

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Composition de physique ♦ Session : 2001

A - Énergie, impulsion et moment cinétique du rayonnement électromagnétique

1. Énergie électromagnétique

1.1. $\vec{F} = q(\vec{E} + v \wedge \vec{B})$

1.2.
$$\begin{cases} \vec{\text{div}} \vec{B} = 0 & (M_1) & \vec{\text{div}} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (M_3) \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (M_2) & \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) & (M_4) \end{cases}$$

1.3. $0 = \vec{\text{div}}(\vec{\text{rot}} \vec{B})$, soit (M_4) et (M_3) : $\vec{\text{div}} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

1.4. Cas ponctuel : $\rho = q(\vec{E} + v \wedge \vec{B}) \cdot v = \vec{j} \cdot \vec{E}$

Cas volumique : $d\rho = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \Leftrightarrow \frac{d\rho}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

1.5. 1.5.1. $\frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} u d\tau \right) = - \oint_{(V)} \vec{R} \cdot d\vec{S} - \iiint_{(V)} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$ (V fixe)

d'où : $\vec{\text{div}} \vec{R} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$

1.5.2. $U(V, T) = U(V, 0)$ en régime périodique, ainsi :

$$0 = \int_0^T p_{\text{moyen}} dt - \int_0^T p_{\text{exp}} - \text{moy} dt \Rightarrow \langle p_{\text{moyen}} \rangle = \langle p_{\text{exp}} - \text{moy} \rangle$$

1.6. 1.6.1. $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$; $u = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$

1.6.2. $\vec{\text{div}} \vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right]$

soit :

$$\vec{\text{div}} \vec{R} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

CQFD

2. Impulsion du rayonnement électromagnétique

2.1. Impulsion cédée à la matière : approche ondulatoire

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E}_{(0,n)} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}_{(0,n)} \right) + \vec{F}_{\text{autres}}$$

$$\text{Ainsi : } \Delta \vec{p} = q \int_{t=0}^T \left(\vec{E}_{(0,n)} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}_{(0,n)} dt \right)$$

$$\vec{E} \text{ est harmonique : } \int_0^T \vec{E}(0,t) dt = 0$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_z \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{c} \vec{u}_z$$

par transversalité de $\vec{E}$.

$$\text{Donc : } \Delta \vec{p} = \frac{u_z}{c} \int_0^T \int_0^p q \vec{v} \cdot \vec{E} dt = \left[\frac{W}{c} \right] \vec{u}_z = \Delta p$$

2.2. Impulsion et énergie du photon

2.2.1.

$$E_{\text{photon}} = h\nu = \left[\frac{p_{\text{photon}}}{c} \right] c$$

2.2.2. À la question 2.1., chaque photon absorbé fournit à la matière l'impulsion

$$\left[p = \frac{E_{\text{photon}}}{c} \vec{u}_z \right], \text{ d'où la cohérence des résultats.}$$

2.3. Pression de radiation sur une surface parfaitement réfléchissante

2.3.1. 2.3.1.α. $d^2 N = \frac{n}{2} dS c dt$ (n : nombre total de photons par unité de volume).

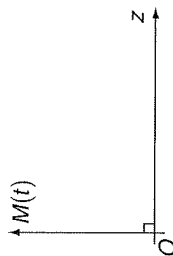
$$d^2 p = 2 \frac{h\nu}{c} \vec{u}_z d^2 N = \left[n h\nu dS dt \vec{u}_z \right]$$

$$\text{d'où : } d\vec{F} = n h\nu dS \vec{u}_z$$

$$\left[P = n h\nu = u \right]$$

2.3.1.β. Pour chaque valeur de ν , on a la relation $P = u$; par sommation des contributions, la forme de la relation est donc conservée.

2.3.2. Δp cédée par un photon est affectée d'un facteur $\cos \theta$, de même que le volume du cylindre.



Ainsi :

$$\left[P = u \cdot \cos^2 \theta \right]$$

2.3.3.

$$P = u \cos^2 \theta$$

or :

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{3} \left(\overline{\cos^2 \theta} + \overline{\cos^2 \theta'} + \overline{\cos^2 \theta''} \right) = \frac{1}{3}$$

Ainsi :

$$\left[P = \frac{1}{3} u \right]$$

2.3.4.α.

$$U(T, V) = u_0 \cdot V \Rightarrow dU = V du + u_0 dV$$

2.3.4.β.

$$dU = T dS - P dV \text{ avec } P = \frac{1}{3} u$$

donc :

$$dS = V \frac{du}{T} + \frac{4}{3} \frac{u}{T} dV$$

2.3.4.γ. Par le théorème de Cauchy-Schwartz appliqué à $S_{(u,v)}$:

$$\frac{u'}{T} = \frac{4}{3} \left[\frac{u'}{T} - \frac{u}{T^2} \right] \Rightarrow \frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T}$$

et :

$$\left[u(T) = AT^4 \right]$$

3. Collisions élastiques photons-électrons

3.1. Effet Compton

3.1.1. L'énergie d'ionisation correspondante doit être très faible devant l'énergie des photons incidents.

$$\frac{\vec{p}_1}{p_1} + 0 = \frac{\vec{p}_1'}{p_1'} + \frac{\vec{p}_2'}{p_2'} \quad (1)$$

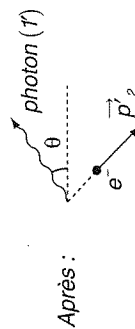
$$p_1 c + mc^2 = E_1' + p_1' c \quad (2)$$

et :

avec :

$$E_2' = p_2'^2 c^2 + m^2 c^4$$

photon (1) e^- (2) : Avant



$$(1) \Rightarrow p_2'^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2 p_1 p_1' \cos \theta$$

$$(2) \Rightarrow p_2'^2 = \frac{E_2'^2}{c^2} - m^2 c^2 = \left((p_1 - p_1') + mc \right)^2 - m^2 c^2$$

d'où : $\cos \theta = mc \left(p_1^{-1} - p_2^{-1} \right) + 1 \Rightarrow \boxed{\delta \lambda = \lambda' - \lambda = \lambda \cdot (1 - \cos \theta)}$

3.1.3. $\alpha.$

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda} \sim \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{h}{\lambda mc} = \frac{h\nu}{mc^2} < 1 \quad \text{si} \quad \boxed{h\nu \ll mc^2}$$

3.1.3.b. Dans ce cas, le photon voit son impulsion $\vec{p}$ varier, sans céder pratiquement d'énergie.

3.2. Diffusion Thomson

3.2.1.

$$\delta \lambda = 0$$

3.2.2. Il y a interaction avec des électrons plus liés, donc avec l'ensemble du réseau ; $\lambda' \ll \lambda$; le choc est alors quasi-élastique, comme au § 3.1.3.

4. Collisions inélastiques photons-matière

4.1. Absorption de photon

4.1.1.

$$(\vec{\mathcal{P}} + \vec{\mathcal{P}}_0)^2 = \vec{\mathcal{P}}_1^2$$

soit : $E_0^2 + 2 h\nu E_0 = E_1^2$

4.1.2.

$$\boxed{\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{h\nu_0}{2 m_0 c^2}}$$

4.2. Émission de photons

4.2.1.

$$(\vec{\mathcal{P}}' - \vec{\mathcal{P}})^2 = \vec{\mathcal{P}}_0^2$$

d'où :

$$\boxed{\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{h\nu_0}{2 m_1 c^2} \right)}$$

de même :

$$\boxed{\frac{\Delta\nu'}{\nu_0} = - \frac{h\nu_0}{2 m_1 c^2}}$$

4.2.2.

4.3. Expérience de résonance optique

4.3.1. Pour un nucléon, $E_0 \sim 1 \text{ GeV}$; pour un noyau dont le nombre de masse est de l'ordre de la dizaine, $E_0 \sim 10 \text{ GeV}$

Pour une transition optique, $h\nu \sim 1 \text{ eV}$.

Ainsi :

$$\boxed{\frac{h\nu_0}{mc^2} \sim 10^{-10}}$$

4.3.2.

$$m\nu^2 \sim k_B \cdot T \Rightarrow \frac{\nu}{c} \sim \left(\frac{k_B T}{mc^2} \right)^{1/2} \sim 10^{-6}$$

4.3.3. Les déplacements des fréquences sont donc très inférieurs aux larges Doppler, d'où la possibilité de mener des expériences de résonance optique sur des vapeurs, puisqu'il y a recouvrement.

5. Moment cinétique de rayonnement : approche ondulatoire

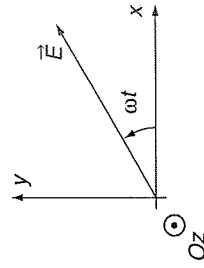
5.1. 5.1.1.

$$\sigma_{Oz} = u_z \cdot \int_0^T \vec{\Gamma}_0 dt$$

d'où : $\sigma_{Oz} = u_z \cdot \int_0^T (\vec{\Gamma}_0 - \vec{\Gamma}_0) dt$

$$\boxed{\sigma_{Oz} - \sigma_{Oz} = u_z \cdot \int_0^T F dt \wedge \vec{OO'} = \Delta \vec{p}}$$

et :



Ainsi : $\sigma_{Oz} - \sigma_{Oz} = 0$ puisque $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \parallel u_z$ (cf. § A.2.1.)

5.1.2. $(\vec{v} \wedge \vec{B})$ étant parallèle à Oz :

$$\sigma_{Oz} = q \int_0^T (\vec{OM} \wedge \vec{E}_{0,n}) \cdot u_z = \boxed{-q \int_0^T \vec{OM} \cdot \left(u_z \wedge \vec{E}_{0,n} \right) dt}$$

$$\frac{dE_{0,n}}{dt} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_{0,n}}{\omega}$$

5.2. 5.2.1.

$$\int_0^T \vec{OM} \cdot \left(u_z \wedge \vec{E} \right) dt = \frac{1}{\omega} \int_0^T \vec{OM} \cdot \frac{dE_{0,n}}{dt} dt$$

5.2.2.

$$\text{soit : } \sigma_{0z} = -\frac{q}{\omega} \left[\underbrace{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{E}}_{=0} - \int_0^T \overrightarrow{E}_{(0,t)} \cdot \overrightarrow{v} dt \right] = \frac{1}{\omega} \int_0^T q \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{v} dt$$

$$\text{Bilan : } \sigma_{0z} = \frac{W}{\omega}$$

5.2.3. Cette dernière relation doit être vérifiée pour chaque photon associé à cet état de polarisation : $[\sigma_{0z}] = +\hbar$ pour la polarisation circulaire gauche.

5.3. Pour l'état de polarisation circulaire droite :

$$\frac{d\vec{E}}{dt} \Big|_{(0,t)} = -\omega \vec{u}_z \wedge \vec{E}_{(0,t)}$$

$$\text{d'où : } \sigma_{0z} = -\hbar$$

5.4. L'état de polarisation rectiligne est superposition cohérente des deux états précédents, la mesure de σ_{0z} d'un photon donnera les **deux résultats équiprobables** $+\hbar$ et $-\hbar$.

B - Approche classique du magnétisme atomique

1. Moment magnétique orbital électronique

$$1.1. \quad \vec{\gamma} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OM} \wedge q \vec{v} \quad ; \quad \vec{\sigma}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m_e$$

$$\text{donc : } \vec{\gamma} = \gamma \vec{\sigma}_0$$

$$\text{avec : } \gamma = \frac{q}{2 m_e} = \left[-\frac{e}{2 m_e} \right] = \gamma$$

$$1.2. \quad \gamma = -8,793 \cdot 10^{10} \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1} \quad (\text{ou } \text{C} \cdot \text{kg}^{-1})$$

2. Théorème de Larmor

$$2.1. \quad \text{Deux méthodes} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Heisenberg } m_e \omega^2 r \sim \hbar \quad \omega \sim \sqrt[3]{\frac{\hbar}{m_e}} \sim \omega \\ \text{RFD } m_e \omega^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad ; \quad \omega_r \sim 10^6 \text{ rad.s}^{-1} \end{array} \right.$$

$$2.2. \quad \vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$$

$$2.2.1. \quad m_e a_r = q \left(\vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \wedge \vec{B}_0 + \vec{F}_{cl} + \vec{F}_{in\text{ cor}}$$

$$\vec{F}_{in\text{ cor}} = -2 m_e \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \quad ; \quad \vec{\Omega}_L = + \frac{e}{2 m_e} \vec{B}_0$$

$$2.2.2. \quad \vec{\Omega}_L = 8,793 \cdot 10^{10} \text{ rad.s}^{-1}$$

2.2.2.β. $[\Omega_L] \ll \omega_c$ (rapport de l'ordre de 10^{-5}).
La force magnétique est perturbatrice.

$$2.3. \quad q \vec{B}_0 = -2 m_e \vec{\Omega}_L \Rightarrow q (\vec{\Omega}_L \wedge \overrightarrow{OM}) \wedge \vec{B}_0 = 2 m_e \vec{\Omega}_L \wedge (\vec{\Omega}_L \wedge \overrightarrow{OM})$$

En outre, $\vec{F}_{in\text{ cor}} = -m_e \vec{\Omega}_L \wedge (\vec{\Omega}_L \wedge \overrightarrow{OM})$, donc :

$$m_e a_{\vec{r}_L} = \vec{F}_{cl} + m_e \vec{\Omega}_L \wedge (\vec{\Omega}_L \wedge \overrightarrow{OM}) = \vec{F}_{cl} - m_e \vec{\Omega}_L^2 \overrightarrow{H_M}$$

où $\vec{H}$ est la projection orthogonale de $\vec{M}$ sur $\vec{Oz}$.

Le rapport des deux normes est de l'ordre de $\left(\frac{\Omega_L}{\omega_c} \right)^2 < 10^{-10}$, d'où la conclusion.

3. Effet Zeeman classique

3.1. $Z(i)$ correspond au mouvement rectiligne sinusoïdal.

$$\text{Par ailleurs, } \cos\theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\text{donc : } \underline{X} = (X + iY) = \frac{X_0}{2} \left(e^{i(\omega_f + \omega_0)} + e^{-i(\omega_f + \omega_0)} \right) + i \frac{Y_0}{2} \left(e^{i(\omega_f + \omega_0)} + e^{-i(\omega_f + \omega_0)} \right)$$

$$\text{soit : } \underline{X} = A e^{i(\omega_r t + \alpha)} + B e^{-i(\omega_f + \beta)}$$

$$\text{Avec : } A e^{i\beta} = \frac{1}{2} \left(X_0 e^{i\omega_r} + i Y_0 e^{i\beta_0} \right) \quad \text{et} \quad B e^{i\beta} = \frac{1}{2} \left(X_0 e^{i\omega_r} + i Y_0 e^{-i\beta_0} \right)$$

Revenons à :

$$\underline{X} = A e^{i(\omega_r t + \alpha)} + B e^{-i(\omega_f + \beta)}$$

Le premier terme correspond à un **mouvement circulaire gauche** ;
le second terme correspond à un **mouvement circulaire droit**.

3.2. 3.2.1. Le mouvement rectiligne est le même dans $(\vec{H}_0)$; la fréquence correspondante vaut :
 $\vec{v} = \vec{v}_r$

Pour le **mouvement tournant**, dans $(\vec{H}_L)$, dans le **sens trigonométrique** :

$$\omega_{H_0} = \omega_r + \Omega_L \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_r + \frac{e B_0}{4 \pi m_e}$$

Pour celui tournant dans le sens horaire :

$$\omega_{\text{ho}} = \omega_e - \Omega_L \quad \text{d'où} \quad \nu_e = \nu_e - \frac{eB_o}{4\pi m_e}$$

$$\frac{\Delta\nu}{B_o} = \frac{e}{2\pi m_e} \frac{|\gamma|}{\pi} = 2,799 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \cdot \text{T}^{-1}$$

soit : $2,799 \cdot 10^4 \text{ MHz} \cdot \text{T}^{-1}$

3.3. 3.3.α. Ce modèle classique donne le bon ordre de grandeur.

3.3.β. Le nombre de raies observées expérimentalement n'est pas nécessairement égal à 3, par contre.

$$P_{\text{res}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\text{mini}}} = pF$$

avec : $p = \frac{2e'}{\lambda}$, en incidence normale et $F = \pi \frac{R^{1/2}}{1-R}$

$$\frac{\Delta\lambda_{\text{mini}}}{\lambda} = \frac{1}{pF} = \frac{\lambda}{2e'F} \Leftrightarrow \frac{\Delta\lambda_{\text{mini}}}{\lambda^2} = \frac{1}{2e'F}$$

Puisque $\nu = \frac{c}{\lambda}$, le décalage Zeeman $\Delta\lambda$ vérifie $\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \Delta\nu = \frac{|\gamma|}{\pi} B_o$

Ainsi : $\frac{\Delta\lambda_{\text{seem}}}{\Delta\lambda_{\text{mini}}} = \frac{|\gamma| B_o \cdot 2e'F}{\pi \cdot c} \sim \frac{600}{\pi \cdot c}$

Comme attendu, la séparation est aisée, de ce point de vue.

$$p = \frac{2e'}{\lambda} \nu = \frac{e'}{c} \Delta\nu \Rightarrow \Delta p = \frac{e'}{c} \Delta\nu = \frac{e'}{c} \frac{|\gamma|}{\pi} B_o$$

$\Delta p = 0,93$: il y a quasiment décalage d'une frange.

3.4.2.γ. Lorsque e' passe de 0 à 1 cm, les systèmes d'anneaux se décalent progressivement, symétriquement par rapport aux anneaux de la raie centrale, quand elle existe.

C - Approche classique de la résonance magnétique

1. Effet gyroscopique

$$1.1. \quad \vec{R} = \text{grad}_{\vec{u}} (\vec{M} \cdot \vec{B}_o) = \vec{0} \text{ car } \vec{B}_o \text{ est uniforme.}$$

$$1.2. \quad 1.2.1. \quad \vec{F}_o = \vec{M} \wedge \vec{B}_o \quad (\text{valeur indépendante du choix de } 0, \text{ ici}).$$

$$1.2.1.\beta. \quad E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_o$$

$$1.2.2. \quad E_p \text{ extrême} \Rightarrow \vec{M} \parallel \vec{B}_o$$

$$E_p \text{ minimale} \Rightarrow \text{même sens.}$$

$$1.3. \quad 1.3.1. \quad \frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \vec{M} \wedge \vec{B}_o \Rightarrow \frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \wedge \vec{B}_o$$

$$\text{Ainsi :} \quad \frac{d}{dt} (\vec{M}^2) = 2 \vec{M} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{M}^2 = \text{cste}}$$

$$1.3.2. \quad 1.3.2.\alpha. \quad \frac{d\vec{M}_z}{dt} = \gamma \vec{M} \wedge \vec{B}_o \cdot \vec{u}_z = \gamma (\vec{M} \wedge \vec{B}_o) \cdot \vec{u}_z = 0 \quad \text{puisque} \quad \vec{B}_o \parallel \vec{u}_z$$

$$\text{Donc :} \quad \boxed{\vec{M}_z = \text{cste}}$$

$$1.3.2.\beta. \quad \text{cste} = \vec{M}_z = M B_o \cos \theta \quad \text{avec} \quad \theta = \text{cste}$$

$$\text{Donc :} \quad \boxed{\theta = \text{cste}}$$

$\vec{M}$ engendre donc un tronç de cône d'axe $(0, B_o)$: il y a précession.

$$1.4. \quad 1.4.1. \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma \vec{B}_o \wedge \vec{M} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = -\gamma B_o}$$

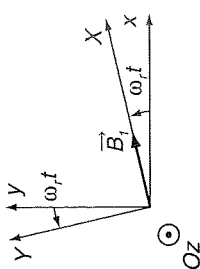
$$1.4.2. \quad \gamma = \gamma_{\text{class}} = -\frac{e}{2m_e} ; \quad \boxed{\omega_0 = -\frac{e}{2m_e} B_o = -\Omega_L}$$

2. Première interprétation « classique » d'une expérience de résonance paramagnétique électronique

$$2.1. \quad \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R_0} = \gamma \frac{d\sigma}{dt} = \gamma \vec{M} \wedge (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)$$

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R_0} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \wedge \vec{M}$$

soit :



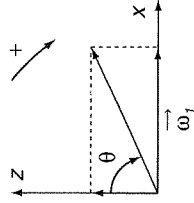
$$2.2. \quad \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R_0} = \frac{d\vec{M}}{dt} + \vec{\omega}_L \wedge \vec{M}$$

$$\text{d'où : } \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right]_{R_1} = \left[(\omega_0 - \omega_r) \vec{u}_c + \vec{\omega}_1 \right] \wedge \vec{\omega} = \left[(\vec{\omega}_1 - \Delta\omega) \wedge \vec{\omega} \right]$$

- 2.3. 2.3.1. $\Delta\omega$ est fixe dans (R_1) (et dans (R_0)) ;
 $\vec{\omega}_1 = -\gamma \vec{B}_1$ est fixe dans (R_1) .

Donc : $(\vec{\omega}_1 - \Delta\omega)$ est fixe dans (R_1) .

$$\tan \theta = \frac{\omega_1}{-\Delta\omega} = \frac{\omega_1}{\omega_0 - \omega_r} \quad -\Delta\omega$$



- 2.4. Dans (R_1) , $\vec{\omega}$ précesse autour du vecteur constant $(\vec{\omega}_1 - \Delta\omega)$.

$\vec{\omega}_1$ n'oscillera entre $-\vec{\omega}_1'$ et $\vec{\omega}_1'$ que si $\theta = \frac{\pi}{2}$, soit si $\Delta\omega = 0$, ou bien : $\omega_1 = \omega_0$.

$$2.5. \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right]_{R_1} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\omega_1|} = \frac{2\pi}{|\gamma| B_1}$$

- 2.6. L'effet des phénomènes de relaxation sera faible pendant les premières pseudo-périodes si :

$$\tau \gg T = \frac{2\pi}{|\gamma| \cdot B_1} \Rightarrow B_1 \gg \frac{2\pi}{|\gamma| \cdot \tau}$$

- 2.7. $\vec{B}_2$ est la somme de $\vec{B}_1$ et de son symétrique $\vec{B}_1'$ par rapport au plan xOz.

$$\text{Dans } (R_1), \text{ lorsque } \Delta\omega = 0, \text{ on aura } \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right]_{R_1} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_1') \wedge \vec{\omega} \quad \text{avec } \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right]_{R_1} = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{\omega} = |\gamma| B_1$$

$\vec{\omega}_2$ tournant, dans ce référentiel, à la vitesse angulaire $2\omega_1$. Comme ω_1 , égale à ω_0 , est très grande devant ω_1 , et puisque le temps de réponse de $\vec{\omega}$ à $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_1'$ est de l'ordre de $\frac{2\pi}{\omega_1}$, l'action

de $\vec{B}_1'$ peut donc être réduite à sa valeur moyenne, qui est nulle.

Ainsi, $\vec{\omega}$ ne « verra » que la composante $\vec{B}_1$ de $\vec{B}_2$.

3. Prise en compte de la relaxation dans l'étude de la résonance magnétique

$$3.1. \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} - \vec{\omega}_r \wedge \vec{\omega} \right]_{R_1} = (\vec{\omega}_1 - \Delta\omega) \wedge \vec{\omega} + \frac{\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_1'}{\tau}$$

$$\left[\frac{du}{dt} = \Delta\omega \cdot v - \frac{u}{\tau} \right] ; \quad \left[\frac{dv}{dt} = -\omega_1 \vec{\omega}_1 \cdot \vec{u} - \Delta\omega \cdot u - \frac{v}{\tau} \right]$$

et :

$$\left[\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \omega_1 \vec{v} + \frac{\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_1'}{\tau} \right]$$

$$3.2. \quad v = -\frac{\vec{\omega}_1 \cdot \vec{u}}{1 + (\Delta\omega \cdot \tau)^2 + (\omega_1 \tau)^2} ; \quad \Delta\omega = \omega_r - \omega_0$$

- 3.2.1. α . Le centre de cette Lorentzienne $v = f(\omega_r)$ est en $\omega_r = \omega_0 = -\gamma B_0$; ω_0 est donc mesurable ; B_0 étant mesurable, on peut accéder à la valeur de γ .

En mesurant, pour une valeur suffisamment faible, et connue, de B_1 la demi-largeur à mi-hauteur de cette Lorentzienne (de valeur $\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \gamma^2 B_1^2}$), on peut également accéder à la valeur de τ .

$$3.2.1. \beta. \quad \omega_0 = |\gamma| B_0 \Leftrightarrow \nu_0 = \frac{|\gamma|}{2\pi} B_0 \approx 1,4 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

si $B_0 = 1 \text{ T}$; on est dans le domaine des ondes centimétriques.

- 3.2.2. Au centre de la résonance, $u = 0$ et le flux $\phi(t)$ est proportionnel à $v e^{i\omega t}$. L'amplitude $|e|$ est donc proportionnelle à $\left[\frac{\omega_0 \cdot \vec{\omega}_1 \cdot \tau}{1 + (\omega_1 \tau)^2} \right]$. ω_0 et $\vec{\omega}_1$ étant proportionnels à B_0 , cette amplitude est donc proportionnelle à B_0 .

$$3.2.3. \quad |v|_{\max} = \frac{\vec{\omega}_1 \cdot \omega_1 \tau}{1 + (\omega_1 \tau)^2} = \frac{\vec{\omega}_1}{\omega_1} \quad \text{avec } x' = \omega_1 \tau \quad \text{ou } x' = -\gamma B_1 \tau > 0$$

$|v|_{\max}$ dépend donc de B_1 .

$$3.2.3. \beta. \quad \text{La valeur optimale de } B_1 \text{ correspond à } x' = 1, \text{ soit } B_1 = \frac{1}{|\gamma| \tau}$$

$$\text{Alors : } |v|_{\max} = \frac{\vec{\omega}_1}{2}$$

- 3.2.4. Si $\omega_1 \tau \gg 1$, $|v|_{\max} \approx \frac{\vec{\omega}_1}{\omega_1 \tau}$. Pour autant, la résonance a un effet, puisque, en régime établi, $\vec{\omega}_0 - \vec{\omega}_1 \cdot \tau \approx -\omega_1 \tau v \approx \vec{\omega}_1$ si $\omega_r = \omega_0$.

De même $|u|_{\max} = \frac{\vec{\omega}_1 \cdot \omega_1 \tau}{2 [1 + (\omega_1 \tau)^2]^{1/2}}$ (valeur atteinte pour $\Delta\omega = \left(\frac{1}{\tau^2} + \omega_1^2 \right)^{1/2}$), vaudra sensiblement $\frac{\vec{\omega}_1}{2}$ si $\omega_1 \tau \gg 1$.

$$3.3. \quad \boxed{p = \Gamma_0 \cdot \omega_L} = \omega_L \Gamma_{\alpha} = \omega_L (-B_1 \cdot v) = B_1 \omega_L \frac{\gamma(\omega_1 \tau)}{1 + (\omega_1 \tau)^2 + (\omega_1 \tau)^2}$$

$$3.4. \quad 3.4.1. \quad \delta \gamma_{\text{mini}} \cdot B_0 = \Delta \omega_{0, \text{max}} = \frac{1}{\tau}$$

$$\delta \gamma_{\text{mini}} = \frac{1}{\tau B_0} = 0,426 \text{ rad} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

soit :

3.4.2. $\frac{\delta \gamma_{\text{mini}}}{\gamma}$ est de l'ordre de 10^{-9} ; c'est l'acuité des raies de résonance et la possibilité de mesure très précise des fréquences qui permettent la grande richesse des applications de la RMN.

3.4.3. La détection possible du moindre glissement de la fréquence RMN caractéristique d'un type de noyau, à B_0 donné, permet d'identifier le groupement (radical, molécule, in) auquel on a affaire : **le champ magnétique perçu par le noyau diffère plus ou moins de B_0 , selon l'importance de l'effet de blindage dû à l'environnement.**

D - Quantification des moments cinétiques

1. Expérience de Stern et Gerlach

1.1. Les atomes doivent, sur leur trajectoire, percevoir un champ $\vec{B}$ inhomogène, de composante B_z fonction de z :

$$\vec{F} = \text{grad} \left(\left(\vec{\mu} \cdot \vec{B} \right) \right) \underset{T_{\text{atome}} \ll T_{\text{therm}}}{\approx} \text{grad} \left(\gamma(\epsilon) B_z \right)$$

soit :

$$\boxed{\vec{F} = \gamma(\epsilon) \frac{dB_z}{dz} \vec{u}_z}$$

$$1.2. \quad \frac{Y}{L} \approx \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{F \cdot (l/v_0)}{mv_0} \sim \frac{\mu_B \cdot \frac{dB_z}{dz} \cdot l}{mv_0^2}$$

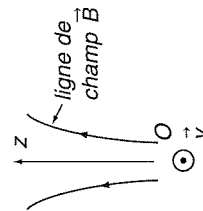
ou bien :

$$\boxed{Y \approx \frac{e \hbar \frac{dB_z}{dz} \cdot l L}{4 m_e k_B T} \sim 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}}$$

1.3. 1.3.1. Avec les atomes d'argent, on obtient deux taches, correspondant à :

$$\boxed{\gamma(\epsilon) = \pm \mu_B}$$

1.3.2. Ces deux taches étaient **symétriques** par rapport à celle obtenue en champ nul.



$$1.4. \quad \gamma(\epsilon) = \underbrace{\gamma_{\text{class}}}_{=2} \cdot \hbar \cdot m_s = \boxed{\pm \mu_B}, \text{ dans ce cas.}$$

2. Règles de quantification des moments cinétiques

2.1. Les résultats possibles de la mesure de J^2 sont du type $J \cdot (J+1)$, où J est un nombre entier positif ou nul, ou demi-entier positif.

2.2. Les résultats possibles de la mesure de J_z sont du type m_j , avec $-J \leq m_j \leq J$ (soit $2J+1$ valeurs possibles pour m_j , à J donné).

3. Facteur de Landé

$$3.1. \quad g = 1$$

$$3.2. \quad g = 2$$

$$3.3. \quad 3.3.1. \quad |L-S| \leq J \leq L+S$$

$$3.3.2. \quad \text{Pour } \left(\vec{L}^2 \right) : \quad L \cdot (L+1)$$

$$\text{Pour } \left(\vec{S}^2 \right) : \quad S \cdot (S+1)$$

$$3.4. \quad 3.4.1. \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \frac{d\vec{S}}{dt} = a \left[\vec{S} \wedge \vec{L} + \vec{L} \wedge \vec{S} \right] = \vec{0}$$

$$3.4.2. \quad \text{Comme } J \text{ est constant : } \frac{d}{dt} \left(\vec{L} \cdot \vec{J} \right) = \vec{J} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{J} \cdot \left(a \vec{S} \wedge \vec{L} \right)$$

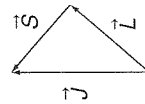
$$\text{soit : } \boxed{\frac{d}{dt} \left(\vec{L} \cdot \vec{J} \right) = \vec{J} \cdot \left(a \vec{J} \wedge \vec{L} \right) = 0}$$

$$\text{De même : } \boxed{\frac{d}{dt} \left(\vec{S} \cdot \vec{J} \right) = \vec{J} \cdot \left(a \vec{L} \wedge \vec{S} \right) = \vec{J} \cdot \left(a \vec{J} \wedge \vec{S} \right) = 0}$$

$$3.4.3. \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = a \vec{S} \wedge \vec{L} = a \vec{J} \wedge \vec{L} \Rightarrow \boxed{\vec{J} \cdot \vec{\Omega} = a \vec{J}}$$

$$\text{De même : } \frac{d\vec{S}}{dt} = a \vec{L} \wedge \vec{S} = a \vec{J} \wedge \vec{S} \Rightarrow \boxed{\vec{J} \cdot \vec{\Omega} = a \vec{J}}$$

$$3.4.4. \quad \vec{L} + 2\vec{S} = \vec{J} + \vec{S}, \text{ avec } \vec{J} \text{ constant.}$$



$$\left(\vec{L} + 2\vec{S} \right) = \vec{J} + \vec{S}_H = \vec{J} + \frac{\left(\vec{S} \cdot \vec{J} \right) \vec{J}}{J^2}$$

Donc :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow \vec{L} = \vec{J} - \vec{S}$$

3.4.5.

$$\vec{L}^2 = J^2 + S^2 - 2\vec{J} \cdot \vec{S}$$

soit :

$$\vec{J} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} [J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)]$$

d'où :

$$\left(\vec{J} \cdot \vec{S} \right) = \gamma \hbar \vec{J} = g \gamma_{class} \hbar \vec{J}$$

3.4.6.

$$\left(\vec{J} \cdot \vec{S} \right) = \gamma_{class} \left(\vec{\sigma}_L + 2\vec{\sigma}_S \right) = \gamma_{class} \hbar \left(\vec{L} + 2\vec{S} \right)$$

et :

$$\vec{g} \vec{J} = \left(\vec{L} + 2\vec{S} \right) = \vec{J} + \frac{\left(\vec{S} \cdot \vec{J} \right) \vec{J}}{J^2} \quad \text{ou} \quad g = 1 + \frac{\left(\vec{S} \cdot \vec{J} \right)}{J^2}$$

Ainsi :

$$\text{soit :} \quad g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

3.5. 3.5.1. Si $|\gamma B_0| \ll \omega J$, $\vec{L}$ et $\vec{S}$ précessent « rapidement » autour de $\vec{J}$, lui-même précessant « lentement » autour de $\vec{B}_0$.

3.5.2. Sur une période de précession de $\vec{L}$ et $\vec{S}$, $\left(\vec{J} \cdot \vec{L} \right)$ et $\left(\vec{J} \cdot \vec{S} \right)$ sont pratiquement toutes deux parallèles à $\vec{J}$, mais sur des durées plus importantes, les valeurs moyennes de $\vec{J} \cdot \vec{L}$ et de $\vec{J} \cdot \vec{S}$ sont parallèles à $\vec{B}_0$.

4. Retour sur l'expérience de Stern et Gerlach

$$\text{Ag : } 1s^2 ; 2s^2, 2p^6 ; 3s^2, 3p^6, 3d^{10} ; 4s^2, 4d^{10} ; 5s^1$$

4.1 4.1.1. Il y a, dans la seule sous-couche non saturée, la 5s, un seul électron ; donc :

$$L=0, \quad S=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad J=\frac{1}{2}$$

4.1.2.

$$\frac{L=0}{2S+1=2} \quad \frac{2S}{J=\frac{1}{2}}$$

4.2. $m_j = \pm \frac{1}{2}$, $g=2$; il y a deux taches (correspondant aux deux valeurs de m_j) soit :

$$\mu_z = 2 \cdot \gamma_{class} \cdot m_j \hbar = \pm \mu_B \quad \text{avec} \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

4.3. Avec des vapeurs de métaux alcalins, on a, là encore, un seul électron célibataire, situé sur une sous-couche s, donc L, S et J ont mêmes valeurs que pour l'argent. L'expérience de Stern et Gerlach donnera, là encore, deux taches, avec le même espacement (à T donnée).

5. Effet Zeeman en champ magnétique « faible »

5.1. Levée de dégénérescence

$$5.1.1. \quad \Delta E = E - E_0 = - \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\text{soit : } \Delta E = - g \gamma_{class} B_0 m_j \hbar = m_j g \mu_B B_0$$

$$\text{avec, ici : } m_j = -1, 0 \text{ ou } +1$$

5.1.2. Cette fois $\Delta E = m_j g \mu_B B_0$ avec :

$$m_j = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2} \quad \text{car} \quad J = \frac{3}{2}$$

5.2. Dans chaque cas, le photon emporte

$$\sigma_z = +\delta m \hbar, \text{ par conservation de } \sigma_z.$$

5.2.1.

$$\left[\delta m = -1 \right] \Rightarrow \left[\sigma_z_{photon} = -\hbar \right] ; \text{ on a un mouvement dans le sens opposé à celui du courant inducteur de } \vec{B}_0.$$

$$\left[\delta m = 0 \right] \Rightarrow \left[\sigma_z_{photon} = 0 \right] ; \text{ mouvement rectiligne selon } O_z // \vec{B}_0.$$

$$\left[\delta m = +1 \right] \Rightarrow \left[\sigma_z_{photon} = +\hbar \right] ; \text{ mouvement circulaire dans le sens du courant inducteur de } \vec{B}_0.$$

5.2.2. On suppose ici que $J_2 = J_1$.

$$5.2.2.a. \quad \begin{cases} E'_1 = E_1 + g_1 \mu_B B_0 m_{j1} \\ E'_2 = E_2 + g_2 \mu_B B_0 m_{j2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad m_{j2} = m_{j1} + \delta m$$

$$\text{ainsi :} \quad E'_2 - E'_1 = h\nu = h\nu_{12} + h\delta\nu_0 \left[(g_2 - g_1) m_{j1} + g_2 \delta m \right]$$

$$\begin{cases} \bullet \text{ si } \delta m = -1, & -J+1 \leq m_{j1} \leq J & \text{et} & \nu = \nu_{12} + \delta\nu_0 \left[(g_2 - g_1) m - g_2 \right] \\ \bullet \text{ si } \delta m = 0, & -J \leq m_{j1} \leq +J & \text{et} & \nu = \nu_{12} + \delta\nu_0 \left[(g_2 - g_1) m \right] \\ \bullet \text{ si } \delta m = +1, & -J \leq m_{j1} \leq J-1 & \text{et} & \nu = \nu_{12} + \delta\nu_0 \left[(g_2 - g_1) m + g_2 \right] \end{cases}$$

5.2.2.β. Si $\delta m = 0$, $\nu = \nu_2$ si $m = 0$; J doit donc être entier.

5.2.2.γ. Si $g_2 - g_1 = 0$, $\nu = \nu_{12} \pm g \delta \nu_0$; on retrouve, dans ce cas, le nombre de raies de l'effet Zeeman classique.

5.2.2.δ. Toujours dans ce cas, les valeurs des trois fréquences sont celles obtenues lors de l'interprétation classique si $g = 1$.

5.2.3. On suppose maintenant que $J_2 = J_1 = \frac{3}{2}$ et que $\delta g = g_2 - g_1$ est $\neq 0$, mais $|\delta g| \ll g_2$.

5.2.3.α. Dans une direction perpendiculaire à $\vec{B}_0$, on retrouve les trois groupes de fréquences : σ^- , σ^+ et π .

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \delta m = -1 : \sigma^- ; -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} ; \frac{\delta \nu}{\delta \nu_0} = -g_2 + m \delta g \quad (3 \text{ fréquences}) \\ \bullet \delta m = 0 : \pi ; -\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} ; \frac{\delta \nu}{\delta \nu_0} = m \cdot \delta g \quad (4 \text{ fréquences}) \\ \bullet \delta m = +1 : \sigma^+ ; -\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{1}{2} ; \frac{\delta \nu}{\delta \nu_0} = +g_2 + m \delta g \quad (3 \text{ fréquences}) \end{array} \right.$$

5.2.3.β. Pour σ^- et σ^+ , on obtiendra un état de polarisation « rectiligne selon $\vec{B}_0$ » (transversalité) et pour π , un état de polarisation rectiligne selon $\vec{B}_0$.

5.2.3.γ. Selon Oz, il n'y a pas de rayonnement correspondant à la transition π ; pour σ^- et σ^+ , on aura les deux séries de trois fréquences vues précédemment, avec des états de polarisation circulaires droit pour σ^- (autour de $\vec{B}_0$) et gauche pour σ^+ (idem).

5.3. Retour sur la résonance paramagnétique électronique

5.3.1. Si on note ΔE et Δm les variations de l'énergie et du nombre quantique magnétique m_j de l'atome, on a :

$$\Delta E = g \mu_B B_0 \Delta m \quad \text{avec} \quad g > 0$$

$$\text{Émission :} \quad \Delta E < 0 \Rightarrow \Delta m < 0 \Rightarrow \sigma_z^{\text{phor. emis}} = +\hbar$$

$$\text{Absorption :} \quad \Delta E > 0 \Rightarrow \Delta m > 0 \Rightarrow \sigma_z^{\text{phor. absorbe}} = +\hbar$$

5.3.2. Il y a bien cohérence avec le sens trigonométrique de rotation du champ $\vec{B}_1$ de la partie C2, de la même manière que dans un moteur synchrone (fourniture d'énergie par cession de moment cinétique).

6. Étude de l'aimantation paramagnétique

6.1. Calcul de Brillouin du vecteur-aimantation

$E_{m_j} = g \mu_B B_0 m_j$ soit, avec $m = m_j$:

$$P_m = \frac{e^{-m\beta}}{\sum_{m=-J}^{+J} e^{-m\beta}} \quad \text{avec} \quad x = g \beta \mu_B B_0, \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad \text{et} \quad Z = \sum_{m=-J}^{+J} e^{-m\beta}$$

$$\vec{y} = uZ n \cdot \sum_{m=-J}^{+J} P_m (-g \mu_B) m = \beta uZ$$

$$\text{avec :} \quad y = mg \mu_B \cdot \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dx}$$

$$\text{soit :} \quad y = n g \mu_B \frac{d}{dx} (\ln Z)$$

$$Z = e^{-Jx} (1 + \dots + e^{+2Jx}) = e^{-Jx} \frac{1 - e^{(2J+1)x}}{1 - e^{+x}} = \frac{\text{sh}\left(J + \frac{1}{2}\right)x}{\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} = Z$$

$$\frac{d}{dx} (\ln Z) = \left(J + \frac{1}{2}\right) \coth\left(\left(J + \frac{1}{2}\right)x\right) - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\vec{y} = ng \frac{\mu_B}{2} \left[(2J+1) \coth\left(\frac{(2J+1)x}{2}\right) - \coth\left(\frac{x}{2}\right) \right] uZ$$

6.2. Examen de quelques cas limites

6.2.1. 6.2.1.α. Si $x \gg 1$, les coth tendent vers 1, soit (puisque $J \neq 0$) :

$$\vec{y} \approx ng \frac{\mu_B}{2} (2J+1-1) uZ = ng \mu_B J uZ$$

Il y a saturation.

$$6.2.1.\beta. \quad x \gg 1 \Leftrightarrow T \ll g \mu_B \frac{B_0}{k_B} \approx 0,6 \text{ K, si } B_0 \sim 1 \text{ T.}$$

Avec $B_0 \sim 1 \text{ T}$, T doit descendre nettement en-dessous de 1 K.

$$6.2.2. \quad \text{th } x' \approx x' - \frac{x'^3}{3} \Rightarrow \coth x' \approx \frac{1}{x'} \left(1 + \frac{x'^2}{3}\right) = \frac{1}{x'} + \frac{x'}{3}$$

$$\text{Ainsi : } (2J+1) \coth\left(\frac{(2J+1)x}{2}\right) - \coth\left(\frac{x}{2}\right) \approx \frac{2}{x} + \frac{1}{3} \frac{x}{2} \left((2J+1)^2 - 1\right) - \frac{2}{x}$$

$$\text{d'où :} \quad \vec{y} = \frac{C}{T} B_0 \quad \text{avec} \quad C = \frac{ng^2 \mu_B^2}{3 k_B} \cdot J \cdot (J+1)$$

6.2.3. Le rapprochement a lieu lorsque J prend des valeurs grandes devant l'unité, d'après le principe de correspondance.

6.3. Cas particulier de N spins discernables : étude thermodynamique statistique

$$L=0 \quad ; \quad S=\frac{1}{2} \quad ; \quad J=\frac{1}{2} \quad ; \quad g=2 \quad ; \quad \beta=\frac{1}{k_B T}$$

$$6.3.1. \quad Z_N = e^{-\beta \epsilon_-} \cdot Z_{N-1} + e^{-\beta \epsilon_+} \cdot Z_{N-1} = \xi \cdot Z_{N-1}$$

d'où, par récurrence : $Z_N = \xi^N$

$$6.3.1.\beta. \quad \ln Z_N = N \ln \xi \quad \text{avec} \quad \epsilon_+ = -\epsilon_- = \mu_B B_0$$

$$\xi = e^{-\gamma} + e^{+\gamma} = 2 \cosh \gamma \quad \text{avec} \quad \gamma = \beta \mu_B B_0$$

$$\text{Bilan :} \quad \ln Z_N = N f(\gamma) \quad \text{avec} \quad f(\gamma) = \ln(2 \cosh \gamma)$$

$$6.3.2. \quad \bar{S} = -k_B \sum_r P_r \ln P_r \quad \text{où} \quad P_r = \frac{e^{-\beta \epsilon_r}}{Z_N}$$

$$6.3.2.\beta. \quad \bar{S} = k_B \sum_r P_r (\beta E_r + \ln Z_N) = k_B \left(\beta \sum_r E_r P_r + \ln Z_N \right) = \bar{S}$$

$$6.3.3. \quad \sum_r E_r P_r = - \sum_r \frac{(-E_r) e^{-\beta E_r}}{Z_N} = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N = \frac{N - \mu_B B_0}{N} f'(\gamma)$$

$$\text{Ainsi :} \quad \bar{S} = k_B \cdot N (-\gamma f'(\gamma) + f(\gamma)) = N k_B [f(\gamma) - \gamma f'(\gamma)] = \bar{S}$$

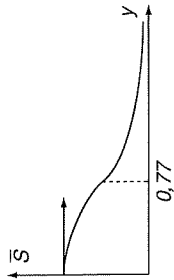
$$6.3.4. \quad \bar{S}'(\gamma) = N k_B [f'(\gamma) - \gamma f''(\gamma)]$$

$$\text{soit :} \quad \bar{S}'(\gamma) = -N k_B \gamma f''(\gamma)$$

$$f(\gamma) = \ln(2 \cosh \gamma) \Rightarrow f'(\gamma) = \tanh \gamma \Rightarrow f''(\gamma) = \frac{1}{\cosh^2 \gamma}$$

$$\text{donc :} \quad \bar{S}'(\gamma) = -N k_B \frac{\gamma}{\cosh^2 \gamma} \leq 0$$

$\bar{S}'$ ne s'annule que pour $\gamma = 0$.



6.3.4.β. $\bar{S}(\gamma=0) = N k_B \ln 2$; on a 2^N états équiprobables.

$$\bar{S} = N k_B \left[\ln(1 + e^{-2\gamma}) + 2\gamma \frac{e^{-2\gamma}}{(1 + e^{-2\gamma})} \right] \Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \bar{S} = 0$$

Dans le cas où $\mu_B B_0 \gg k_B T$, l'état fondamental est pratiquement le seul accessible ; c'est pourquoi $\bar{S}_{(\gamma \rightarrow +\infty)} = 0$.

6.3.5. On a désaimantation adiabatique lente d'une substance paramagnétique : on a donc conservation de $\bar{S}$, donc (monotonie) conservation de $\gamma = \frac{\mu_B B_0}{k_B T}$. Étant proportionnelle à B_0/T va donc diminuer de la même façon que B_0 .

6.3.6. On a ici négligé les interactions avec d'autres degrés de liberté, ce qui revient à négliger une capacité thermique. La constance de $\bar{S}$ entraîne une diminution de T , mais moins marquée, puisque $\gamma = \frac{\mu_B B_0}{k_B T}$ va diminuer : T diminue moins vite que B_0 .

6.4. Ordre de grandeur de T : le mK.

$$6.5.1. \quad d\bar{S}_\gamma = - \frac{\beta}{C} d\gamma + C_1 \frac{dT}{T} \Rightarrow 0 = \frac{\gamma^2}{2C} + C_1 \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_f}{T_i} = \exp \left[- \frac{C B_0^2}{2 C_1 T_i^2} \right]$$

6.5.2. Comportement explicite en $\exp \left[- \frac{A}{T_i^2} \right]$ (cf question précédente). En outre, si T_i est faible, C décroît (troisième principe).

E - Étude quantique de la résonance magnétique des protons

$$1. \quad [S_x^2, S_z] = S_x [S_x, S_z] + [S_x, S_z] S_x = -i S_x S_y - i S_y S_x$$

$$\text{soit :} \quad [S_x^2, S_z] = -i (S_x S_y + S_y S_x)$$

$$\text{De même :} \quad [S_y^2, S_z] = i (S_y S_x + S_x S_y)$$

$$\text{Ainsi :} \quad \boxed{\vec{S}^2, S_z} = [S_x^2 + S_y^2 + S_z^2, S_z] = 0$$

CQFD

2. 2.1. $S_x^* = S_x$; $S_y^* = S_y$

$S_+ = S_x + i S_y \Rightarrow S_+^* = S_x - i S_y = S_- = S_+^*$
De même $S_-^* = S_+$. Ces deux opérateurs ne sont pas hermitiques.

2.2. Puisque $S_+^* = S_-$, S_- est l'opérateur adjoint de S_+ .

2.3. $S_+ \cdot S_- = (S_x + i S_y) \cdot (S_x - i S_y) = S_x^2 + S_y^2 - i [S_x, S_y]$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{S_+ \cdot S_-} = \overrightarrow{S_-^2 - S_+^2 + S_z}$

2.4. $S_- S_+ = S_x^2 + S_y^2 + i [S_x, S_y] = \overrightarrow{S_-^2 - S_+^2 - S_z}$

3. 3.1. $\langle - | - \rangle = 1$; $\overrightarrow{S_-^2} | - \rangle = \frac{3}{4} | - \rangle$ et $S_z | - \rangle = -\frac{1}{2} | - \rangle$

3.1.α. $[S_z, S_+] = [S_z, S_x] + i [S_z, S_y] = i S_y - i^2 S_x = \overrightarrow{S_+ + i S_y} = S_+ = [S_z, S_+]$

3.1.β. $S_z \cdot S_+ | - \rangle = (S_z + S_x S_y) | - \rangle = \left(1 - \frac{1}{2}\right) S_+ | - \rangle = \frac{1}{2} S_+ | - \rangle$

Donc $S_+ | - \rangle$ est vecteur propre de l'opérateur S_z de valeur propre $m_s = +\frac{1}{2}$.

3.2. 3.2.α. $\overrightarrow{S_-^2 \cdot S_+} = \overrightarrow{S_-^2 \cdot S_x} + i \overrightarrow{S_-^2 \cdot S_y} = \overrightarrow{0} = 0$

3.2.β. $\overrightarrow{S_-^2 \cdot S_+} | - \rangle = S_+ \cdot \overrightarrow{S_-^2} | - \rangle = \frac{3}{4} S_+ | - \rangle$

Ainsi $S_+ | - \rangle$ est bien vecteur propre de l'opérateur S^2 , de valeur propre 3/4.

3.3. On pose : $| + \rangle = S_+ | - \rangle$

$\langle - | S_z | + \rangle = \frac{1}{2} \langle + | - \rangle$

Par ailleurs, $\langle - | S_z | + \rangle = (\langle + | S_z^* | - \rangle)^* = (\langle + | S_z | - \rangle)^*$
 $\Leftrightarrow \langle - | S_z | + \rangle = \left(-\frac{1}{2} \langle + | - \rangle\right)^* = \left[\frac{1}{2} \langle - | + \rangle\right]^*$

Par conséquent $\langle - | + \rangle = 0$.

3.4. $\| | + \rangle \|^2 = \langle - | S_- S_+ | - \rangle = \langle - | - \rangle \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = 1$

4. $\| S_+ | + \rangle \|^2 = \langle + | S_- S_+ | + \rangle = \langle + | + \rangle \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 0$

Donc $S_+ | + \rangle = | 0 \rangle$.

5. $[S_+ | + \rangle = | 0 \rangle$; $[S_- | - \rangle = | + \rangle$, d'où la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. S_- est l'adjoint de S_+ , d'où la matrice : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. $H(t) = -\gamma \hbar \vec{S} \cdot (\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t))$

7.1 $H(t) = -\gamma \hbar [B_0 S_z + B_1 (S_x \cos \omega_1 t - S_y \sin \omega_1 t)]$
 $\Leftrightarrow H(t) = -\hbar \left[\omega_0 S_z + \omega_1 (S_x \cos \omega_1 t - S_y \sin \omega_1 t) \right]$ avec $\begin{cases} 2 S_x = S_+ + S_- \\ 2 S_y = i (S_- - S_+) \end{cases}$

Ainsi : $H(t) = -\hbar \left[\omega_0 S_z + \frac{\omega_1}{2} (S_+ e^{i\omega_1 t} + S_- e^{-i\omega_1 t}) \right]$
 $H(t) = -\hbar \left[\omega_0 S_z + \frac{\omega_1}{2} (S_+ e^{i\omega_1 t} + S_- e^{-i\omega_1 t}) \right]$

7.2. Dans la base $\{| + \rangle, | - \rangle\}$, on a déjà écrit les matrices de S_+ et S_- ; celle de S_z vaut :

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

On obtient, dans cette même base, pour $H(t)$, la matrice :

$-\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \omega_0 & \omega_1 \exp(+i\omega_1 t) \\ \omega_1 \exp(-i\omega_1 t) & -\omega_0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} -\omega_0 & -\omega_1 \exp(+i\omega_1 t) \\ -\omega_1 \exp(-i\omega_1 t) & +\omega_0 \end{bmatrix}$

7.3. $P_{\pm}(t) = |\langle - | \psi(t) \rangle|^2$ est la probabilité de transition de $| + \rangle$ vers $| - \rangle$, par suite du couplage apporté par $B_1(t)$.

$$7.4. \quad H(t) |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \Leftrightarrow (H) \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = i\hbar \begin{pmatrix} \frac{da_+}{dt} \\ \frac{da_-}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\text{soit, avec : } \begin{cases} a_+ = b_+ \exp\left(+i \frac{\omega_+}{2} t\right) \\ \text{et } a_- = b_- \exp\left(-i \frac{\omega_-}{2} t\right) \end{cases} : (H) \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = i\hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{db_+}{dt} + i \frac{\omega_+}{2} b_+\right) e^{i \frac{\omega_+}{2} t} \\ \left(\frac{db_-}{dt} - i \frac{\omega_-}{2} b_-\right) e^{-i \frac{\omega_-}{2} t} \end{pmatrix}$$

7.4.1. Ce changement de notations correspond à un **changement de base (rotation de vitesse angulaire ω)**.

$$7.4.2. \quad \begin{cases} i \frac{db_+}{dt} = \frac{1}{2} [(-\omega_0 + \omega_+) b_+ - \omega_- b_-] = \frac{\delta\omega}{2} b_+ - \frac{\omega_-}{2} b_- = i \frac{db_+}{dt} \\ i \frac{db_-}{dt} = \frac{1}{2} [-\omega_- b_+ + (\omega_0 - \omega_-) b_-] = -\frac{\omega_-}{2} b_+ - \frac{\delta\omega}{2} b_- = i \frac{db_-}{dt} \end{cases}$$

$$\text{avec : } \boxed{\delta\omega = \omega_+ - \omega_-}$$

7.4.3. On tire b_+ de la deuxième équation du système différentiel et, en réinjectant dans la première, on obtient l'équation différentielle en b_- :

$$\boxed{4 \ddot{b}_- + b_- (\delta\omega^2 + \omega_-^2) = 0}$$

7.4.4. À $t = 0$, $b_- = 0$ et, puisque $a_+(0) = 1$, $b_+(0) = 1$

$$i \frac{db_-}{dt} = -\frac{\omega_-}{2}, \text{ à } t = 0, \text{ soit : } \left(\frac{db_-}{dt}\right)_0 = i \frac{\omega_-}{2}$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{b_-(t) = \frac{i\omega_-}{\sqrt{\omega_-^2 + \delta\omega^2}} \sin\left[\sqrt{\omega_-^2 + (\delta\omega)^2} \frac{t}{2}\right]}$$

$$7.5. \quad P_{\pm_0} = \left| \langle - | \psi \rangle \right|^2 = |a_-|^2 = |b_-|^2 = \frac{\omega_-^2}{\omega_-^2 + (\delta\omega)^2} \sin^2\left[\sqrt{\omega_-^2 + \delta\omega^2} \frac{t}{2}\right]$$

7.6. $\delta\omega$ doit être nul, soit $\boxed{\omega_+ = \omega_0 = \gamma B_0}$.

7.6.2. On retrouve bien la **valeur de ω** , correspondant **au centre de la résonance obtenue dans l'approche classique**.

$$7.7. \quad \sin^2\left(\sqrt{\omega_-^2 + \delta\omega^2} \frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\sqrt{\omega_-^2 + \delta\omega^2} t\right]$$

$$\text{donc : } \boxed{\omega' = \sqrt{\omega_-^2 + \delta\omega^2} = \gamma \left\| \vec{B}_{\text{efficace}} \right\|}$$

Ce **champ efficace**, fixe dans le référentiel tournant avec $\vec{B}_1$, est **horizontal à la résonance magnétique**.