

# Agrégation

## Concours externe

Section : PHYSIQUE-CHIMIE

PROBLEME DE PHYSIQUE

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

***NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc... Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

***Les différentes parties du problème sont essentiellement indépendantes.***

Tournez la page svp

# 1 Analyse de documents : *Le secret de la Licorne*

Dans une planche bien connue du *Secret de la Licorne* (Figures 1 et 2), Tintin attache une poutre à des draps afin de s'en servir comme bélier et se sortir d'une situation délicate. On s'aperçoit par ailleurs qu'Hergé a modifié la méthode employée par Tintin par rapport à la planche originale (Figure 3).

Expliquer en une dizaine de lignes comment vous pourriez utiliser ces planches dans une séquence de mécanique, niveau Supérieur. Les explications seront concises mais quantitatives.

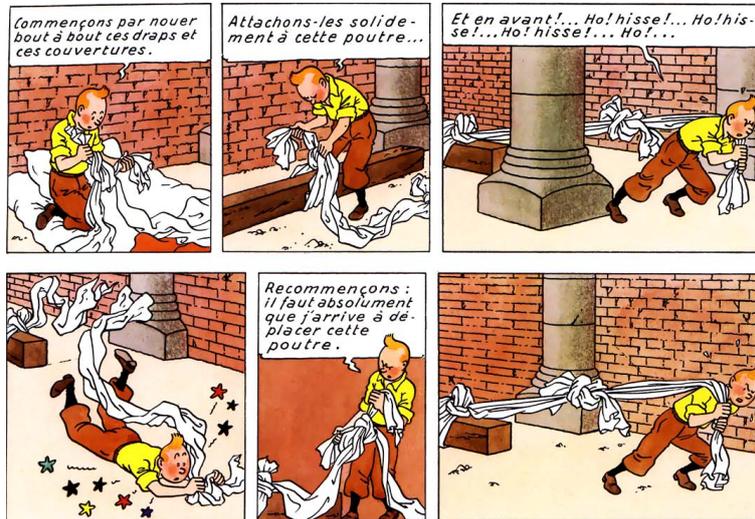


FIGURE 1 – Tintin attachant la poutre à des draps afin de la tirer.

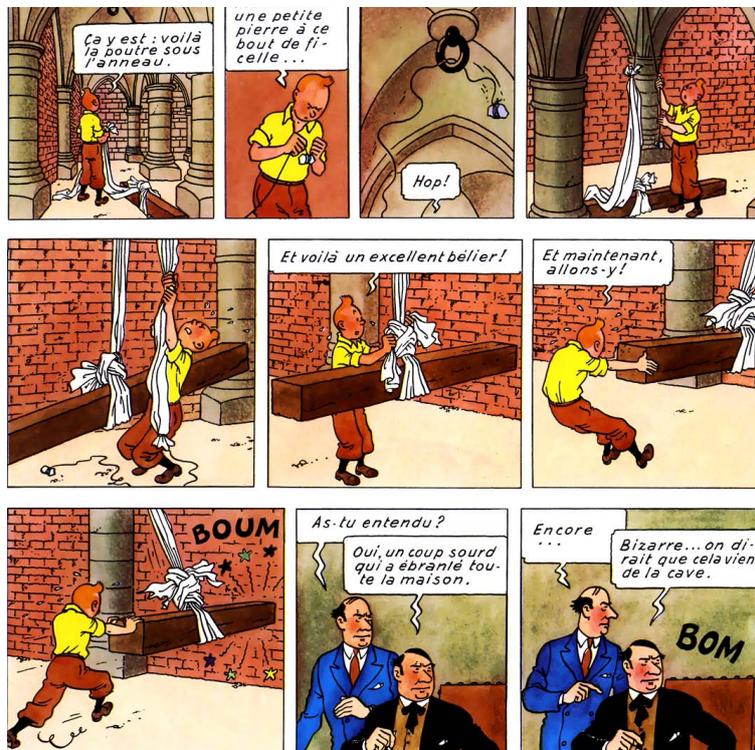


FIGURE 2 – Tintin hissant la poutre et s'en servant comme bélier.

1 point a été attribué pour la discussion rigoureuse des 5 items suivants : analyse des frottements solides, utilisation des théorèmes mécaniques, ordres de grandeur, analyse des erreurs physiques dans la BD et construction de la séquence.

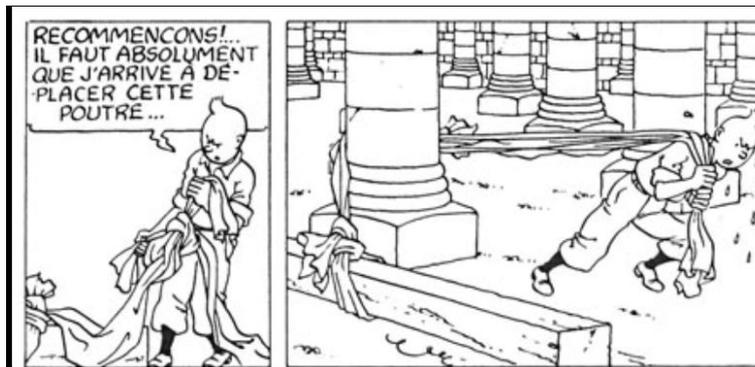


FIGURE 3 – Méthode originale employée par Tintin pour tirer la poutre (*Le Soir*, 1942).

## 2 Accélération de la Batmobile

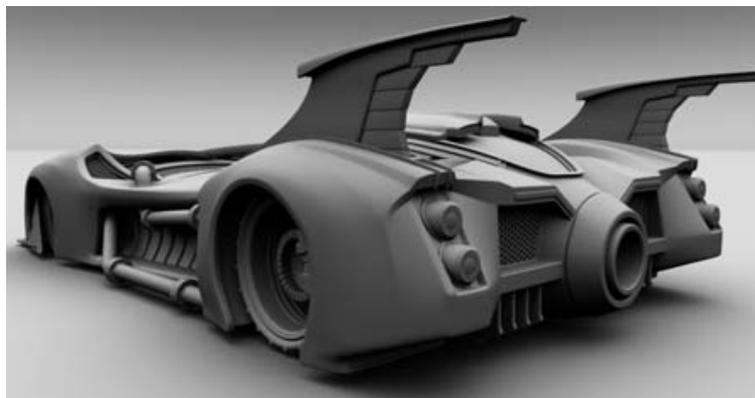


FIGURE 4 – La Batmobile est propulsée par une turbine située à l’arrière du véhicule et ne possède pas de roues motrices.

La Batmobile est un véhicule à quatre roues propulsé par la poussée d’une turbine située à l’arrière (Fig. 4). On cherche à déterminer l’accélération linéaire maximale que peut subir la Batmobile, puis à comparer cette valeur à un véhicule à propulsion arrière classique. On notera  $M$  la masse totale du véhicule et  $\mathbf{a} = a\mathbf{x}$  son accélération linéaire. Son centre de masse est positionné à une hauteur  $\mathbf{h} = h\mathbf{y}$  du sol. La turbine applique une poussée  $\mathbf{F} = F\mathbf{x}$  en un point situé à une hauteur  $\mathbf{H} = H\mathbf{y}$  du sol.

Les roues sont supposées indéformables. Les roues avant (*front*) et arrières (*rear*) seront différenciées par les indices F et R. On note ainsi  $m_F$  et  $m_R$ ,  $r_F$  et  $r_R$  ainsi que  $I_F = k_F m_F r_F^2$  et  $I_R = k_R m_R r_R^2$  les masses, les rayons et les moments d’inertie des différentes roues. On note  $d_{F,R}$  les distance horizontales des roues par rapport à l’axe vertical passant par le centre de masse du véhicule.

On notera  $\mathbf{f}_{F,R} = T_{F,R}\mathbf{x} + N_{F,R}\mathbf{y}$  les forces de friction statique exercées par sol sur les roues,  $\mu$  le coefficient de friction statique des pneumatiques sur le sol (que l’on supposera égal au coefficient de friction dynamique) et  $\mathbf{g}$  le champ de pesanteur.

1. Dessiner un schéma de la Batmobile en représentant les différentes actions extérieures.
2. De quels paramètres physiques dépend le coefficient  $\mu$  ?  
 *$\mu$  dépend de la nature et de l’état des surfaces en contact, ainsi que de la température et de l’humidité.  $\mu$  est indépendant de la surface macroscopique de contact et de la vitesse de glissement (sauf dans les cas limites des très faibles et des très fortes vitesses).*
3. Les frottements solides s’opposent-ils toujours au mouvement ? Sont-ils toujours dissipatifs ?  
*En l’absence de glissement, les frottements solides peuvent être moteurs (marche) ou/et non dissipatifs*

(roulement sans glissement).

4. Déterminer une relation entre  $T_{F,R}$  et  $a$ .  
*PPD au véhicule dans le référentiel du laboratoire galiléen selon  $\mathbf{x}$  :  $Ma = F + 2T_F + 2T_R$ .*
5. Quelles sont les unités des quantités  $k_F$  et  $k_R$  ?  
*Sans unité, car  $[I] = \text{ML}^2$ .*
6. Relier les accélérations angulaires des roues  $\alpha_{F,R}$  à l'accélération linéaire dans le régime où la Batmobile roule sans glisser.  
*Condition de roulement sans glissement : la vitesse relative du point de contact dans le référentiel du laboratoire est nulle. En utilisant la condition d'indéformabilité des roues  $\alpha_{F,R} = -\frac{a}{r_{F,R}} \mathbf{u}_z$ .*
7. Déterminer une relation entre  $\alpha_{F,R}$  et  $T_{F,R}$ .  
*TMC dans le référentiel du centre de masse, autour de l'axe fixe de chaque roue :  $I_{F,R} \alpha_{F,R} = r_{F,R} T_{F,R} \mathbf{u}_z$ . Le couple d'inertie d'entraînement de la roue est nul.*
8. En déduire une relation sous la forme  $F = \tilde{M}a$ , où  $\tilde{M}$  est une masse effective à déterminer.  
*En combinant les deux résultats précédents :  $T_{F,R} = -k_{F,R} m_{F,R} a$ . D'où  $F = [M + 2(k_F m_F + k_R m_R)] a$  et  $\tilde{M} = M + 2(k_F m_F + k_R m_R)$ .*
9. Déterminer une relation entre  $N_{F,R}$  et  $\mathbf{g}$ .  
*PPD au véhicule dans le référentiel du laboratoire galiléen selon  $\mathbf{y}$ , en comptant la contribution de chacune des quatre roues :  $2N_F + 2N_R - Mg = 0$ .*
10. Déterminer une relation entre  $N_{F,R}$  et  $a$  traduisant que les roues du véhicule restent au sol.  
*Dans le référentiel du centre de masse, TMC autour du centre de masse et condition de couple nul pour que le véhicule ne se retourne pas sur lui-même :  $0 = F(H - h) + 2N_F d_F - 2N_R d_R - 2(T_F + T_R)h$ . Ainsi,  $2N_F d_F - 2N_R d_R = Ca$ , avec  $C = H\tilde{M} - hM$ .*
11. En déduire  $N_F$  et  $N_R$ .  

$$N_{F,R} = \frac{d_{R,F} Mg + Ca}{2(d_F + d_R)}$$
12. Donner des inégalités sous la forme  $a \leq c_{F,R} g$ , où  $c_{F,R}$  sont des constantes que l'on déterminera.  
*Lois de Coulomb pour la condition de non-glissement :  $T_{F,R} \leq \mu N_{F,R}$ . En combinant les relations précédentes,  $c_F = \frac{\mu d_R M}{2(d_F + d_R k_F m_F - \mu C)}$  et  $c_R = \frac{\mu d_F M}{2(d_F + d_R k_R m_R + \mu C)}$ .*
13. En déduire un ordre de grandeur de l'accélération linéaire maximale que peut subir la Batmobile en supposant que  $H\tilde{M} \simeq hM$ .  
*Avec  $C = 0$ ,  $a = \mathcal{O}\left(\frac{M}{m}\right) g \gg g$ , la masse des roues étant négligeable devant celle du véhicule.*
14. On considère maintenant un véhicule à propulsion arrière ( $\mathbf{F} = 0$ ). À quelle relation obéissent les roues arrière dans le cas limite où elles se mettent à glisser ?  
*D'après les lois de Coulomb :  $T_R = \mu N_R$ .*
15. Dans ce cas, que devient la condition traduisant que les quatre roues du véhicule restent au sol ?  
*On a toujours  $\mathbf{T}_F = -k_F m_F a \mathbf{x}$  pour les roues libres avant. La condition de couple nulle devient  $0 = 2N_R d_R - 2N_F d_F - 2(\mathbf{T}_F + \mathbf{T}_R)h$ .*
16. En déduire les expressions de  $N_F$  et de  $N_R$  dans ce cas.  
*Le PPD selon la direction verticale ne change pas. D'où  $N_F = \frac{(d_R - \mu h)Mg - 2k_F m_F a h}{2(d_F + d_R - \mu h)}$  et  $N_R = \frac{d_F Mg - 2k_F m_F a h}{2(d_F + d_R - \mu h)}$ .*
17. En déduire un ordre de grandeur de l'accélération linéaire maximale que peut subir un tel véhicule. Comparer à la Batmobile et commenter.  
 *$a = \mathcal{O}(g)$ . La Batmobile peut subir une accélération linéaire beaucoup plus importante au démarrage. En effet, le couple de friction doit seulement propulser la roue et non tout le véhicule. C'est le principe de fonctionnement des dragsters.*

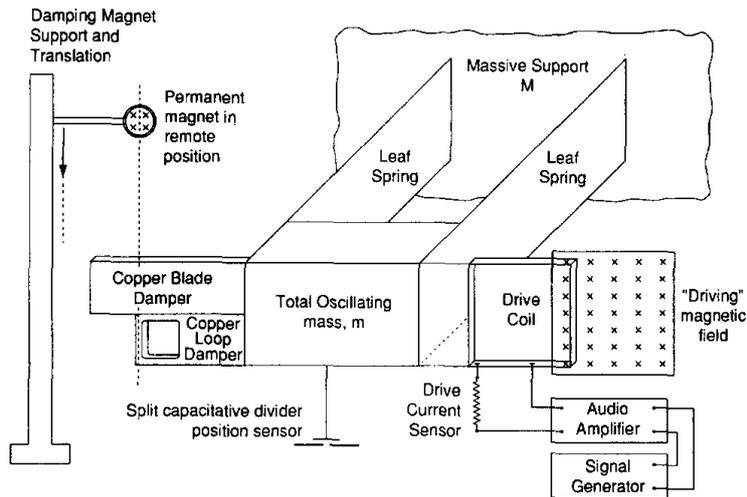


FIGURE 5 – Une masse (*total oscillating mass*) couplée à des ressorts (*leaf spring*) oscille sous l'action d'un forçage monochromatique exercé par un système magnétique (*driving magnetic field*) dont on ne décrira pas le principe de fonctionnement. L'amortissement est contrôlé par un système de friction magnétique (*dampers+damping magnets*).

### 3 Amortissement magnétique d'un oscillateur harmonique

On cherche à caractériser la réponse d'un système masse-ressort amorti par un système magnétique à une excitation sinusoïdale. Le dispositif étudié est représenté sur la Figure 5. Une masse  $m$  est reliée à deux suspensions à lame attachées à un support massif se comportant comme un ressort de raideur  $k$ . La masse ne peut se déplacer que dans la direction  $x$ . On repère sa position par rapport à sa position au repos par  $x$ .

Le système de forçage est constitué de plusieurs bobines placées dans un champ magnétique constant, alimentées par un courant sinusoïdal. Ce système permet d'exercer une force de la forme  $F = F_0 \cos(\omega t)$  sur la masse.

Le système d'amortissement est constitué d'une simple boucle découpée dans une lame de cuivre attachée à la masse. La spire est mise en regard vis à vis d'un fort champ magnétique transverse  $B$  exercé par un aimant permanent, qui sera supposé constant et uniforme .

18. Citer un exemple issu de la vie quotidienne dans lequel le freinage magnétique est utilisé. Quel est le processus physique mis en jeu ?

*Le freinage des camions. L'induction électromagnétique.*

19. La boucle de cuivre du système d'amortissement se déplace dans le champ créé par l'aimant permanent. Comment expliquer l'existence d'une force électromotrice  $\varepsilon$  au sein de la boucle ?

*Le flux magnétique  $\phi_b$  coupé par la boucle change avec le temps (cf. le rail de Laplace). D'où  $\varepsilon = \frac{d\phi_b}{dt}$ .*

20. Déterminer l'expression de la force électro-motrice  $\varepsilon$  en fonction de  $v = \frac{dx}{dt}$  et de  $l$ , la hauteur de la boucle.

$$\varepsilon = -vlB.$$

21. On note  $R$  la résistance de la boucle et  $L$  son inductance. Donner l'expression de l'impédance complexe équivalente  $\underline{Z}$  de la boucle.

$$\underline{Z} = R + jL\omega.$$

22. En déduire l'expression de l'intensité complexe  $\underline{I}$  parcourant la boucle de cuivre lorsque la masse oscille à une pulsation  $\omega$ . On supposera que cette hypothèse est vérifiée toute dans la suite du

problème.

$\underline{I} = \varepsilon/\underline{Z} = -\frac{vlB}{R+jL\omega}$ . On retrouve cette expression avec la loi des mailles.

23. Quelle force est à l'origine de l'amortissement de l'oscillateur ? Justifier.

Un conducteur filiforme parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique uniforme est soumis à une force de Laplace élémentaire  $d\mathbf{f} = i d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$ .

24. Déterminer l'expression de cette force en fonction de  $\omega$  et des paramètres du problème.

$$\mathbf{f} = \int_C i d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} = -\frac{vl^2 B^2}{Z} = -\frac{vl^2 B^2}{R^2 + L^2 \omega^2} (R - jL\omega).$$

25. Montrer que l'évolution de la masse est déterminée par l'équation

$$\ddot{x} + \gamma_R \dot{x} - j\gamma_L \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t),$$

où  $\omega_0$ ,  $\gamma_R$  et  $\gamma_L$  sont des constantes qui dépendent de  $\omega$  à déterminer et  $j^2 = -1$ .

Équation obtenue appliquant le PDF sur la masse soumise à l'action du ressort, de la force de Laplace et du forçage sinusoïdal dans le ref. gali. du labo, avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\gamma_R = \frac{l^2 B^2 R}{m(R^2 + \omega^2 L^2)}$  et  $\gamma_L = \frac{l^2 B^2 L \omega}{m(R^2 + \omega^2 L^2)}$ .

26. Quel système physique est équivalent à ce dispositif dans le cas  $k = 0$  et  $F_0 = 0$  ?

Au rail de Laplace.

27. Décrire brièvement le comportement de l'oscillateur dans le cas limite  $L = 0$ .

Oscillateur harmonique amorti linéairement et forcé sinusoïdalement. Après un régime transitoire de temps caractéristique le temps d'amortissement de l'oscillateur libre, le système atteint un régime permanent. La réponse est celle d'un filtre passe-bande d'ordre 2. Résonance en position à  $\omega_{\text{res}} < \omega_0$  pour  $Q > 1/\sqrt{2}$ . Résonance en vitesse à  $\omega_{\text{res}} = \omega_0$ ,  $\forall Q$ .

28. On cherche une solution à l'équation 1 sous la forme  $x = \Re(x_0 e^{j(\omega t - \phi)})$ , où  $x_0$  est un nombre réel. Comment justifier le choix de cet Ansatz ? À quoi correspond physiquement cette solution ? L'Eq. 1 est linéaire. Cette solution correspond au régime permanent correspondant à la réponse à l'excitation monochromatique de fréquence  $\omega$ .

29. Déterminer  $x_0$  et  $\phi$ .

$$x_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 + \gamma_L \omega - \omega^2)^2 + \gamma_R^2 \omega^2}}. \quad \tan \phi = \frac{\gamma_R \omega}{(\omega_0^2 + \gamma_L \omega - \omega^2)}.$$

30. Que vaut  $\phi$  à  $\omega = \omega_0$  dans le cas limite  $L = 0$  ?

$$\phi = \pi/2.$$

31. À quelle fréquence doit-on forcer le système pour obtenir un déphasage similaire dans le cas où  $L$  est quelconque ?

$$\text{À } \omega' = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma_L \omega}.$$

32. Le freinage magnétique est souvent utilisé en travaux pratiques pour modéliser les effets d'un frottement visqueux. Conclure sur la pertinence de cette modélisation.

La partie résistive du circuit assure une force de friction linéaire en  $v$ . Toutefois, la partie inductive agit comme une constante de raideur effective qu'il faut aussi prendre en compte.

## 4 Système Terre-Lune et couplage spin-orbite

On considère un système Planète-Satellite en interaction gravitationnelle (par exemple, les systèmes Terre-Lune ou Pluton-Charon). Par ailleurs, la planète a un mouvement de rotation sur elle-même, appelée spin (on négligera le spin du satellite).

Les forces de marée entre les deux astres déforment très légèrement les astres, induisant des frottements visqueux internes qui dissipent l'énergie mécanique du système. On s'aperçoit alors que sur des temps longs devant les temps orbitaux, le rayon orbital du satellite ainsi que la

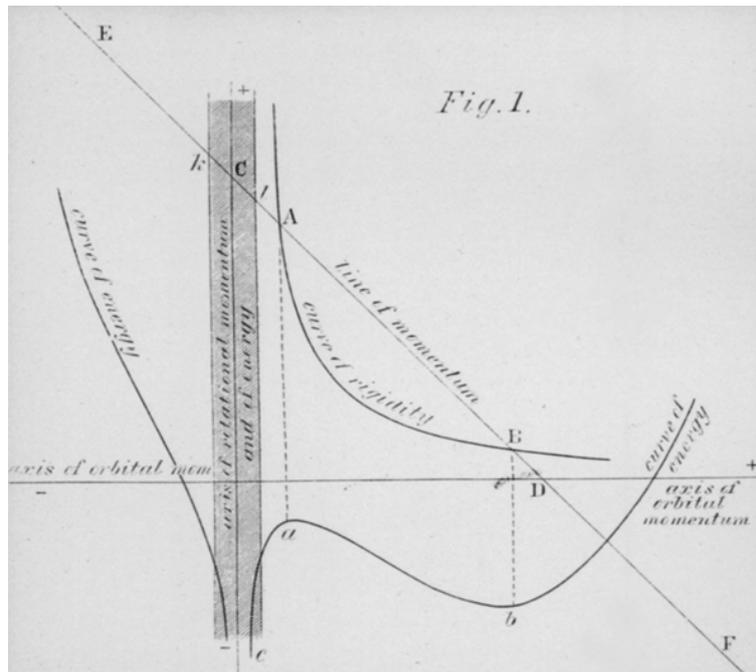


FIGURE 6 – Figure tirée de l'article original de George Darwin [1].

vitesse de rotation propre de la planète se modifient sous cette action.

On cherche à déterminer les états d'équilibre possibles de ce système Planète-Satellite. On supposera pour cela que la masse  $m$  du satellite est négligeable devant la masse  $M$  de la planète. On notera  $r$  la distance entre les deux astres,  $\Omega$  la vitesse angulaire associée au spin de la planète et  $I$  son moment d'inertie. Le mouvement du système est étudié dans le référentiel lié à la planète que l'on supposera galiléen (par exemple, le référentiel géocentrique pour la Terre).

33. Quelle hypothèse assure une dépendance  $\mathbf{g} = k/r^2 \mathbf{e}_r$  pour le champ gravitationnel de la planète ?  
*Symétrie sphérique de la planète.*

34. En faisant l'hypothèse précédente, déterminer la constante  $k$ .

*Par le théorème de Gauss :  $\mathbf{g} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2} \mathbf{e}_r$*

35. Donner les expressions de la pulsation orbitale  $\omega$ , du moment cinétique orbital  $l$  et de l'énergie potentielle  $E_p$  associés à l'orbite circulaire de rayon  $r$  du satellite.

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m}{r^3}}, \quad l = m\sqrt{\mathcal{G}Mr}, \quad E_p = -\frac{\mathcal{G}mM}{r}.$$

36. Donner l'expression de l'énergie mécanique totale  $E_m$  du système.

$$E_m = \frac{I\Omega^2}{2} - \frac{\mathcal{G}mM}{2r}.$$

37. Quelles quantités physiques sont conservées dans ce système ?

*Le système est isolé :  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{L}$  sont conservées. Les interactions sont dissipatives :  $E_m$  n'est pas conservée.*

38. En déduire une relation entre  $\Omega$  à la période orbitale du satellite  $\omega$ .

*Le système planète-satellite est isolé, le moment cinétique total  $L$  est conservé.  $L = l + I\Omega = mr^2\omega + I\Omega$ .*

39. Comment varie  $r$  si  $\Omega$  diminue ?

$$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{d\Omega}{dl} \frac{dl}{dr} > 0 : r \text{ diminue si } \Omega \text{ diminue.}$$

40. Déduire des questions précédentes l'expression de  $E_m$  en fonction de  $l$ .

$$E_m = \frac{(L-l)^2}{2I} - \frac{\mathcal{G}M^2m^3}{2l^2}.$$

41. Montrer qu'étudier les configurations d'équilibre possibles du système revient à étudier les racines de l'équation quartique  $l^4 + al^3 + b = 0$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes que l'on déterminera.

*On a équilibre si  $\frac{dE_m}{dl} = 0$ , ce qui donne l'équation voulue avec  $a = -I$  et  $b = \mathcal{G}^2M^2m^3I$ .*

42. Déterminer graphiquement les évolutions possibles du système et interpréter physiquement le résultat. On pourra s'aider de la figure 6 tirée de l'article original de George Darwin.  
*La courbe  $E_m(l)$  possède ou non un minimum local selon la valeur de  $L$  par rapport à  $b^{1/4}$  et le signe de  $\Omega$ . Aucun équilibre n'est possible si  $\Omega$  et  $\omega$  sont de signes contraires. Si la réserve de moment angulaire dans le spin de la planète est suffisamment grand, un équilibre stable peut être atteint.*
43. Exprimer  $\frac{dE_m}{dt}$  et  $\frac{dE_m}{d\Omega}$  en fonction de la différence  $\omega - \Omega$ .  
 $\frac{dE_m}{dt} = \omega - \Omega$ .  $\frac{dE_m}{d\Omega} = I(\omega - \Omega)$ .
44. En déduire la valeur de  $\Omega$  lorsqu'il y a équilibre. Quelle est la conséquence physique de ce résultat ?  
 $\frac{dE_m}{dt} = 0$  et  $\omega - \Omega = 0$ . *La planète présente toujours la même face au satellite.*
45. Quel est le signe actuel de  $\Omega - \omega$  pour le système Terre-Lune ? Que peut-on prédire pour son évolution ?  
 $\Omega - \omega > 0$ . *Pour atteindre l'équilibre,  $\Omega$  et  $r$  s'accroissent. Ainsi, le jour terrestre ralenti et la Lune s'éloigne de la Terre.*
46. Comment doit-on modifier l'analyse précédente lorsque la masse du satellite n'est plus négligeable ?  
*On remplace  $m$  par la masse réduite  $\mu = \frac{mM}{m+M}$  du système binaire.*

## 5 Induction et moment cinétique

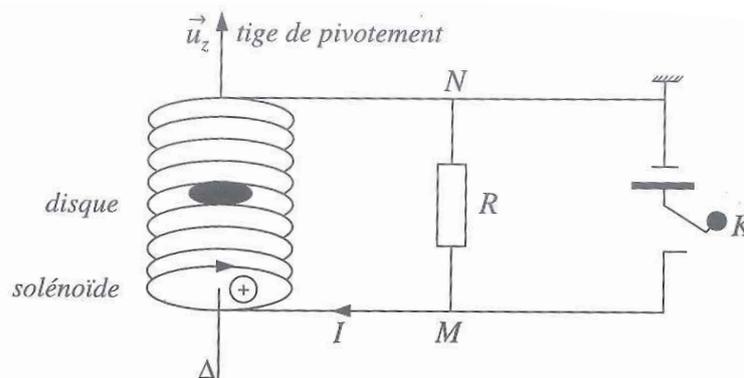


FIGURE 7 – Générateur alimentant un solénoïde entouré d'un isolant chargé.

On considère un générateur muni d'un interrupteur alimentant une résistance  $R$  montée en parallèle avec un solénoïde qui est parcouru par un courant  $I$  (cf. Fig. 7). Ce solénoïde est relié à la Terre et ne porte aucune charge. On note  $\Delta$  son l'axe vertical, ainsi que  $l$  sa longueur,  $N = n \times l$  son nombre de spires total et  $S$  la surface d'une spire. La résistance du solénoïde est négligeable devant  $R$ .

On considère de plus un disque *isolant* homogène de densité linéique uniforme portant sur sa circonférence une charge totale  $q$ . On note  $m$  la masse du disque,  $a$  son rayon et  $J = \frac{1}{2}ma^2$  son moment d'inertie. Le disque est attaché en son centre perpendiculairement à une tige verticale qui coïncide avec  $\Delta$ . Cette tige est infiniment fine et peut pivoter sans frottements.

47. On se place dans la suite du problème dans l'approximation des régimes stationnaires. Définir et justifier cette approximation.  
*Les courants de déplacements sont négligés devant les courants de charge. Approximation valide si le disque tourne à des vitesses non relativistes.*
48. Déterminer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde. On négligera les effets de bord.  
*Champ uniforme d'un solénoïde infini. Par le théorème d'Ampère,  $\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{u}_z$ .*

49. Déterminer le flux magnétique  $\phi$  à travers les  $N$  spires du solénoïde.  

$$\phi = nl \iint_{1 \text{ spire}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = nl \cdot \mu_0 n I \cdot S.$$
50. En déduire l'inductance propre  $L$  du solénoïde.  
 Par définition,  $\phi = LI$ . D'où  $L = \mu_0 n^2 l S$ .
51. Application numérique : que vaut  $L$  pour  $n = 1 \text{ spire/mm}$ ,  $l = 1 \text{ m}$  et des spires de diamètre 20 cm ?  
 $L = 39.5 \text{ mH}$ .
- On suppose maintenant que le champ magnétique créé par les charges du disque tournant est négligeable devant le champ magnétique du solénoïde  $B$ .
52. Le circuit est parcouru par une intensité  $I_0$ , jusqu'au moment où l'on ouvre l'interrupteur. Déterminer l'expression de  $I(t)$  pour  $t > 0$  en faisant apparaître un temps caractéristique que l'on précisera.  
 Bilan électrique du circuit ouvert :  $L \frac{dI}{dt} + Ri = 0$ . Par continuité du courant dans l'inductance,  $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ , avec  $\tau = L/R$ .
53. Application numérique : déterminer  $\tau$  pour  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .  
 $\tau = 39.5 \mu\text{s}$ .
54. L'intensité  $I$  est-elle continue dans  $R$  ?  
 Non. Après ouverture, l'intensité dans  $R$  est  $I(t)$ , mais avant ouverture, ce n'est pas  $I_0$ .
55. Au moment où l'interrupteur est ouvert, le disque se met à tourner. En notant que les charges en surface du disque ne peuvent pas se déplacer (on précisera pourquoi), déterminer les processus physiques à l'origine de ce phénomène.  
 Les variations de  $I$  créent des variations de  $B$  qui induisent un champ électrique  $\mathbf{E}_m$  (induction). Celui-ci exerce un moment sur les charges liées de surface (le matériau est isolant) qui met le disque en rotation.
56. Déterminer qualitativement le sens de rotation du disque.  
 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  est dirigé selon  $-\mathbf{u}_z$ . D'où  $\text{rot} \mathbf{E}_m$  est dirigé selon  $\mathbf{u}_z$ , ce qui correspond à  $\mathbf{E}_m$  selon  $\mathbf{u}_\theta$ . Les charges étant fixes, le disque se met à tourner ( $\omega$  selon  $\mathbf{u}_z$  si  $q > 0$ ).
57. La loi de Lenz est-elle vérifiée ?  
 Les charges de surface mises en mouvement forment un courant de convection qui crée un champ  $\mathbf{B}_m$  qui s'oppose à  $\mathbf{B}$  : la loi de Lenz est vérifiée.
58. L'expression de la force de Laplace est-elle pertinente pour ce problème ?  
 Non, car le disque n'est pas conducteur.
59. Exprimer la force de Lorentz élémentaire  $d\mathbf{f}$  qui s'applique sur la charge élémentaire d'un secteur  $d\theta$  de la circonférence du disque en fonction de  $q$ . On notera  $\mathbf{v}$  la vitesse locale du disque.  

$$d\mathbf{f} = \frac{q}{2\pi} d\theta (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$
60. Déterminer le moment de cette force par rapport à l'axe  $\Delta$ .  
 $\Delta$  est fixe.  $\mathcal{M}_\Delta = \oint \{ \mathbf{r} \times \frac{q}{2\pi} d\theta \mathbf{E}_m(r=a) \} \cdot \mathbf{u}_z$  avec  $\mathbf{r} = a \mathbf{u}_r$ .
61. En déduire l'expression la vitesse angulaire du disque en fonction de  $t$  et des paramètres du problème.  
 On applique le TMC par rapport à  $\Delta$  au disque :  $\frac{1}{2} m a^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu_0 q n^2 a^2 I_0}{2\tau} e^{-t/\tau}$ . D'où  $\omega(t) = \frac{\mu_0 q n I_0}{m} (1 - e^{-t/\tau})$ .
62. Application numérique : quelle est la vitesse angulaire limite  $\omega_1$  du disque ? Commenter.  
 $\omega_1 = \frac{\mu_0 q n I_0}{m} = 6.5 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$ . Vitesse angulaire très petite mais non nulle.
63. D'où vient le moment cinétique du disque ?  
 Le disque échange du moment cinétique avec le champ électromagnétique via le phénomène d'induction.

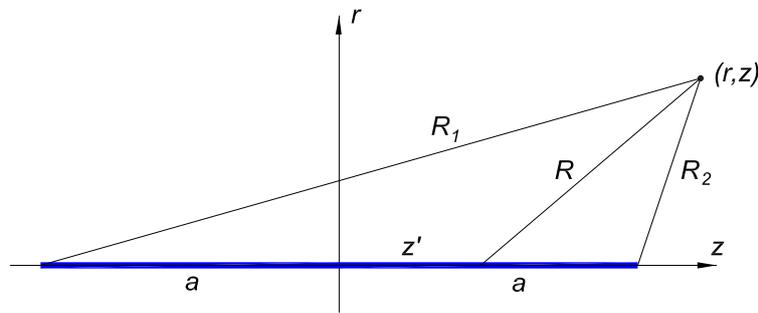


FIGURE 8 – Aiguille chargée de taille  $2a$ . La goutte d'eau chargée est située en  $(r, z)$  (base cylindrique).

## 6 Gouttes d'eau près d'une aiguille chargée

On étudie l'expérience suivante menée dans la Station Spatiale Internationale. Une aiguille à tricoter est chargée électriquement par friction. Une goutte d'eau chargée est placée au voisinage de l'aiguille. On observe un mouvement hélicoïdal de la goutte, qui orbite autour de l'aiguille tout en se baladant le long de celle-ci. De plus, le mouvement est confiné, la goutte restant au voisinage de l'aiguille en faisant des allers-retours le long de l'axe  $z$ .

On modélise l'aiguille chargée par un fil de longueur  $2a$  et de charge totale  $Q$ , centrée à l'origine et alignée avec l'axe  $\mathbf{u}_z$  de la base cylindrique  $(r, \theta, z)$ . La goutte est supposée ponctuelle, de masse  $m$  et de charge  $-q$ .

64. Donner l'expression du potentiel électrique élémentaire  $dV$  créé par l'élément de longueur  $dz$  de l'aiguille situé en  $(0, z')$  à une distance  $R$  de la goutte (Figure 8). Justifier.

*Pas de charges à l'infini. D'où  $dV = \frac{Q/2a}{4\pi\epsilon_0 R} dz$ .*

65. En déduire l'expression de  $V(r, z)$  ainsi que son signe.

$V(r, z) = \frac{Q/2a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}} = \frac{Q/2a}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z+a+\sqrt{r^2+(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{r^2+(z-a)^2}}$ .  $V > 0$ , car  $E_{p,elec} = -qV < 0$  (attraction entre éléments chargés de signes opposés).

66. Déterminer l'expression de la composante radiale  $E_r$  du champ électrique dans le plan  $z = 0$ .

$E_{r,z=0} = \frac{\partial V_{r,z=0}}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{r^2+a^2}}$ .

67. Calculer l'expression du champ électrique créé par une distribution linéique de charge  $\lambda$  uniforme.

*Invariances et symétries :  $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r$ . Théorème de Gauss :  $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\mathbf{u}_r$ .*

68. Interpréter physiquement l'expression de  $E_{r,z=0}$  obtenue pour l'aiguille.

*Pour  $r \gg a$  : champ d'une charge ponctuelle  $Q$ . Pour  $r \ll a$ , champ d'un fil infini avec  $\lambda = Q/2a$ .*

69. Déterminer la vitesse angulaire  $v_{\theta 0}$  ainsi que la pulsation  $\omega_0$  de l'orbite circulaire d'une goutte située dans le plan  $z = 0$  à  $r = r_0$ .

*Le PFD selon  $\mathbf{u}_r$  donne  $v_{\theta 0}^2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a m \sqrt{1+r_0^2/a^2}}$  et  $\omega_0^2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_0^2 m \sqrt{r_0^2+a^2}}$ .*

70. Dans le cas général, que dire de  $L_z$ , la composante du moment angulaire selon  $\mathbf{u}_z$  ?

*Le TMC appliqué à la particule donne  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (zF_r - rF_z)\mathbf{u}_\theta$  car  $\mathbf{F} = -\nabla E$  n'a pas de composante selon  $\theta$  par invariance.*

71. Définir le moment magnétique autour de l'axe  $\mu_z$  créé par la goutte.

$\mu_z = iS = \frac{qv}{2\pi r}\pi r^2$ .

72. Montrer qu'il existe une relation entre  $\mu_z$  et  $L_z$ . Connaissez-vous une situation analogue en physique ?

*$L_z = mr^2\dot{\theta}$ , d'où  $\mu_z = \frac{q}{2m}L_z$ . Cf relation moment magnétique-moment angulaire d'un électron dans une couche atomique.*

On étudie maintenant le mouvement hélicoïdal de la goutte. On considère une trajectoire telle que lorsque  $z = 0$   $r = r_0$ ,  $\dot{r} = 0$ ,  $r\dot{\theta} = v_{\theta 0}$  et  $\dot{z} = v_{z0}$ .

73. Exprimer l'énergie potentielle  $E_m$  de la goutte en fonction de  $r$  et  $z$ .

$$E_m = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{mr^2} + \dot{z}^2 \right) - \frac{qQ/2a}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z+a+\sqrt{r^2+(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{r^2+(z-a)^2}} = cste.$$

On note  $r_1$  et  $z_1$  les éventuelles coordonnées d'un point de rebroussement de la trajectoire de la goutte

74. On fixe dans un premier temps la valeur de  $r_1$ . Déterminer la valeur maximale  $v_{0z,\max}$  de  $v_{0z}$  pour laquelle la trajectoire de la goutte peut admettre un point de rebroussement en fonction de  $r_1$ .

$$\text{Au rebroussement, } \dot{r}_1 = \dot{z}_1 = 0. \quad \frac{L_z^2}{m^2 r_1^2} = \frac{L_z^2}{m^2 r_0^2} + v_{0z,\max}^2 - \frac{qQ/2a}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z_0+a+\sqrt{r_0^2+(z_0+a)^2}}{z_0-a+\sqrt{r_0^2+(z_0-a)^2}}.$$

75. Comparer  $r_1$  à  $r_0$ .

$$E_{p,\text{elec}} < 0, \text{ donc } r_1 < r_0.$$

76. En déduire une valeur minimale pour  $v_{0z,\max}$ .

$$v_{0z,\max}^2 > -E_{p,\text{elec}}(r = r_0, z = 0).$$

77. Exprimer la condition précédente en fonction de  $r_0$ ,  $v_{0\theta}$  et  $a$  pour  $r_0 \ll a$ .

$$\text{À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en } a/r_0, \text{ on obtient } v_{0z,\max}^2 > 2v_{0\theta,\max}^2 \ln \frac{2a}{r_0}.$$

78. Interpréter physiquement l'existence d'un tel point de rebroussement.

*L'énergie cinétique de translation est transformée en énergie cinétique de rotation par le champ électrique. Le moment cinétique étant conservé, l'orbite se resserre augmentant la force de rappel qui ramène la particule le long de l'aiguille.*

**Données :**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x} + C.$$

**Bibliographie :**

1. Hergé. *Le secret de la Licorne*. Casterman, 1999
2. K. Mc Donald. Rocket car. *Online personal notes*
3. K. Mc Donald. Spin-orbit coupling in the earth-moon system. *Online personal notes*
4. Darwin G.H. The determination of the secular effects of tidal friction by a graphical method. *Proc. Roy. Soc. London*, 29(168), 1879
5. McCarty L. On the electromagnetically damped mechanical harmonic oscillator. *American Journal of Physics*, 64(7), 1998
6. C. Garing. *Magnétisme : statique, induction et milieux*. Ellipses, 1999
7. K. Mc Donald. An electric bottle : Charged particle orbiting a charged needle. *Online personal notes*

## Note : quelques exercices classiques de mécanique

- Chute libre sans frottement, avec frottements en  $-av$  ou en  $-\beta v^2$ , mouvement balistique,
- Pendule simple, système masse ressort, oscillateur harmonique avec ou sans frottements, avec ou sans forçage,
- Bille sur un cerceau en rotation, pendule de Foucault,
- Modèle de l'électron élastiquement lié,
- Problème de Kepler : cas du mouvement circulaire uniforme, vecteur de Laplace,
- Frottements solide : le plan incliné,
- Roulement sans glissement d'une sphère/ un cylindre sur un plan incliné,
- Choc élastique de deux particules, étoile double, poussée d'une fusée,
- Particule dans un champ magnétique constant.