

# LP03 - CARACTÈRE NON GALILÉEN DU RÉFÉRENTIEL TERRESTRE

20 octobre 2016

*"Si on prend la Terre et qu'à un instant  $t$  on enlève le Soleil, qu'est ce qui se passe?"*

Jeremy Sautel & Alexandre Michel

ALEXANDRE FELLER

## Niveau : L2

## Commentaires du jury

Les prérequis de cette leçon comme les formules de changement de référentiel, doivent être bien maîtrisés afin de permettre une discussion aisée des phénomènes physiques en jeu. Les conditions dans lesquelles le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen doivent être clairement énoncées. La présentation d'exemples pertinents récents et non simplement historiques, est appréciée par le jury.

Il est important de dégager le cas où l'on peut négliger le caractère non galiléen d'un référentiel.

## Bibliographie

- ↗ *La physique par la pratique*, **Portelli** → La base
- ↗ *Cap prepa PSI*, **Portelli** → Il est cool aussi
- ↗ *Mécanique 1*, **BFR** → Toujours utile

## Prérequis

- Mécanique du point
- Formules de composition
- Connaissances élémentaires du système solaire

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le référentiel terrestre</b>	<b>2</b>
1.1	Définition . . . . .	2
1.2	Relativité galiléenne . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Translation elliptique de <math>\mathcal{R}_G</math> dans <math>\mathcal{R}_C</math></b>	<b>4</b>
2.1	Mouvement d'un point dans $\mathcal{R}_G$ . . . . .	4
2.2	Applications aux marées océaniques . . . . .	5
2.3	Limite de Roche . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Rotation de <math>\mathcal{R}_T</math> dans <math>\mathcal{R}_G</math></b>	<b>7</b>
3.1	Cinématique . . . . .	7
3.2	Pesanteur terrestre . . . . .	7
3.3	Anticyclone et dépressions . . . . .	8

## Introduction

Nous avons déjà vu l'étude des référentiels et leur importance en mécanique du point. Nous allons redévelopper ici la définition cruciale d'un référentiel galiléen et utiliser cette définition (qui n'est qu'idéale car il n'existe pas de référentiel galiléen au sens strict) pour caractériser le référentiel terrestre. Le caractère non galiléen de ce référentiel sera discuté à l'aide d'ordres de grandeur ainsi que les effets qui en découlent sur des phénomènes observés bien connus tels que les marées océaniques ou le sens de rotation des cyclones.

## 1 Le référentiel terrestre

Nous allons décrire dans cette section la manière dont on définit le référentiel terrestre ainsi que le caractère galiléen ou non d'un référentiel.

### 1.1 Définition



Nous définissons en premier lieu le référentiel de Copernic  $\mathcal{R}_C$ . Son origine se situe au centre de masse du système solaire et ses axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines considérées comme fixes. Nous discuterons plus tard la validité de cette hypothèse. Dans ce référentiel, on définit le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$  dont l'origine de  $\mathcal{R}_G$  est le centre de la Terre noté T et ses axes sont dirigés vers les mêmes étoiles que  $\mathcal{R}_C$ , considérées fixes car suffisamment éloignées. Le référentiel  $\mathcal{R}_G$  est donc en translation elliptique par rapport à  $\mathcal{R}_C$ . Il est important de noter que ici  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}_C} = \vec{0}$ .

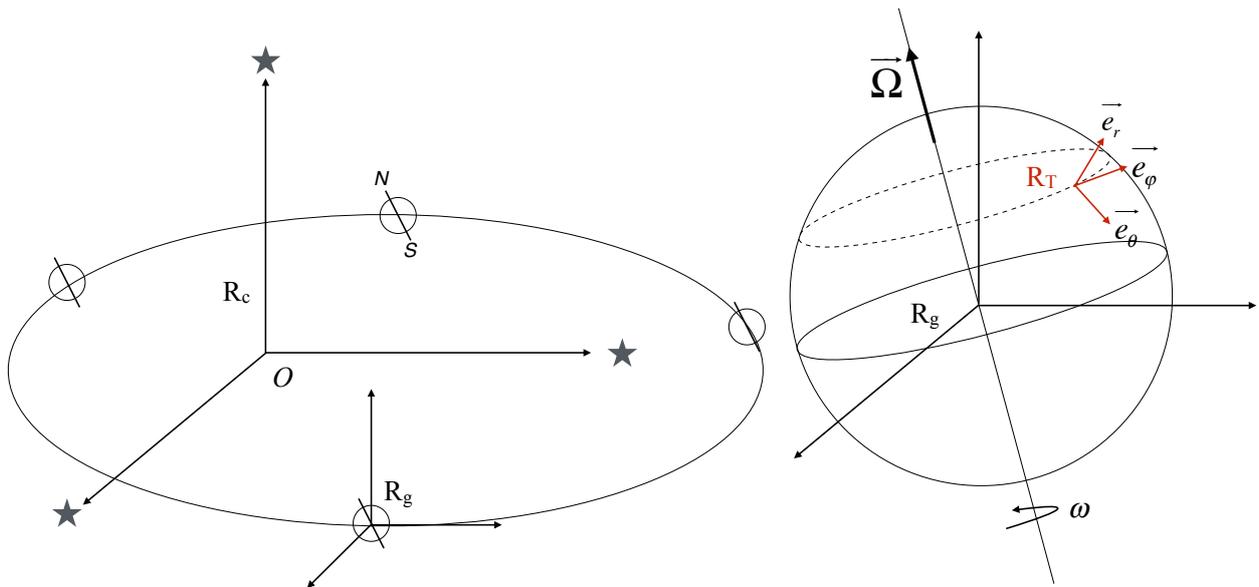


FIGURE 1

On fait alors un zoom sur la Terre dans le référentiel géocentrique et on définit alors un référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$  comme ayant son origine en T et que ces axes soient dirigés par les vecteurs de la base locale des coordonnées sphériques  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$  d'un point P appartenant à la Terre, ramenés en T. Le référentiel ainsi construit est en rotation dans le référentiel géocentrique d'où  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} \neq \vec{0}$ . Par ailleurs, le point T étant l'origine des deux référentiels, il n'y a pas de translation du référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$  dans  $\mathcal{R}_G$ .

Il est alors nécessaire comme nous le verrons dans la suite d'avoir une estimation de la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}_T$  dans  $\mathcal{R}_G$  pour discuter du caractère galiléen ou non du référentiel  $\mathcal{R}_T$ . Nous allons définir ici deux paramètres du mouvement de rotation propre de la terre dans le référentiel de Copernic :

$$\begin{cases} \text{Jour solaire } T_{sol} : \text{ temps entre deux zéniths} \\ \text{Jour sidéral } T_{sid} : \text{ temps nécessaire à la Terre pour réaliser une rotation propre} \end{cases}$$

On a bien sûr la définition pour le jour solaire d'être de 24 heures. Néanmoins pour avoir accès à la vitesse réelle de rotation de la Terre, il faut non plus prendre en compte le jour solaire mais le jour sidéral qui est défini comme le

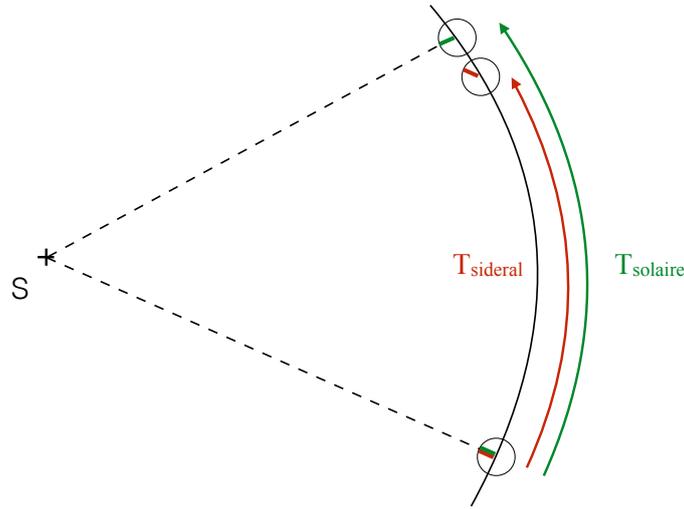


FIGURE 2

temps de rotation propre. Par de simples considérations géométriques, on écrit qu'un an (période de révolution de la Terre autour du Soleil) vaut  $365,25T_{sol}$  d'où  $366,25T_{sid}$ . Ainsi,

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{sid}} = \frac{2\pi}{\frac{365,25}{366,25}T_{sol}} = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Si nous ne considérons pas le jour sidéral mais uniquement le jour solaire nous obtenons  $\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Nous nous intéresserons désormais au caractère galiléen d'un référentiel en donnant notamment la définition d'un référentiel galiléen.

## 1.2 Relativité galiléenne



**Définition** : Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel un corps pseudo isolé a un mouvement rectiligne uniforme (on dit aussi que les deux premières lois de Newton s'appliquent).

### Remarque importante

Il n'existe pas de référentiel galiléen au sens strict.

En effet, considérons par exemple le référentiel de Copernic  $\mathcal{R}_C$ . Nous avons vu que ses axes pointaient en direction d'étoiles lointaines considérées comme fixes. En réalité, ces étoiles bougent sur un temps de l'ordre de  $T = 200 \times 10^6$  années correspondant au temps de rotation de notre galaxie sur elle-même. Si l'on considère un phénomène physique sur Terre de l'ordre d'un an, on voit que l'on peut largement négliger le déplacement de ces étoiles  $\rightarrow$  on peut considérer  $\mathcal{R}_C$  comme galiléen ce que l'on fera dans la suite de notre développement.

Le principe de la relativité galiléenne s'exprime comme étant l'invariance des lois de la physique newtonienne entre un référentiel galiléen et un autre. L'expression des lois dans le second référentiel étant donnée par la transformation de Galilée des lois dans le premier référentiel. C'est ainsi que dans le cas général, on définit la loi de composition des vitesses et des accélérations entre deux référentiels quelconques  $\mathcal{R}$  centré en O et  $\mathcal{R}'$  centré en O' pour un point matériel M quelconque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{/\mathcal{R}}(\text{M}) = \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(\text{M}) + \vec{v}_{/\mathcal{R}}(\text{O}') + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\text{O}'\text{M}} \\ \vec{a}_{/\mathcal{R}}(\text{M}) = \underbrace{\vec{a}_{/\mathcal{R}'}(\text{M}) + \vec{a}_{/\mathcal{R}}(\text{O}')}_{\text{translation}} + \underbrace{2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(\text{M})}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\text{O}'\text{M}}) + \left. \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\text{O}'\text{M}}}_{\text{entraînement}} \end{array} \right.$$

↓ Nous allons grâce à ces formules de composition, pouvoir exprimer la forme des lois dans le référentiel géocentrique puis dans le référentiel terrestre afin de discuter du caractère galiléen ou non de ces référentiels et des effets sur la dynamique d'un point matériel.

## 2 Translation elliptique de $\mathcal{R}_G$ dans $\mathcal{R}_C$

En reprenant les notations que l'on a introduites au paragraphe précédent, nous prenons ici  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$ ,  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_G$ ,  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}_C} = \vec{0}$  et  $O' \rightarrow T$ .

### 2.1 Mouvement d'un point dans $\mathcal{R}_G$

On définit P un point matériel de masse  $m$  et T le centre de la Terre. Nous allons appliquer la deuxième loi de Newton pour le point P dans le référentiel de Copernic que nous considérons galiléen

$$m \vec{a}_{/\mathcal{R}_C}(P) = \sum \vec{F}(P).$$

Puis avec la formule de composition des accélérations que nous avons vue au paragraphe précédent, nous voyons que le seul terme non nul est le terme de translation :

$$m (\vec{a}_{/\mathcal{R}_G}(P) + \vec{a}_{/\mathcal{R}_C}(T)) = \sum \vec{F}(P)$$

On applique maintenant le théorème du centre de masse dans  $\mathcal{R}_C$  pour le centre T de la Terre que l'on considère comme sphérique et donc ayant une masse  $M_T$  se rapportant au centre (théorème de Gauss). De plus, on ne prend en compte ici que les forces gravitationnelles dues aux autres astres du système solaire :

$$M_T \vec{a}_{/\mathcal{R}_C}(T) = \sum_{\text{astres } i \neq T} M_T \vec{\mathcal{G}}_i(T),$$

avec  $\vec{\mathcal{G}}_i(T)$  étant le champ gravitationnel qu'impose l'astre  $i$  au point T. Finalement, l'accélération du point P dans  $\mathcal{R}_G$  est :

$$\begin{aligned} m \vec{a}_{/\mathcal{R}_G}(P) &= - \sum_{\text{astres } i \neq T} m \vec{\mathcal{G}}_i(T) + \sum \vec{F}(P), \\ &= - \sum_{\text{astres } i \neq T} m \vec{\mathcal{G}}_i(T) + \sum_{\text{astres } i \neq T} m \vec{\mathcal{G}}_i(P) + m \vec{\mathcal{G}}_T(P) + \sum \vec{F}_{\text{autres}}(P), \\ \vec{a}_{/\mathcal{R}_G}(P) &= \underbrace{\sum_{\text{astres } i \neq T} (\vec{\mathcal{G}}_i(P) - \vec{\mathcal{G}}_i(T))}_{\text{marée}} + \underbrace{\vec{\mathcal{G}}_T(P)}_{\text{gravité terrestre}} + \underbrace{\frac{1}{m} \sum \vec{F}_{\text{autres}}(P)}_{\vec{a}_{\text{autres}}}. \end{aligned}$$

On va maintenant discuter de l'ordre de grandeur du nouveau terme de marée pour estimer "l'écart" de  $\mathcal{R}_G$  à un référentiel galiléen.

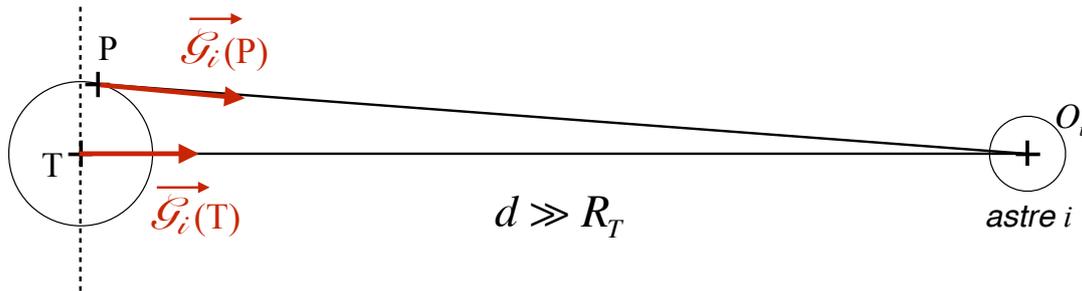


FIGURE 3

Considérons ici un point P situé sur ou dans la Terre (de centre T) et un astre  $i$  de centre  $O_i$ . On nomme la distance  $TO_i = d_i$  telle que  $d_i \gg R_T$  où  $R_T$  est le rayon terrestre. On peut dès lors négliger l'écart angulaire entre  $\vec{\mathcal{G}}_i(P)$  et  $\vec{\mathcal{G}}_i(T)$ . On nomme par la suite  $PO_i = d_i + \epsilon$  où  $\epsilon$  est une grandeur algébrique ( $< 0$  ou  $> 0$ ) et  $\epsilon \ll d_i$ . On réalise alors un DL à l'ordre 1 en  $\epsilon$  du terme de marée :

$$\begin{aligned}
\|\vec{\mathcal{G}}_i(\text{P})\| - \|\vec{\mathcal{G}}_i(\text{T})\| &= \frac{M_i G}{(d_i + \epsilon)^2} - \frac{M_i G}{d_i^2}, \\
&= M_i G \left( \frac{1}{(d_i + \epsilon)^2} - \frac{1}{d_i^2} \right), \\
&= \frac{M_i G}{d_i^2} \left( 1 - \frac{2\epsilon}{d_i} - 1 \right), \\
&= \frac{-2M_i G \epsilon}{d_i^3}
\end{aligned}$$

Notons l'importance du signe '-' ainsi que la décroissance en  $1/d_i^3$  ce qui donne les ordres de grandeurs suivants pour quelques astres du système solaire :

	Lune	Soleil	Jupiter
$M_i(\text{kg})$	$7 \times 10^{22}$	$2 \times 10^{30}$	$1.9 \times 10^{27}$
$d_i(\text{m})$	$3.8 \times 10^8$	$1.5 \times 10^{11}$	$6 \times 10^{11}$
$F_{\text{marée}} (\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$1.3 \times 10^{-3}$	$6 \times 10^{-4}$	$9 \times 10^{-9}$

On peut alors ne considérer que la contribution dans les forces de marées de la Lune et du Soleil.

## 2.2 Applications aux marées océaniques

Cette force de marée est moins importante que la force de gravité terrestre (de  $\approx 10^3$ ) mais peut avoir un effet non négligeable sur de grandes masses de matière fluide. Ainsi on peut appliquer ce terme de marée sur les océans et expliquer le phénomène de marée océanique.

Le schéma ci-dessous nous renseigne sur la direction et la norme de la force de marée en fonction de l'alignement du Soleil et de la Lune. On voit aisément que lorsque la Lune et le Soleil sont alignés avec la Terre, la force de marée est maximale et on a ainsi les phénomènes de grandes marées.

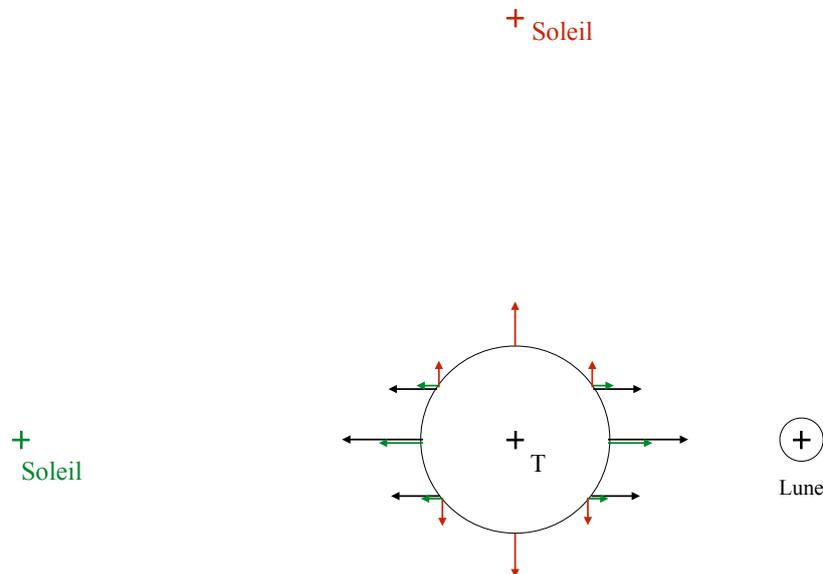


FIGURE 4

Dans un premier temps, on peut également considérer que sur un jour terrestre, la Lune ne se déplace pas par rapport à la Terre, ainsi on peut voir sur le schéma que l'on aura deux marées hautes et deux marées basses par jour.

Si maintenant, on prend en compte la rotation de la Lune qui fait le tour de la Terre en 28 jours, on peut expliquer le fait que les marées n'ont pas lieu tout les jours aux mêmes heures et qu'elles se décalent dans le temps (voir schéma ci-dessous). On décale quantitativement, l'heure des marées de  $24\text{h}/28$  chaque jour soit environ 50 minutes.

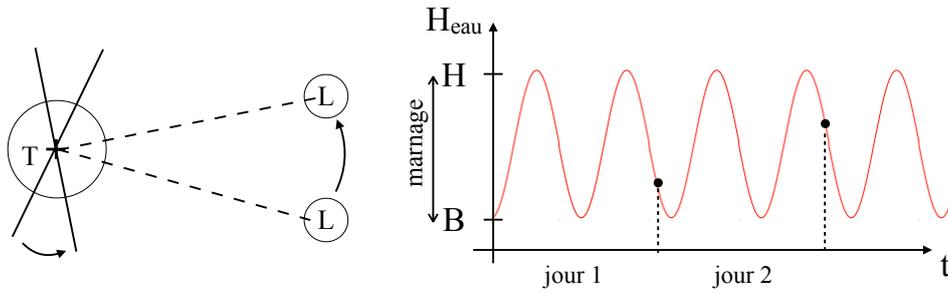


FIGURE 5

**Remarque :**

Notons que malgré les résultats généraux que nous sommes en mesure d'obtenir par un modèle purement statique, il existe de nombreux autres effets dynamiques dus notamment à la topographie des fonds océaniques et des côtes. Par exemple, le marnage défini comme la différence de hauteur entre marée haute et basse est beaucoup plus important dans la baie du Mont-Saint-Michel ( $\sim 14$  m) que sur la côte Atlantique Ouest ( $\sim 5$  m).

Le terme de marée a également un autre effet qui est celui de dilater la Terre. Ce phénomène lorsqu'il est amplifié, donne lieu à la limite de fragmentation d'une planète appelée limite de Roche.

### 2.3 Limite de Roche

Lorsque la distance entre deux astres diminue, on peut déterminer la distance critique à partir de laquelle, la force de marée deviendra égale en norme à la force gravitationnelle (cf schéma). A partir de cette limite, il ne peut y avoir existence de l'astre et il se fragmente.

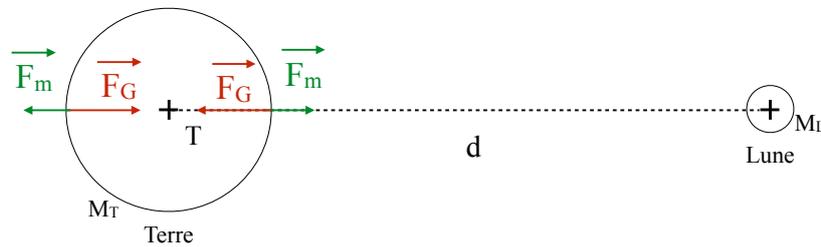


FIGURE 6

Nous calculons l'expression de la distance minimale qui peut séparer la Terre d'un astre  $i$  sans désintégration de la Terre. On prend pour cela un point  $P$  se situant sur la surface de la Terre et tel que  $T$ ,  $P$  et  $O_i$  soient alignés :

$$\begin{aligned} \text{terme de marée} &\leq \|\vec{\mathcal{G}}_T(P)\|, \\ \frac{2GM_i R_T}{d_i^3} &\leq \frac{GM_T}{R_T^2}, \\ d_i^3 &\geq R_T^3 \frac{2M_i}{M_T}, \\ d_i &\geq R_T \left( \frac{2M_i}{M_T} \right)^{1/3} \sim 2 \times 10^6 \text{ m pour la Lune} \end{aligned}$$

On a donc vu ici les applications déjà reliées au caractère non galiléen du référentiel géocentrique par rapport au référentiel de Copernic ce qui nous amène maintenant à discuter la non galiléanité du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique et donc par rapport au référentiel de Copernic.

### 3 Rotation de $\mathcal{R}_T$ dans $\mathcal{R}_G$

On prend maintenant avec les notations de la première partie,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_G$ ,  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_T$ ,  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} \neq \vec{0}$  et  $O' = O \rightarrow T$  (*i.e.* pas de translation).

#### 3.1 Cinématique

Comme dans la partie précédente on applique le principe fondamental de la dynamique à un point P solidaire de la Terre dans le référentiel  $\mathcal{R}_G$ . On obtient alors la même formule que celle donnée dans la partie 2.1. On fait alors un changement de référentiel pour passer du référentiel géocentrique au référentiel terrestre. La formule de composition des accélérations donne :

$$\vec{a}_{/\mathcal{R}_T}(P) = \vec{a}_{/\mathcal{R}_G}(P) - \vec{a}_{/\mathcal{R}_G}(T) - 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_T}(P) - \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} \wedge \vec{TP}) - \left. \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_G} \wedge \vec{TP},$$

d'où l'expression de l'accélération d'une particule dans  $\mathcal{R}_T$  :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{/\mathcal{R}_T}(P) = & \underbrace{\sum_{\text{astres } i \neq T} (\vec{g}_i(P) - \vec{g}_i(T))}_{\text{marée } \sim 10^{-6} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} + \underbrace{\vec{g}_T(P) - \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} \wedge \vec{TP})}_{\text{pesanteur } \sim 10-10^{-2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} \\ & - \underbrace{2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_T}(P)}_{\text{coriolis } \sim 10^{-2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \text{ avec } (v \sim 100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})} - \left. \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_G} \wedge \vec{TP} + \vec{a}_{\text{autres}} \end{aligned}$$

On a négligé la dépendance en temps de  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G}$  car son temps d'évolution caractéristique  $\tau$  est de l'ordre de 10000 ans. Ainsi on trouve avec l'estimation de  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G}$  faite en première partie qu'avec  $\|\vec{TP}\| \sim 10^6 \text{ m}$  on a  $\left. \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_G} \wedge \vec{TP} \sim 10^{-14} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . On voit de plus que pour que la force de Coriolis devienne importante, il faut qu'on ait de grandes vitesses pour le système considéré ainsi que de grandes masses et/ou de grandes longueurs caractéristiques du système.

#### 3.2 Pesanteur terrestre

On voit sur ce schéma que le champ de pesanteur est différent du champ gravitationnel. C'est d'ailleurs en suivant les lignes d'équipotentielles associées au champ de pesanteur que l'on peut estimer l'aplatissement de la Terre. En effet, la Terre est aplatie ce qui est du au caractère non galiléen du référentiel terrestre dans le référentiel géocentrique. La force qui provoque cet aplatissement est appelée force *centrifuge*.

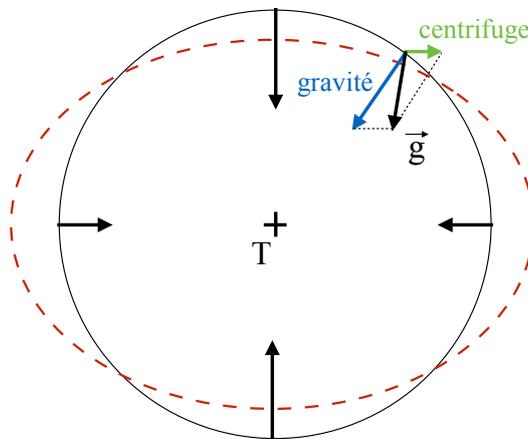


FIGURE 7

L'aplatissement de la Terre est bien du à deux effets combinés l'un étant le phénomène de marée découlant du caractère non galiléen du référentiel géocentrique et l'autre étant la force centrifuge découlant du caractère non galiléen

du référentiel terrestre. Néanmoins, on peut affirmer au vu des ordres de grandeurs que cet aplatissement est notamment dû à la force centrifuge.

### Remarque

On peut noter que ce n'est pas un hasard si la fusée Ariane décolle depuis la Guyane. C'est tout simplement que la pesanteur y est minimale et donc qu'il y a besoin de moins d'énergie pour la faire décoller.

## 3.3 Anticyclone et dépressions

On évalue avec une étude qualitative le sens de rotation des vents aux points de hautes pressions et basses pressions dans l'atmosphère terrestre. Cette application montre un système de longueur caractéristique et de masse importante justifiant que l'on ne peut négliger la force de Coriolis. Voici la conséquence de cette force appliquée sur de tels systèmes.

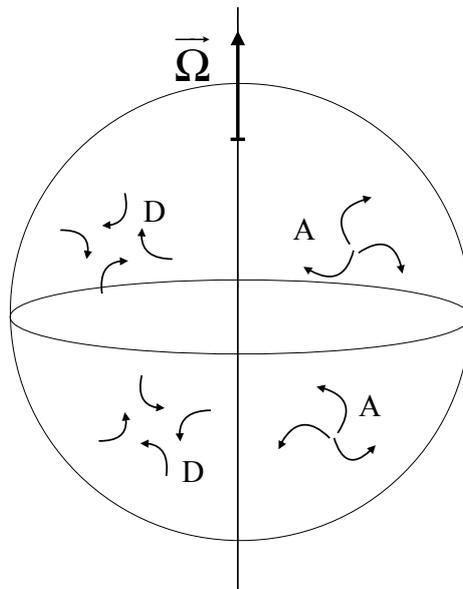


FIGURE 8

## Conclusion

On note que le caractère non galiléen du référentiel terrestre influe sur des phénomènes incluant soit de grandes masses, soit une grande étendue spatiale et/ou temporelle. On pourra effectivement au vu des ordres de grandeurs de nos expériences en laboratoire considérer le référentiel terrestre comme un référentiel galiléen si la durée de l'expérience n'est pas trop longue et si notre expérience n'est pas d'envergure trop importante.

**Ouverture :** Cela étant, il y a eu au LHC la prise en compte de tous ces paramètres car l'expérience nécessite une précision très importante.