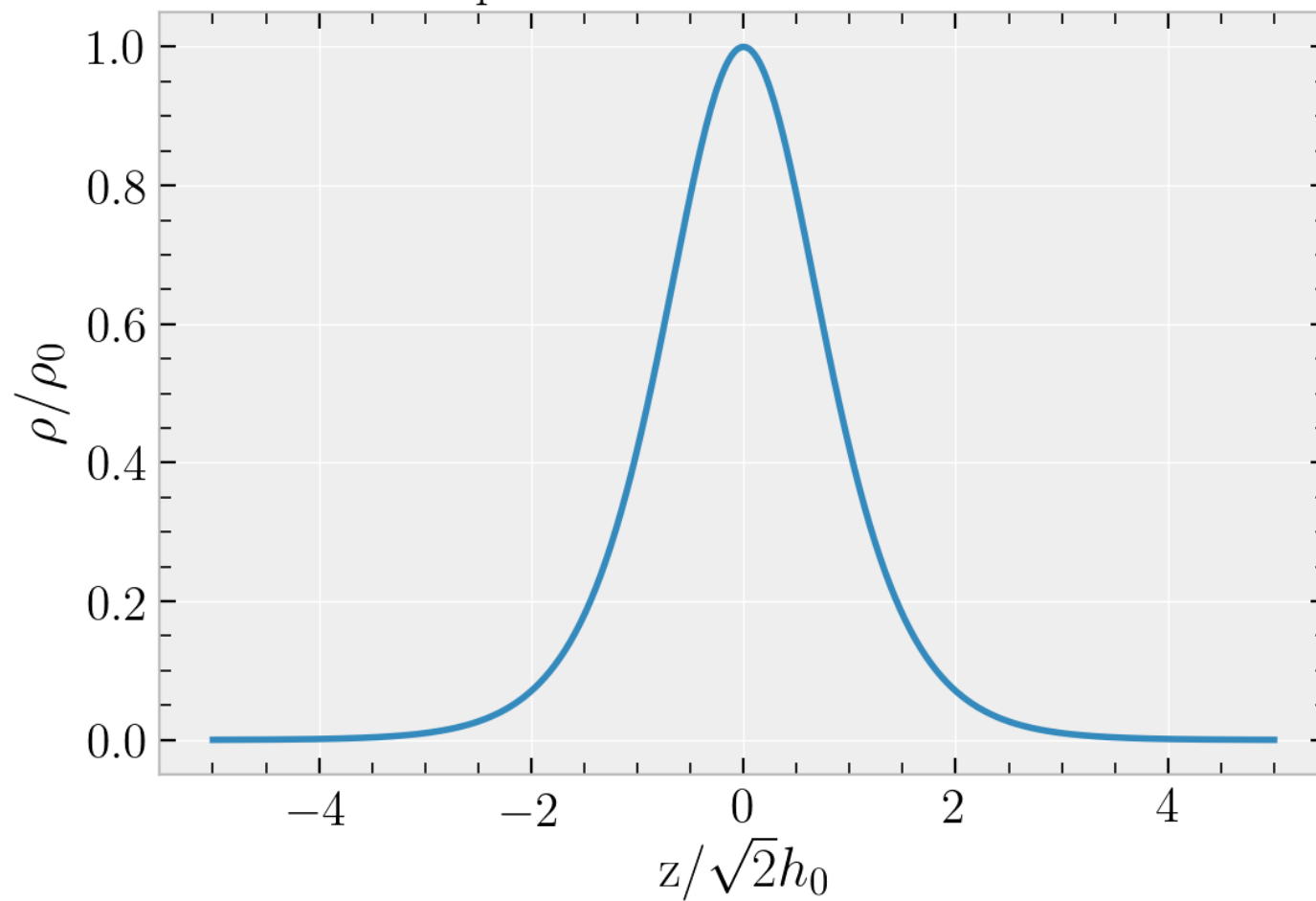
$$\rho_0 \sim 1.15 M_{\odot} / \text{pc}^3$$

Luminosité par unité de surface

$$l_0 \sim 10^{-6} W / m^2$$

$$l(r) = l_0 \exp\left(-\frac{r}{R_0}\right)$$

profil vertical de densité

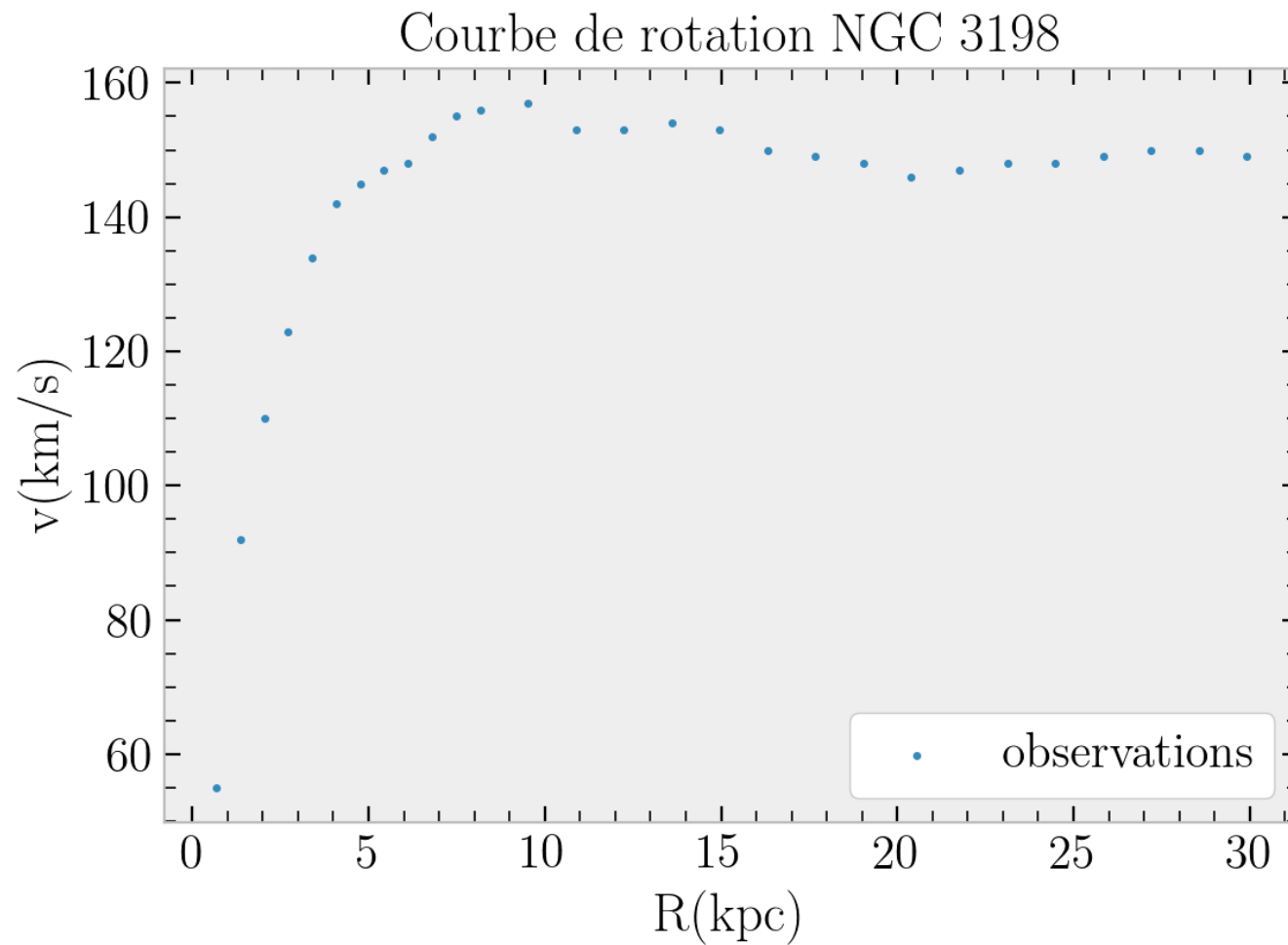


Ordres de grandeur

$$\rho_0 \sim 1.15 M_{\odot}/pc^3$$

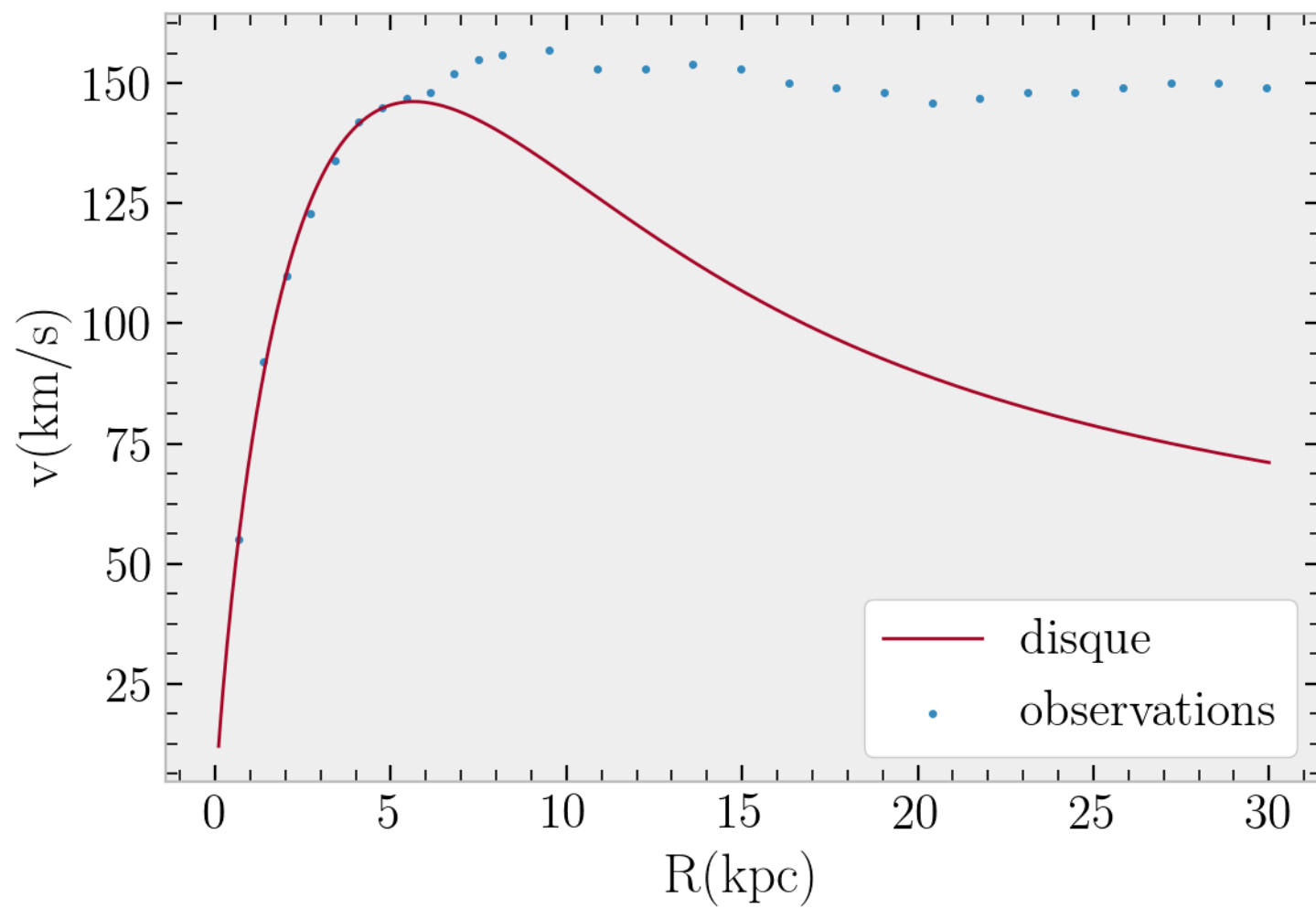
$$h_0 \sim 300 pc$$

$$\sigma_z \sim 18 \text{ km/s}$$

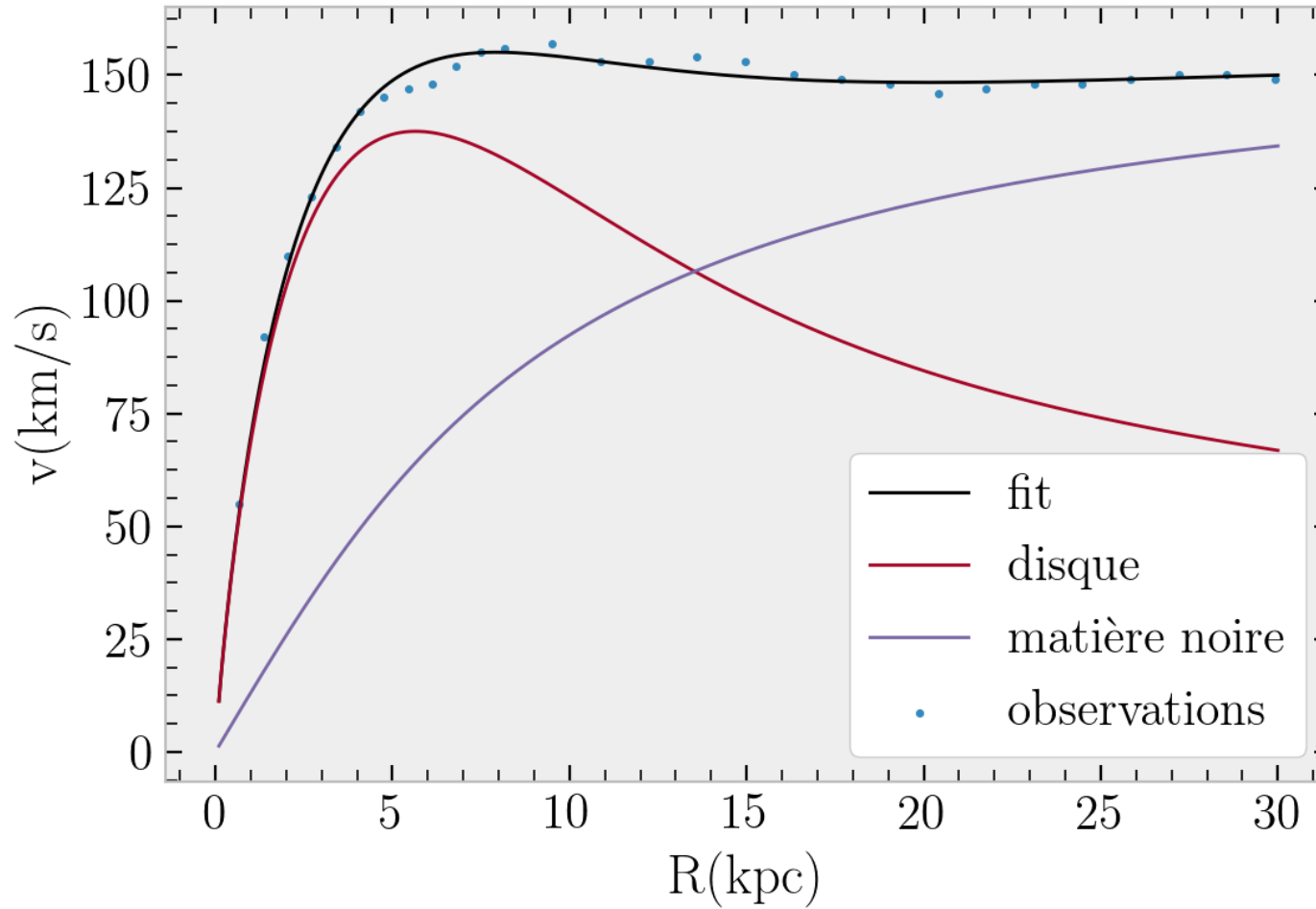


Données: K. G. Begeman, "HI
rotation curves of spiral galaxies"

Courbe de rotation NGC 3198



Courbe de rotation NGC 3198



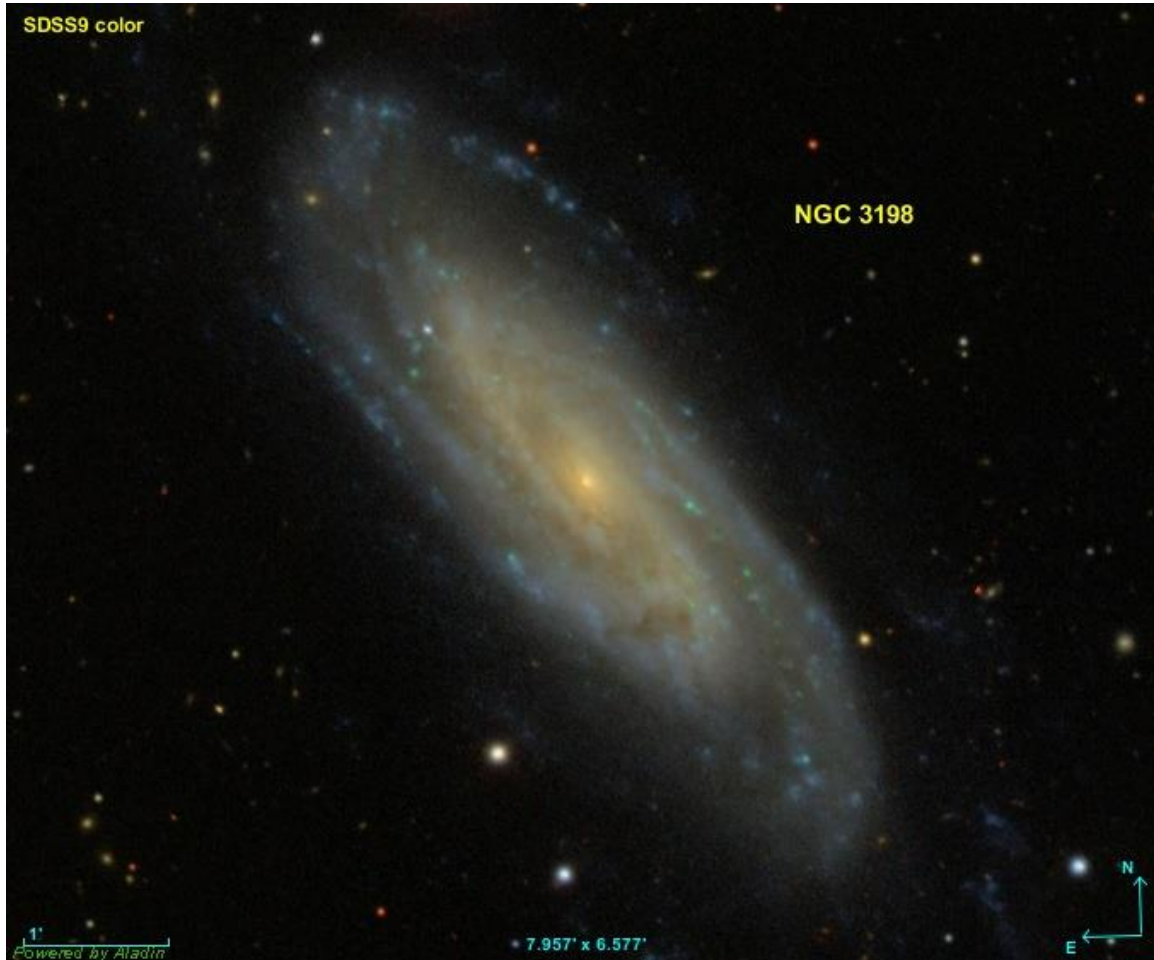
Halo sphérique de
matière noire:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{r}{R_c}\right)^2}$$

$$\rho_0 \sim 24 M_{\odot}/kpc^3$$

$$R_c = 6.4 \text{ kpc}$$

Galaxie spirale NGC 3198



Localisation : constellation de la Grande Ourse à environ 9.4 Mpc de la Terre

Rayon : $R_0 \sim 12$ kpc

Luminosité par unité de surface : $l_0 \sim 10^{-4} W/m^2$

$$l(r) = l_0 \exp\left(-\frac{r}{R_0}\right)$$

Courbes de rotation

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{si sym. sphérique}$$

$$v_{orb} = \text{cte} \quad \rightarrow \quad \rho(r) \propto r$$

$$\rho(r) = \underset{\text{sym sphérique}}{=} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \rightarrow$$

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM}{dr} \propto \frac{1}{r^2}$$

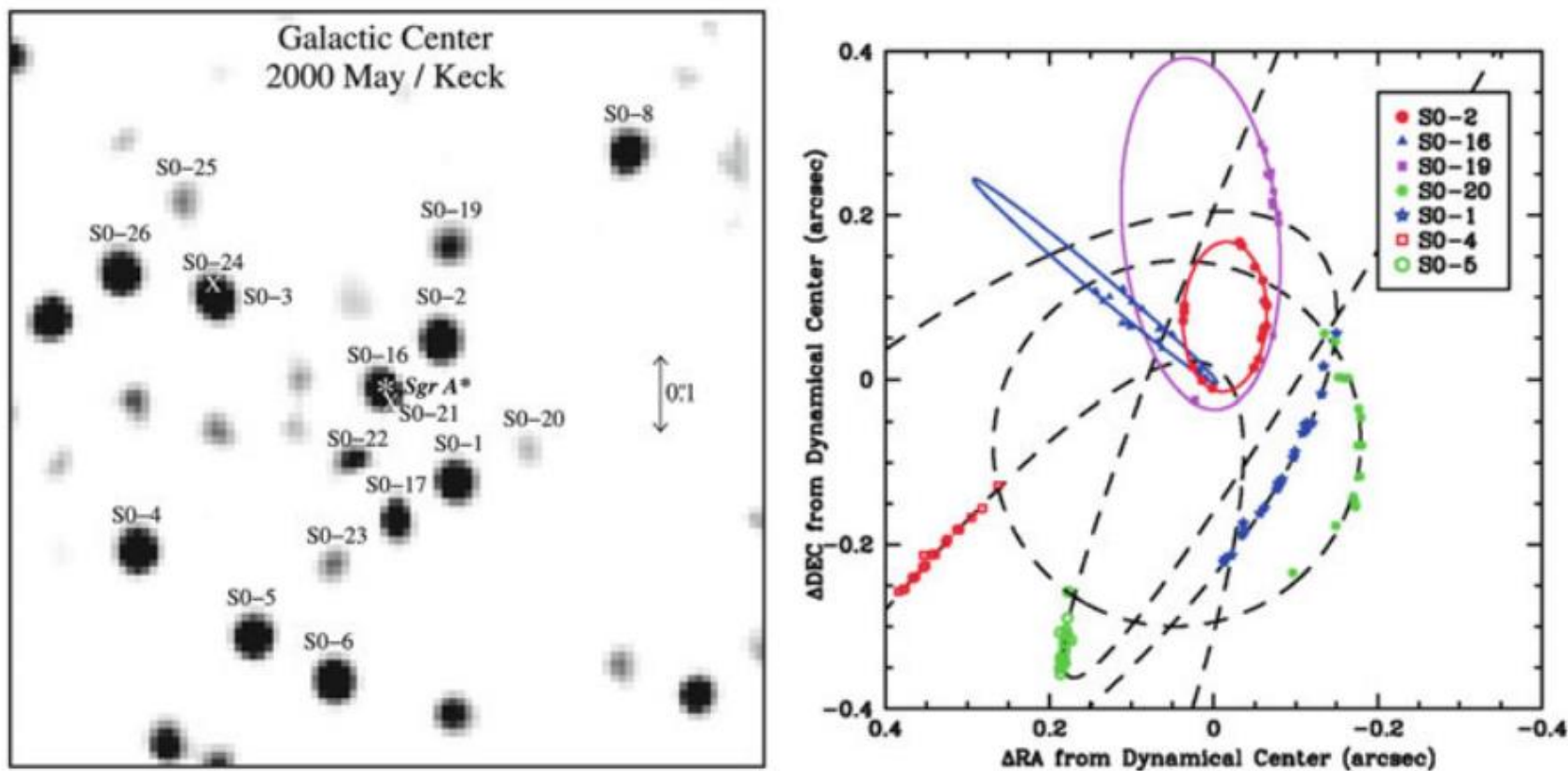
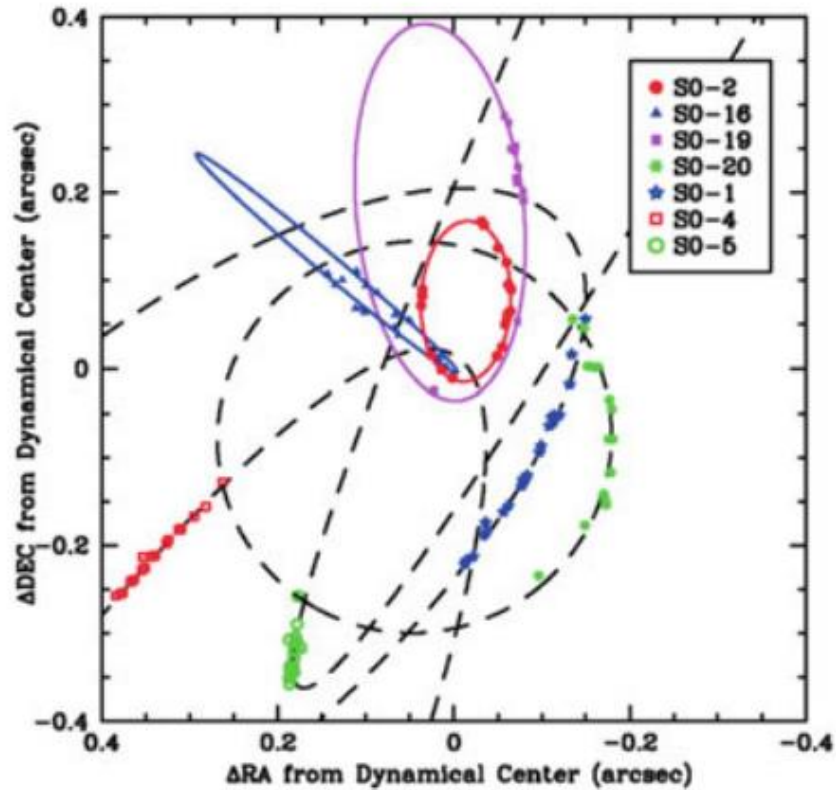


Fig. 3.3 Stars near the Galactic Center. The *left panel* shows a snapshot from May 2000, while the *right panel* shows some of the orbits traced over time (plotted on a different scale) (Credit: Ghez et al. [3]. Reproduced by permission of the AAS)



Numéro de l'étoile	Période T (an)	Demi-grand axe a (10^{14} m)
2	14.53	1.37
16	36	2.51
19	37.3	2.57

Loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

$\rightarrow M = 3.7 \times 10^6 M_{\odot}$

C'est le trou noir supermassif Sagittarius A*

