

Leçon n°3 : Caractère non galiléen du référentiel terrestre. Conséquences. (PCSI ou 1^{er} CU)

Introduction

1. Référentiels non galiléens

1.1. Théorème de la résultante cinétique dans un référentiel non galiléen

1.2. Différents référentiels

2. Rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique supposé galiléen

2.1. Variation du champ de gravitation terrestre avec la latitude

2.2. Déviation à l'est

2.3. Pendule de Foucault

2.4. Autres exemples

3. Mouvement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique supposé galiléen

3.1. Terme de marée

3.2. Expression du terme de marée, ordre de grandeur

Conclusion

Introduction

Dans cette leçon nous appliquerons le théorème de la résultante cinétique (TRC) dans un référentiel galiléen, puis par un changement de référentiel nous déduisons son écriture dans un référentiel non galiléen.

Ce résultat nous permettra d'étudier le mouvement d'un corps dans le référentiel terrestre non galiléen et d'observer les phénomènes liés à la rotation de la terre et à son mouvement autour du soleil.

Inversement, ce sont ces phénomènes qui ont permis historiquement, de mettre en évidence le caractère non galiléen du référentiel terrestre.

1. Référentiels non galiléens

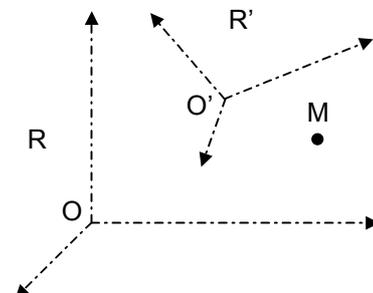
1.1. Théorème de la résultante cinétique dans un référentiel non galiléen

Considérons un référentiel non galiléen R' en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R et un point M de masse m mobile dans R' et R . Dans R le TRC s'écrit :

$$m\mathbf{a}_{M/R} = \mathbf{R}.$$

D'après la loi de composition des accélérations $\mathbf{a}_{M/R} = \mathbf{a}_{M/R'} + \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_C$, le TRC s'applique dans R' en ajoutant à la résultante des forces \mathbf{R} la force d'inertie d'entraînement $-\mathbf{m}\mathbf{a}_E$ et la force d'inertie de Coriolis $-\mathbf{m}\mathbf{a}_C$, et :

$$m\mathbf{a}_{M/R'} = \mathbf{R} - \mathbf{m}\mathbf{a}_E - \mathbf{m}\mathbf{a}_C.$$



- L'accélération d'entraînement \mathbf{a}_E est l'accélération par rapport à R , du point coïncidant avec M à l'instant considéré, fixe dans R' :

$$\mathbf{a}_E = \left(\frac{d^2 \mathbf{OM}}{dt^2} \right)_R = \left(\frac{d^2 \mathbf{OO}'}{dt^2} \right)_R + \left(\frac{d^2 \mathbf{O'M}}{dt^2} \right)_R .$$

On appelle $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur vitesse instantané de rotation du référentiel R' par rapport à R . En utilisant la relation de dérivation d'un vecteur dans un référentiel mobile, le deuxième terme de \mathbf{a}_E s'écrit :

$$\left(\frac{d^2 \mathbf{O'M}}{dt^2} \right)_R = \left(\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d\mathbf{O'M}}{dt} \right)_{R'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O'M} \right] \right)_R .$$

Comme M est fixe dans R' , $(d\mathbf{O'M}/dt)_{R'} = \mathbf{0}$ et il vient :

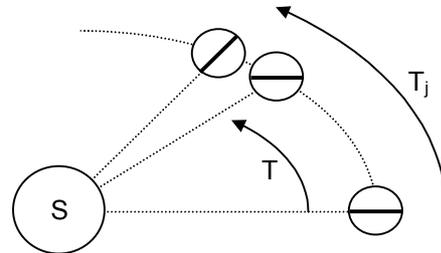
$$\mathbf{a}_E = \left(\frac{d^2 \mathbf{OO}'}{dt^2} \right)_R + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O'M}) + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{R'} \wedge \mathbf{O'M} .$$

- L'accélération de Coriolis \mathbf{a}_C est donnée par :

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{M/R'}$$

1.2. Différents référentiels

- Le référentiel de Copernic ou référentiel héliocentrique noté R_\odot à son origine au centre du soleil S et des axes dirigés vers trois étoiles fixes. Il sera toujours considéré comme galiléen.
- Le référentiel géocentrique noté R_G est en translation par rapport à R_\odot et a pour origine le centre de la terre T .
- Le référentiel terrestre noté R_T est lié à la terre et a aussi pour origine le centre de la terre T . Ce référentiel est en rotation à la vitesse $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport à R_G et R_\odot . En une année de 365,25 jours solaires de durée $T_j = 24\text{h} = 86400\text{s}$ la terre fait 366,25 tours sur elle-même. Le temps qu'il lui faut pour tourner de 360° est la durée du jour sidéral :



$$T = 86400 \frac{365,25}{366,25} = 86164\text{s} .$$

On en déduit sa vitesse de rotation :

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{2\pi}{T} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} .$$

2. Rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique supposé galiléen

Dans ce paragraphe le référentiel géocentrique R_G est supposé galiléen et le référentiel terrestre R_T non galiléen est en rotation à la vitesse $\boldsymbol{\Omega}$ constante, par rapport à R_G .

2.1. Variation du champ de gravitation terrestre avec la latitude

Pour un point M de masse m, fixe dans R_T , $\mathbf{v}_{M/R_T} = \mathbf{0}$ et la force d'inertie de Coriolis est nulle. Le TRC s'écrit dans le référentiel non galiléen R_T :

$$m \mathbf{a}_{M/R_T} = \mathbf{R} - m \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{TM}).$$

Le point M est uniquement soumis à son poids $m \mathbf{g}_0 = \mathbf{R}$ et on note $\mathbf{g} = \mathbf{a}_{M/R_T}$ le champ de gravitation à la latitude λ . En développant le double produit vectoriel on obtient :

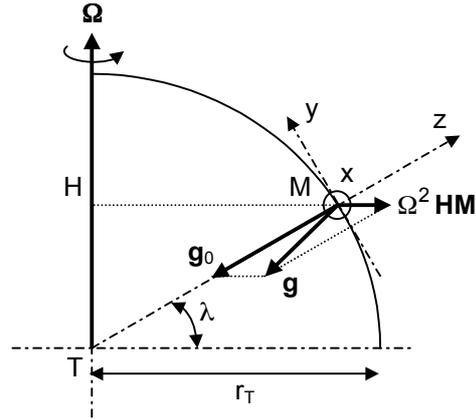
$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{HM}.$$

La variation du champ de gravitation terrestre est due à un terme d'inertie $\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{HM}$ provenant de la rotation de la terre. La projection sur les axes Ty et Tz donne :

$$\begin{aligned} g_y &= -r_T \Omega^2 \cos \lambda \sin \lambda \\ g_z &= -g_0 + r_T \Omega^2 \cos^2 \lambda \end{aligned}$$

On remarque que $r_T \Omega^2 \approx 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \ll g_0$. En ne conservant que les termes du premier ordre dans le calcul de $g = \sqrt{g_y^2 + g_z^2}$ on obtient :

$$g \approx g_0 \left(1 - \frac{r_T \Omega^2 \cos^2 \lambda}{g_0} \right).$$



Dans cette expression le second terme de la parenthèse est de l'ordre de 10^{-3} . La variation de g en fonction de la latitude est faible. Calculons les valeurs numériques de g dans trois cas :

- A l'équateur $\lambda = 0^\circ$; $g = 9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- A Paris $\lambda = 48^\circ 51'$; $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- Aux pôles $\lambda = \pm 90^\circ$; $g = 9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2.2. Déviation à l'Est

Nous allons voir ici l'effet de la force de Coriolis sur un objet de masse m en chute libre à la surface de la terre. Cet objet est uniquement soumis à son poids $m \mathbf{g} = m(\mathbf{g}_0 - \mathbf{a}_E)$ qui dépend de la latitude comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent. Nous supposons néanmoins que le vecteur \mathbf{g} est dirigé vers le centre de la terre T. Dans le référentiel terrestre non galiléen le TRC s'écrit :

$$m \mathbf{a}_{M/R_T} = m \mathbf{g} - 2m \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{M/R_T}.$$

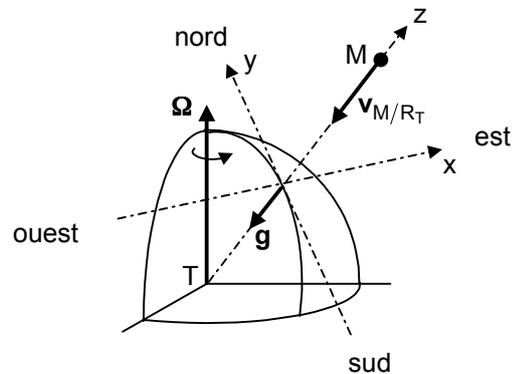
Supposons aussi que la force de Coriolis fasse peu dévier l'objet dans la direction Tx, soit ; $v_{zM/R_T} \gg v_{xM/R_T}$ et $\mathbf{v}_{M/R_T} = \dot{z} \mathbf{e}_z$. En projection sur les axes Tx et Tz :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\Omega \dot{z} \cos \lambda \\ \ddot{z} &= -g \end{aligned}$$

A l'instant initial $t = 0$, on lâche l'objet sans vitesse initiale d'une hauteur h. On a alors :

$$\dot{z} = -gt$$

et
$$z = -(1/2)gt^2 + r_T + h.$$



D'autre part à $t = 0$, $x = \dot{x} = 0$. L'intégration de $\ddot{x} = 2\Omega g \cos \lambda t$ donne :

$$\dot{x} = \Omega g \cos \lambda t^2$$

et
$$x = \Omega g \cos \lambda (t^3 / 3).$$

Le temps que met l'objet pour atteindre le sol ($z = r_T$) est $t = \sqrt{2h/g}$ et la déviation à l'est, suivant l'axe Tx :

$$x = \frac{\Omega \cos \lambda}{3\sqrt{g}} (2h)^{3/2}.$$

Si on lâche une bille du haut de la tour Montparnasse à une hauteur $h = 209\text{m}$, elle est déviée de $x_0 = 4,36\text{cm}$ et met un temps $t_0 = 6,53\text{s}$ pour arriver jusqu'au sol. On vérifie l'approximation sur la vitesse relative : $h/t_0 \gg x_0/t_0$ donc $v_{zM/R_T} \gg v_{xM/R_T}$. L'ordre de grandeur de l'accélération de Coriolis s'obtient en calculant : $2\Omega v_{M/R_T} / g_0 \approx 4,76 \cdot 10^{-4}$. Sa contribution est plus faible que celle de l'accélération d'entraînement.

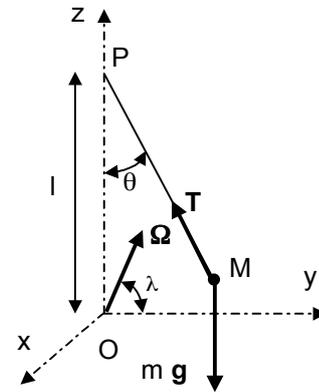
2.3. Pendule de Foucault

Ce pendule simple installé au Panthéon a permis à Foucault de mettre en évidence la rotation de la terre. Au point M, une masse $m = 30\text{kg}$ est attachée à un fil de longueur $l = 67\text{m}$ relié par son autre extrémité à un point P fixe dans R_T .

Nous allons étudier le mouvement du point M dans le référentiel terrestre non galiléen R_T . En M, la masse m est soumise à son poids $m\mathbf{g} = m(\mathbf{g}_0 - \mathbf{a}_E)$ et à la tension du fil \mathbf{T} . Le TRC s'écrit :

$$m\mathbf{a}_{M/R_T} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{M/R_T}.$$

Dans le référentiel Txyz les coordonnées du point M sont ; (x, y, z) et celles du vecteur \mathbf{MP} ; $(-x, -y, l-z)$. Puisque $\|\mathbf{MP}\| = l$, les coordonnées du vecteur \mathbf{T} sont ; $T/l(-x, -y, l-z)$. Donc :



$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -\frac{T}{l} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-l \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2m\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{T}{l}x - 2m\Omega(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda) \\ m\ddot{y} &= -\frac{T}{l}y - 2m\Omega\dot{x}\sin\lambda \\ m\ddot{z} &= -\frac{T}{l}(z-l) - mg + 2m\Omega\dot{x}\cos\lambda \end{aligned}$$

Pour de faibles amplitudes :

$$\begin{aligned} z &= l(1 - \cos\theta) \approx l(1 - (1 - \theta^2/2)) = l\theta^2/2 \\ x &\propto l\sin\theta \approx l\theta \\ y &\propto l\sin\theta \approx l\theta \end{aligned}$$

La coordonnée z est d'ordre deux en θ alors que x et y sont d'ordre un. En première approximation le mouvement du point M se fait dans le plan Oxy, donc $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$ et puisque le terme mg est d'ordre zéro en θ , la troisième équation du TRC s'écrit $T = mg$.

En posant :

$$\Omega_0 = \Omega \sin \lambda \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l},$$

les équations du mouvement dans le plan Oxy s'écrivent :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\Omega_0 \dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\Omega_0 \dot{x} &= 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre ces équations on utilise les nombres complexes. En posant $u = x + iy$ le système précédent devient :

$$\ddot{u} + 2\Omega_0 i \dot{u} + \omega_0^2 u = 0.$$

Le discriminant réduit de l'équation caractéristique est $\Delta' = -(\Omega_0^2 + \omega_0^2)$. Mais $\omega_0 = 0,38 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\Omega_0 = 5,49 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. L'approximation au premier ordre en Ω_0 / ω_0 conduit à $\Delta' = -\omega_0^2$. Les racines sont $r_{\pm} = i(\pm\omega_0 - \Omega_0)$ et :

$$u = e^{-i\Omega_0 t} (A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}).$$

A et B sont deux constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales. A $t = 0$, si $u = u_0$ et $\dot{u} = 0$ on obtient :

$$A = \frac{u_0}{2} \left(1 + \frac{\Omega_0}{\omega_0} \right), \quad B = \frac{u_0}{2} \left(1 - \frac{\Omega_0}{\omega_0} \right)$$

et la solution complexe :

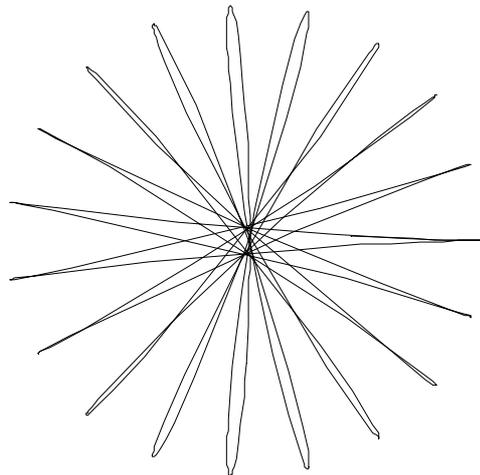
$$u = u_0 e^{-i\Omega_0 t} \left(\cos \omega_0 t + i \frac{\Omega_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

En supposant $u_0 = x_0$ réel, La solution réelle s'écrit :

$$\begin{aligned} x &= x_0 \left(\cos \Omega_0 t \cos \omega_0 t + \frac{\Omega_0}{\omega_0} \sin \Omega_0 t \sin \omega_0 t \right) \\ y &= x_0 \left(-\sin \Omega_0 t \cos \omega_0 t + \frac{\Omega_0}{\omega_0} \cos \Omega_0 t \sin \omega_0 t \right) \end{aligned}$$

Le pendule oscille avec une période $\tau = 2\pi/\omega_0 = 16,4 \text{ s}$ et effectue en même temps un mouvement de rotation avec une période $T = 2\pi/\Omega_0 = 31 \text{ h } 47 \text{ min}$.

Pour plus de clarté, la représentation graphique de la solution dans le plan Oxy, a été tracée pour une valeur de $\Omega_0 = 0,02 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, la pulsation ω_0 restant inchangée. Dans ce cas, on vérifie toujours $\omega_0^2 \gg \Omega_0^2$. Le pendule effectue alors $T/\tau = 19$ oscillations au lieu de 5211 dans une rotation complète.



2.4. Autres exemples

On peut illustrer l'effet de la force de Coriolis sur de nombreux exemples. Citons :

- La déviation des fusées vers l'est.
- Le sens de rotation des cyclones et des alizés (hémisphères Nord et Sud inversés).
- Le sens de rotation de l'eau dans les lavabos.
- L'usure dissymétrique des rails de train et des lits de fleuves.

3. Mouvement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique supposé galiléen

Dans ce paragraphe nous prenons en compte le mouvement du référentiel géocentrique R_G qui n'est plus galiléen. Nous étudions le mouvement d'un point M de masse m par rapport au référentiel terrestre non galiléen R_T , en supposant cette fois que le référentiel galiléen est le référentiel héliocentrique R_\odot .

3.1. Terme de marée

A la surface de la terre, le point M est soumis au champ de gravitation terrestre \mathbf{g}_0 et aux champs de gravitation des autres astres, $\mathbf{g}_i(M)$ pour l'astre $n^\circ i$. La résultante des forces est :

$$\mathbf{R} = m\mathbf{g}_0 + \sum_I m\mathbf{g}_i(M) .$$

L'accélération d'entraînement est :

$$\mathbf{a}_E = \left(\frac{d^2 \mathbf{SM}}{dt^2} \right)_{R_\odot} = \left(\frac{d^2 \mathbf{ST}}{dt^2} \right)_{R_\odot} + \left(\frac{d^2 \mathbf{TM}}{dt^2} \right)_{R_\odot} .$$

Le dernier terme est identique à l'accélération d'entraînement calculée dans R_G au paragraphe II. Le champ de gravitation mesuré dans R_T est donc :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \left(\frac{d^2 \mathbf{TM}}{dt^2} \right)_{R_\odot} ,$$

et le TRC dans le référentiel terrestre :

$$m\mathbf{a}_{M/R_T} = m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_C + \sum_I m\mathbf{g}_i(M) - m \left(\frac{d^2 \mathbf{ST}}{dt^2} \right)_{R_\odot} .$$

Appliquons le TRC à la terre de masse m_T , dans le référentiel héliocentrique :

$$m_T \left(\frac{d^2 \mathbf{ST}}{dt^2} \right)_{R_\odot} = \sum_I m_T \mathbf{g}_i(T) .$$

Finalement, dans le référentiel terrestre le TRC appliqué au point M s'écrit :

$$m\mathbf{a}_{M/R_T} = m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_C + \sum_I m[\mathbf{g}_i(M) - \mathbf{g}_i(T)] .$$

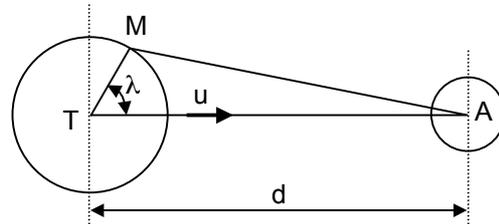
Le dernier terme est la somme des termes de marée $\mathbf{g}_i(M) - \mathbf{g}_i(T)$ relatif à chaque astre.

3.2. Expression du terme de marée, ordre de grandeur

Considérons l'astre n°i de centre A de masse m_A , à une distance d de la terre. La constante gravitationnelle est G. Le terme de marée s'écrit :

$$\mathbf{g}_i(M) - \mathbf{g}_i(T) = Gm_A \left(\frac{\mathbf{MA}}{MA^3} - \frac{\mathbf{TA}}{TA^3} \right).$$

Notons r_T le rayon de la terre. Exprimons les distances MA et TA en fonction de d et r_T et décomposons le vecteur \mathbf{MA} en $\mathbf{MT} + \mathbf{TA}$. On obtient alors l'expression :



$$\mathbf{g}_i(M) - \mathbf{g}_i(T) = \frac{Gm_A}{d^3} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{r_T \cos \lambda}{d}\right)^3} - 1 \right) \mathbf{TA} + \frac{\mathbf{MT}}{\left(1 - \frac{r_T \cos \lambda}{d}\right)^3}.$$

Mais $r_T/d \ll 1$ et au premier ordre en r_T/d il vient :

$$\mathbf{g}_i(M) - \mathbf{g}_i(T) = \frac{Gm_A}{d^3} \left(\frac{3r_T \cos \lambda}{d} \mathbf{MA} + \mathbf{MT} \right).$$

Pour avoir l'ordre de grandeur de ce terme de marée, plaçons-nous à l'équateur. $\lambda = 0$ et au premier ordre en r_T/d :

$$\mathbf{g}_i(M) - \mathbf{g}_i(T) = \frac{2r_T Gm_A}{d^3} \mathbf{u}.$$

Or $G = g_0 r_T^2 / m_T$ et :

$$\mathbf{g}_i(M) - \mathbf{g}_i(T) = 2g_0 \frac{r_T^3}{d^3} \left(\frac{m_A}{m_T} \right) \mathbf{u}.$$

Voyons quelle est l'influence de la lune et du soleil sur la terre.

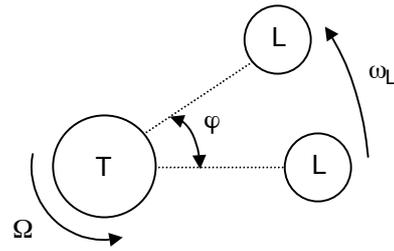
- Pour la lune : $m_L / m_T = 1/81$ et $d = 60r_T$. On obtient : $\|\mathbf{g}_L(M) - \mathbf{g}_L(T)\| = 1,1 \cdot 10^{-7} g_0$.
- Pour le soleil : $m_S / m_T = 332000$ et $d = 23400r_T$. On obtient : $\|\mathbf{g}_S(M) - \mathbf{g}_S(T)\| = 5,2 \cdot 10^{-8} g_0$.

Ces termes sont très faibles par rapport à l'accélération d'entraînement $\Omega^2 r_T = 3,4 \cdot 10^{-3} g_0$. On voit aussi que la lune a plus d'influence sur la terre que le soleil.

A la pleine lune et à la nouvelle lune, lorsque la terre est dans l'alignement de la lune et du soleil les termes de marée des deux astres s'ajoutent, ce sont les marées de vives-eaux. Par contre aux premier et deuxième quartiers les termes s'opposent, ce sont alors les marées de mortes-eaux.

Aux équinoxes de printemps et d'automne la distance terre-soleil est à son minimum, l'influence du soleil est importante ; ce sont les marées d'équinoxes.

La lune tourne autour de la terre en 27,3 jours, sa vitesse de rotation est donc $\omega_L = 2,67 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La position particulière de la terre par rapport à la lune à l'instant $t = 0$ se reproduit à l'instant t lorsque la lune s'est déplacée d'un angle $\varphi = \omega_L t$ et que la terre a tournée sur elle-même d'un angle $\varphi + 2\pi = \Omega t$. On en déduit $t = 2\pi / (\Omega - \omega_L) \approx 24 \text{ h } 51 \text{ min}$. Chaque jour les marées sont décalées de 51 min.



Conclusion

Pour écrire le TRC dans un référentiel non galiléen on doit ajouter à la résultante des forces, les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

Mais attention, ces forces sont particulières ; elles ne vérifient pas le principe d'action et de réaction.

D'autre part elles font intervenir des masses inertes que l'on identifie aux masses graves qui apparaissent dans les forces de gravitation : c'est le principe d'équivalence. Il est alors impossible de savoir si l'on se trouve dans un référentiel accéléré non galiléen ou si l'on est soumis à des forces gravitationnelles dans un référentiel galiléen.

Bibliographie

J.P. Pérez, *Mécanique*, Masson, 1997.

M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault, *Mécanique 1 et 2*, Dunod, 1994.