LP03 : Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe. Equilibrage statique et dynamique. Exemples (L3)

Julien Ollitrault et Yoram Vadée Le Brun. 2012-2013

Bibliographie :

- Perez de mécanique
- Chèze SI mécanique deuxième année

Éléments des rapports de jury :

2010 et 2009	Les effets indésirables d'un mauvais équilibrage ne se limitent pas à une simple usure des paliers
2010	Les notions d'axes principaux d'inertie et de matrice d'inertie permettent de traiter efficacement cette leçon
2003 et 2002	L'intérêt des équilibrages statique et dynamique ne doit pas se résumer à une suite de calculs indigestes. Il faut dégager l'idée physique qu'on peut amener en raisonnant dans le référentiel en rotation et en présentant l'effet des forces d'inertie sur un solide de forme la plus élémentaire possible. Cette leçon doit être illustrée expérimentalement.
2001	Si plusieurs référentiels sont utilisés, il convient de les distinguer parfaitement. Il faut dégager les points communs et les différences entre les effets des déséquilibrages statique et dynamique. Les méthodes pratiques utilisées pour réaliser l'équilibrage peuvent être évoquées. Il est bon de présenter les équilibrages de façon qualitative sur des exemples simples.

Prérequis :

- Mécanique du solide niveau classe prépa

Introduction

- Le mouvement de rotation autour d'un axe fixe est un mouvement des plus communs et couramment utilisé dans l'industrie. On peut citer pour exemple, le mouvement d'un disque dur, d'un bras de robot, du tambour d'une machine à laver, du rotor d'un alternateur d'une centrale électrique ou d'une porte (montrer la vraie porte).
- C'est aussi un mouvement élémentaire qui est à la base de mouvements plus complexes : une roue de voiture est animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe, combiné à une translation (tant que la voiture ne tourne pas)
- Jusqu'à présent, nous ne nous sommes pas intéressés aux actions exercées par le solide tournant sur son axe de rotation. Nous repartirons de cette approche dans la première partie puis, nous montrerons rapidement ses limites. Nous utiliserons alors les théorèmes bien connus que sont le théorème de la résultante cinétique (TRC par la suite) et le théorème du moment cinétique (TMC par la suite) mais de manière complète.

- Manip introductive : on fait tourner le disque mais sans aucune masse accrochée. Symétrie de révolution.

Plan

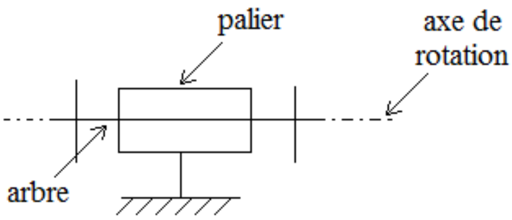
I. Solide en rotation

A. La liaison Pivot

De manière générale, lorsqu'on souhaite mettre et guider en rotation pure un solide par rapport à un autre, on utilise une liaison pivot.

Cette liaison n'autorise en effet, qu'un seul degré de liberté (DDL) à savoir la rotation autour d'un axe géométrique particulier et aucun DDL en translation (contrairement à la liaison pivot glissant).

Elle se représente schématiquement sous la forme :



Montrer sur l'exemple d'introduction où se situe la liaison pivot

De manière pratique, on réalise expérimentalement une liaison pivot à l'aide de : (schéma sur transparent)

- Palier lisses ou glissant.

  Ce sont des bagues cylindriques, de forme tubulaire, avec ou sans collerettes, interposées entre un arbre et son logement pour faciliter le mouvement de rotation en limitant les pertes par frottement.

  - ***Les coussinets :*** Construits à partir de matériaux présentant de bonnes qualités liées au frottement (bronze, étain, plomb, graphite, Téflon, PTFE, polyamide), ils peuvent être utilisés à sec ou avec lubrification. Le glissement se fait entre l'arbre et le coussinet.

  - ***Paliers lisses hydrodynamiques:*** ils ressemblent aux coussinets, mais le liquide lubrifiant imbibe totalement le matériau par capillarité ce qui fait qu'en régime tournant il n'y a plus de contact arbre-coussinet mais un contact arbre-liquide lubrifiant. Celui-ci est en effet aspiré par le mouvement de rotation. On parle de portance hydrodynamique. (comparable à l'aquaplaning.) L'usure est alors pratiquement nulle et les frottements fortement réduits puisque ne restent que des frottements fluides.

- Palier roulant.

  La fonction d'un roulement est de permettre à deux éléments d'être en rotation l'un par rapport à l'autre avec une précision et avec un frottement optimisé en remplaçant un glissement par un roulement. Il existe différents types de roulements à savoir les roulements à billes, à aiguilles (acier ou céramique). Les frottements sont très faibles mais ces roulements sont assez fragiles et ne supportent pas de grosses contraintes.

- Pivot sans contact.

  Ce sont des pivots qui n'en sont pas vraiment ! Il n'y a plus de contact direct entre l'arbre et la partie fixe. L'équilibre peut être assuré par coussin d'air ou lévitation magnétique.

Rmq : Ce dernier type de roulement est crucial pour le développement des applications de récupération et de stockage d'énergie dans ce qu'on appelle les volants d'inertie que l'on verra dans l'exemple qui va suivre.

Par définition, une liaison parfaite est une liaison dont la transmission de puissance se fait sans dissipation d'énergie (pas de frottement). Ainsi, pour un mouvement de rotation autour de l'axe Oz :

$$P(Solide\ 1 \rightarrow Solide\ 2) = \overrightarrow{M_0}.\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = N\omega = 0$$

D'où dans notre cas N=0.

B. Cinématique

Schéma sur transparent

R est le référentiel de la partie fixe supposé galiléen (la partie fixe étant au repos). R' est un référentiel lié au solide en rotation autour de l'axe Oz. La rotation est caractérisée par l'angle θ de rotation du centre de masse du solide. On oriente R' de manière à ce que G le centre de masse du solide appartienne au plan Ox'z.

La base cylindrique apparait la plus adaptée pour étudier un tel système.

On pose donc pour un point M quelconque :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{v_M} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\overrightarrow{a_M} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

Pour rappel si on introduit le vecteur rotation instantanée : $\vec{\omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$ on peut écrire : $\overrightarrow{v_M} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

Transition :
Après avoir posé la cinématique du système ou pourrait s'intéresser aux aspects énergétiques de la rotation. On a décidé de le faire sur un exemple particulier ce qui est plus illustratif.

C. Exemple du volant d'inertie

Qu'est-ce qu'un volant d'inertie de manière générale ?

C'est un **solide de fort moment d'inertie autour de son axe de rotation** dont la mise en rotation **sert à stocker de l'énergie et son freinage à en récupérer**. On essaie de limiter au maximum les frottements sur son axe de rotation étant donné que ce sont des pertes d'énergie. Leur usage est très répandu en mécanique où ils servent à lisser les a coup de couple du moteur sur un concasseur par exemple. Ici nous allons voir une application récente et originale de ces volants d'inertie.

Exemple de la formule 1 :

Dans une formule 1, le volant d'inertie est **un cylindre massif** mis en rotation avec **une liaison pivot sans contact** (par lévitation magnétique) afin de réduire l'usure et les frottements.

Le volant d'inertie est couplé d'une manière complexe mettant en jeu des transmissions mécaniques et un couplage électromécanique à l'arbre moteur. L'utilité de ce volant d'inertie est, dans ce cas, de stocker l'énergie cinétique de translation que l'on va perdre en entrée de virage (puisqu'on doit ralentir pour le prendre), puis de la restituer en sortie de virage. Ceci permettant de consommer moins de carburant ou d'avoir une meilleure accélération de sortie de virage en ne dilapidant pas l'énergie cinétique en chaleur !

On va s'attacher à estimer l'ordre de grandeur de la taille du volant d'inertie en faisant des hypothèses simples sur sa forme et sa répartition de masse.

- Une formule 1 pèse environ 650 kg, lors d'un freinage moyen elle passe de 300 km/h à 100km/h. Cela représente une énergie cinétique de translation libérée : $\boxed{E_{cl} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) = 2.0\ MJ}$

- Il faut stocker cette énergie dans le volant d'inertie sous forme d'énergie cinétique de rotation. Afin de simplifier, on considère que c'est un cylindre plein en acier, homogène de masse volumique $\rho = 8000\ kg/m^3$, d'axe z (où z est l'axe de rotation), de hauteur et de rayon R.

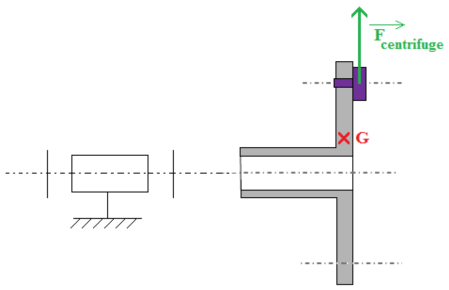
  Ainsi son moment d'inertie s'écrit $\boxed{J = \frac{1}{2}MR^2}$. Comme $\boxed{M = \rho\pi R^2 R}$, on a $J = \frac{1}{2}\rho\pi R^5$.
  Son énergie cinétique de rotation vaut donc $E_{cv} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$soit $\boxed{E_{cv} = \frac{\rho\pi R^5}{4}\dot{\theta}^2}$

- Pour estimer le rayon nécessaire, on suppose qu'il ne tournait pas avant le freinage et que la vitesse angulaire est limitée par la résistance à l'étirement des matériaux utilisés. Ici, on va prendre 60 000 tours/min qui est l'ordre de grandeur des vitesses atteintes par les volants de formule 1. On a donc R en regroupant les formules précédentes : $\boxed{R = \left(\frac{4*E_{cl}}{\rho\pi\dot{\theta}^2}\right)^{1/5}}$
- Application numérique : on trouve <u>R = 9.6cm</u> ! Ce qui correspond à une masse de 22 kg.

On voit donc que les volants d'inertie permettent de stocker une énergie énorme dans un faible volume et une masse modérée. En formule 1, le règlement oblige les voitures à avoir une masse minimale et c'est pour cela qu'on utilise des volants d'inertie en acier et fibre de carbone afin de pouvoir accélérer plus fort en sortie de virage : on gagne ainsi en moyenne 80 chevaux pendant 7 secondes. A comparer à la puissance de votre voiture (environ 90 ch pour une bonne voiture) et à celle de la formule 1 de 800 ch environ.

<u>Transition</u> :
Retour sur notre manip introductive. (On fait l'analogie avec le volant d'inertie qui est lui aussi un cylindre en rotation). Le volant d'inertie est fabriqué par l'homme donc il ne pourra jamais être un solide de révolution parfait. On va donc introduire un déséquilibre pour simuler cet effet.

*Manip : On fait tourner le disque avec une masse accrochée dessus. On constate de fortes vibrations et l'axe est clairement déséquilibré. On doit donc procédé à un **équilibrage dit statique** car il se voit même au repos (par simple action de la gravité).*



Sur le schéma on peut comprendre intuitivement l'origine de ce déséquilibrage grâce à la force centrifuge (virtuelle). Mais pour comprendre le phénomène de manière plus globale on va s'attacher à étudier la rotation d'un solide quelconque.

II. Equilibrage statique

A. Application du TRC

<u>On retourne sur le cas général d'un solide quelconque en rotation</u>.

Pour comprendre ce déséquilibre, il faut exprimer la force que le rotor (le solide en rotation) exerce sur le palier (l'axe solide sur lequel s'appuie le rotor). Afin d'y avoir accès, on va appliquer le théorème de la résultante cinétique (TRC) au rotor dans le référentiel du laboratoire.

Donner le schéma sur transparent (le même que en I-B)

Soient $\vec{R}$ la résultante des forces exercées par le palier sur le rotor, $\vec{F}$ la résultante des forces exercées par la charge (tout système extérieur ayant une action sur le rotor) sur le rotor et $\vec{P}$ la quantité de mouvement du rotor.

Le TRC s'écrit alors dans R :

$$m\,\vec{a}_G = \vec{F} + \vec{R}$$

D'après la partie cinématique, on a $\vec{v}_G = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ soit $\vec{a}_G = -l\dot{\theta}^2\vec{e}_r + l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$ avec l la distance à l'axe de rotation du centre de masse.

Finalement : $-ml\dot{\theta}^2\vec{e}_r + ml\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{F} + \vec{R}$

Or on s'intéresse à la résultante des forces appliquées par le rotor sur le palier qui vaut, d'après le principe des actions réciproques, $-\vec{R}$

On écrit donc : $\boxed{-\vec{R} = ml\dot{\theta}^2\vec{e}_r - ml\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \vec{F}}$

Si $\neq \mathbf{0}$, on constate **l'existence de deux forces tournantes**. On peut les comprendre comme les forces d'inerties dans le référentiel du rotor. De plus, ces forces dépendent de la vitesse de rotation. En particulier, la force centrifuge augmente avec le carré de la vitesse angulaire et peut vite devenir très importante. Dans l'expérience introductive, c'est elle qui déséquilibre le moteur. On appelle donc le produit $l * m$ le **balourd du solide**.

Conclusion (sur un transparent) : L'équilibrage statique va donc consister à faire $l = 0$, c'est-à-dire placer le centre de masse sur l'axe de rotation, ce qui nous débarrassera de ces forces d'inertie.

(Rem : on ne peut pas prendre m ou $\dot{\theta}$ nul ce qui serait absurde).

B. Exemples

1. Volant d'inertie

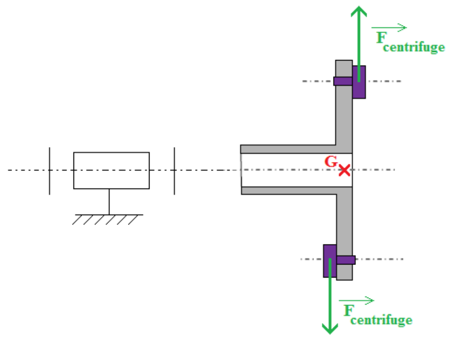
Donnons un ordre de grandeur de la force centrifuge sur notre exemple du volant d'inertie :
Supposons un écart à l'axe de seulement 1micromètre.
Le poids du volant vaut : $\vec{P} = M\vec{g}$ et vaut en norme : 220 N
La norme de la force centrifuge $Ml\dot{\theta}^2$vaut alors 870 N soit 4 fois le poids du volant ! On comprend aisément qu'une telle force risque de sérieusement endommager le palier, voir de le détruire purement et simplement, ce qui libérerait le volant (qui contient une immense quantité d'énergie) en plein milieu de la voiture … Pour pallier à ces risques, le volant d'inertie est enfermé dans un boitier très résistant.

2. Machine à laver

On est confronté à un problème similaire dans une machine à laver où le linge déséquilibre le tambour de la machine. Lors de l'essorage, le linge tourne à une vitesse de 1200 tour/min (nécessaire pour expulser l'eau du linge grâce à la force centrifuge). En supposant que le linge accumulé d'un côté du tambour soit à une distance d'environ 15 cm de l'axe, on enverrait une force de 240 fois le poids du linge à la machine ! (à ce niveau-là, la machine en entier s'envole probablement …). Afin d'empêcher ceci, la machine essaie de brasser le linge, entame l'essorage, vérifie si il y a trop de vibrations et recommence si nécessaire. C'est ce qui explique pourquoi les programmes ont une durée aléatoire contrairement à ce qu'indique le cadran ! De plus, on a monté le tambour sur ressort et placé une forte masse de béton au fond de la machine à laver, afin d'éviter les vibrations qui sont ici source de bruit donc de gêne.

Transition :
Est-ce que cet équilibrage suffit ?

*Retour sur notre manip introductive. On fait tourner le disque avec deux masses accrochées dessus de manière antisymétrique par rapport au disque. On constate qu'il reste des vibrations parasites mais beaucoup plus faibles. Comme ceci ne pouvait se voir au repos on parle **d'équilibrage dynamique**.*



En fait la résultante des forces centrifuges est bien nulle mais elles créent un couple sur l'axe de rotation orthogonal à l'axe et qui a donc tendance à le tordre.

III. Equilibrage dynamique

Cette fois, il faut décrire les moments des forces exercées par le rotor sur le palier. Puisque la résultante des forces est déjà constante. Mais avant d'aller plus loin, il va falloir décrire plus en détails les moments d'inerties et le moment cinétique du solide.

A. Matrice d'inertie et conséquences

Jusqu'à présent, on s'est toujours contenté de décrire le moment d'inertie autour d'un axe et la projection du moment cinétique sur cet axe. Ici, la présence de vibrations nous laisse penser qu'il existe une composante du moment cinétique orthogonale à l'axe de rotation. C'est la variation de celle-ci au cours de la rotation qui induirait ces vibrations. On va donc essayer de décrire totalement le moment cinétique du solide en rotation. Pour cela on introduit la matrice d'inertie.

1. Définition de la matrice d'inertie

Soit un axe Δ passant par O. Soit $\overrightarrow{e_\Delta}$ le vecteur directeur unitaire de cet axe.

On part de l'expression déjà connue du moment d'inertie autour de cet axe :

$$I_{O\Delta} = \iiint \rho(\vec{r}) \|\vec{r} \wedge \overrightarrow{e_\Delta}\|^2 \, \overrightarrow{dr}$$

En exprimant ces deux vecteurs dans les coordonnées cartésiennes avec pour origine O ($\vec{r} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{e_\Delta} = a\overrightarrow{e_x} + b\overrightarrow{e_y} + c\overrightarrow{e_z}$) on peut écrire :

$$\|\vec{r} \wedge \overrightarrow{e_\Delta}\|^2 = (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2$$

$$\|\vec{r} \wedge \overrightarrow{e_\Delta}\|^2 = a^2(y^2 + z^2) + b^2(x^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2) - 2abxy - 2acxz - 2bcyz$$

On pose (les donner sur transparent):

$$I_{Oxx} = \iiint \rho(\vec{r})(y^2 + z^2) \, \overrightarrow{dr}$$

$$I_{Oyy} = \iiint \rho(\vec{r})(x^2 + z^2) \, \overrightarrow{dr}$$

$$I_{Ozz} = \iiint \rho(\vec{r})(x^2 + y^2) \, \overrightarrow{dr}$$

Ces trois grandeurs constituent les moments d'inerties par rapports aux axes x, y et z.

$$I_{Oxy} = \iiint \rho(\vec{r}) xy \, \overrightarrow{dr}$$

$$I_{Oxz} = \iiint \rho(\vec{r}) xz \, \overrightarrow{dr}$$

$$I_{Oyz} = \iiint \rho(\vec{r}) yz \, \overrightarrow{dr}$$

Celles-ci correspondent aux produits d'inertie par rapport aux plans.

Rem : Attention à commenter un minimum ces grandeurs. Les trois premières sont facilement interprétables comme les moments d'inertie suivant les axes x, y et z. Les trois suivantes sont plus abstraites.

On a alors :

$$I_{O\Delta} = a^2 I_{Oxx} + b^2 I_{Oyy} + c^2 I_{Ozz} - 2ab I_{Oxy} - 2ac I_{Oxz} - 2bc I_{Oyz}$$

En posant la matrice d'inertie par rapport au point O : $[I_O] = \begin{pmatrix} I_{Oxx} & -I_{Oxy} & -I_{Oxz} \\ -I_{Oxy} & I_{Oyy} & -I_{Oyz} \\ -I_{Oxz} & -I_{Oyz} & I_{Ozz} \end{pmatrix}$, on peut alors réécrire cette formule :

$$I_{O\Delta} = \overrightarrow{e_\Delta}.[I_O]\overrightarrow{e_\Delta}$$

L'avantage de cette formulation matricielle est qu'il suffit de la calculer pour connaitre ensuite le moment d'inertie par rapport à tout axe passant par O. De plus, comme nous allons le voir, elle se révèle un outil puissant pour exprimer les autres grandeurs liées à la rotation comme par exemple le moment cinétique.

2. <u>Moment cinétique</u>

De même, on part de la définition du moment cinétique par rapport à un point O $\overrightarrow{L_O}$:

$$\overrightarrow{L_O} = \iiint \rho(\vec{r}) * \vec{r} \wedge \vec{v} \, \overrightarrow{dr}$$

On exprime la vitesse en fonction du vecteur rotation instantané : $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

En utilisant le même raisonnement que dans le 1) on trouve :

Rem : Calculs passés sous silence car fastidieux

On a donc $\vec{v} = (\omega_y z - \omega_z y)\overrightarrow{e_x} + (\omega_z x - \omega_x z)\overrightarrow{e_y} + (\omega_x y - \omega_y x)\overrightarrow{e_z}$

On utilise cette expression pour exprimer le moment cinétique suivant l'axe x :

$$\overrightarrow{L_O}.\overrightarrow{e_x} = \iiint \rho(\vec{r}) * (\vec{r} \wedge \vec{v}).\overrightarrow{e_x} \, \overrightarrow{dr}$$

$$\overrightarrow{L_O}.\overrightarrow{e_x} = \iiint \rho(\vec{r}) * (\omega_x y^2 - \omega_y xy + \omega_x z^2 - \omega_z xz) \, \overrightarrow{dr}$$

$$\overrightarrow{L_O}.\overrightarrow{e_x} = \omega_x I_{xx} - \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{xz}$$

$$\overrightarrow{L_O}.\overrightarrow{e_x} = ([I_O]\vec{\omega}).\overrightarrow{e_x}$$

Comme on peut montrer la même relation pour les directions y et z on a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{L_O} = [I_O]\vec{\omega}}$$

On a réussi à exprimer très simplement le moment cinétique grâce à la matrice d'inertie et au vecteur rotation. Il est à noter que, contrairement à ce qu'on a vu dans la première partie, on a exprimé toutes les composantes du moment cinétique.

La première chose à constater est qu'il est possible que le moment cinétique ne soit pas colinéaire au vecteur rotation ce qui expliquerait l'origine des vibrations.

Transition :
Voyons dans quel cas le moment cinétique est ou non colinéaire au vecteur rotation.

3. Notion d'axe propre

La matrice d'inertie étant symétrique et réelle, on peut la diagonaliser dans une base orthonormale. Mais, afin que celle-ci soit constante, il faut se placer dans un référentiel lié au solide. **La matrice sera donc diagonale et constante seulement dans un référentiel lié au solide**. On nomme les trois axes de ce référentiel (Oa,Ob,Oc). Dans ce référentiel la matrice de rotation s'écrit :

$$[I_O] = \begin{pmatrix} I_A & 0 & 0 \\ 0 & I_B & 0 \\ 0 & 0 & I_C \end{pmatrix}$$

Plaçons-nous dans le cas simple où ces trois moments d'inerties sont différents. Si le vecteur rotation appartient à l'un des trois axes du référentiel Oabc, alors le moment cinétique du solide lui est colinéaire et proportionnel. On appelle ces axes, les **axes propres de rotation du solide** (on verra cela plus en détails dans la deuxième partie). Sinon, le moment cinétique ne sera pas colinéaire au vecteur rotation.

S'il y a égalité entre deux moments d'inertie, I_A et I_B par exemple, alors tout axe appartenant au plan Oab est axe propre de rotation.

Enfin, si les trois moments sont égaux tout axe est axe propre de rotation.

Quelques exemples. (sphère, cylindre …)

- Sphère pleine de rayon R et de masse M : $[I_O] = \frac{2MR^2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Cylindre plein de rayon R et de hauteur l : $[I_O] = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3MR^2 + Ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3MR^2 + Ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6MR^2 \end{pmatrix}$

Transition :
Il ne reste plus qu'à formaliser par l'application du théorème du moment cinétique cette intuition que, si le vecteur rotation n'est pas colinéaire au moment cinétique, il y a des vibrations.

B. Application du TMC

On va enfin pouvoir appliquer convenablement le TMC au solide en rotation.

On pose :

- $\vec{M}$ la résultante des moments en O exercés par le palier sur le rotor
- $\overrightarrow{M_{ext}}$la résultante des moments en O exercées par les forces extérieures

Le TMC en O s'écrit alors dans le référentiel du laboratoire :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{M_{ext}} + \vec{M}$$

Mais on a un petit contretemps : le moment cinétique s'exprime facilement, comme on l'a vu, dans un référentiel lié au solide et non pas dans celui du laboratoire. Qu'à cela ne tienne ! On utilise les relations de passage pour passer de l'un à l'autre. Soit R le référentiel du laboratoire (<u>on ressort le schéma cinématique sur transparent</u>), R' est un référentiel lié au solide. On a alors :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{L_O}$$

Avec $\overrightarrow{L_O} = [I_O]\vec{\omega}$ on obtient :

$$\overrightarrow{M_{ext}} + \vec{M} = [I_O]\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge [I_O]\vec{\omega}$$

Comme on a $\vec{\omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$ on obtient (après un peu de calcul passé volontairement sous silence)

$$-\vec{M} = \overrightarrow{M_{ext}} + \begin{pmatrix} I_{Ox'z}\ddot{\theta} \\ I_{Oy'z}\ddot{\theta} \\ -I_{Ozz}\ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I_{Oy'z}\dot{\theta}^2 \\ I_{Ox'z}\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour les mêmes raisons que pour l'équilibrage statique, on voit qu'il faut annuler I_{Orz} et $I_{O\theta z}$. La matrice d'inertie s'écrit alors :

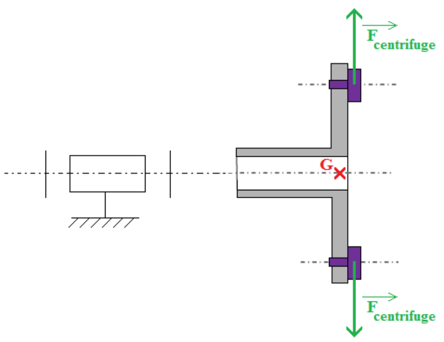
$$[I_O] = \begin{pmatrix} I_{Ox'x'} & -I_{Ox'y'} & 0 \\ -I_{Ox'y'} & I_{Oy'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Ozz} \end{pmatrix}$$

On voit que cela est équivalent à faire en sorte que z soit un axe propre de rotation du solide.

<u>Rem</u> : le terme en $I_{Ozz}\ddot{\theta}$ suivant $\overrightarrow{e_z}$est normal et inévitable : c'est le couple à fournir pour faire accélérer le rotor. Normalement, ce n'est pas le palier qui exerce ce moment (s'il est parfait) mais un moteur ou une charge.

<u>Conclusion</u> (sur un transparent) : <u>L'équilibrage dynamique</u> va donc consister à annuler les produits d'inertie contenant z : $I_{O\theta z}$ et I_{Orz}. Cela consiste à rendre l'axe z axe propre de rotation du solide, ce qui nous débarrassera du moment tournant.

<u>Retour sur notre manip introductive :</u> on équilibre correctement et on constate que ça ne vibre plus trop.



<u>Exemple d'une roue de voiture</u> :

A cause de l'usure irrégulière des pneus, les roues se déséquilibre ce qui se traduit par des vibrations désagréables liées au mauvais équilibrage dynamique, et par une perte d'adhérence du véhicule lié au mauvais équilibrage statique. On doit donc les faires équilibrer régulièrement en garage. Les garagistes font alors tourner la roue sur un axe qui mesure les vibrations créées par la rotation de la roue. Un ordinateur en fait l'acquisition et leurs indique où placer les masses supplémentaires.

Ceci est un procédé général dans l'industrie mais, dans tous les cas, on n'obtiendra jamais un équilibrage parfait. Afin de fixer des limites, on a défini une norme qui fixe le balourd résiduel admissible :

$$U_{adm} = \frac{G * m}{\omega}$$

Où G est le degré de qualité. C'est lui qui est fixé par la norme. Il est souvent exprimé en mm/s

<u>Exemples</u> :

Pour des centrifugeuses, pièces de machine outils, turbine pour l'aéronautique : $G = 6.3\ mm/s$

Pour des disques durs d'ordinateurs : $G = 2.5\ mm/s$

Pour des gyroscopes et meules de précision : $G = 0.4\ mm/s$

Conclusion :

On a vu que l'étude complète du mouvement de rotation autour d'un axe fixe nous a permis de résoudre de nouveaux problèmes. Ces problèmes surmontés, **l'usage du mouvement de rotation peut se répandre** : les pendules et pendules de torsions permettent d'effectuer des mesures de précision (moment d'inertie de l'hélium solide par exemple). Comme on l'a vu on peut **stocker de l'énergie** de manière efficace c'est-à-dire avec un bon rendement tant que le temps de stockage est court (de quelques minutes à quelques heures). On a mentionné le **volant d'inertie** de formule 1. On a déjà fait de même pour les tramways et des réalisations sont à l'étude sur les trains voir des centres de stockage à grande échelle pour les énergies renouvelables.

Par ailleurs, l'**équilibrage**, qu'il soit **dynamique** ou **statique**, ne se fait pas seulement par ajout de masse qui est la solution la plus pratique. Il existe des cas où on n'a pas la place pour un rajout de matière, comme par exemple pour le vilebrequin d'une voiture qu'on doit percer pour l'équilibrer.

Enfin, **l'axe de rotation d'un solide n'est pas forcément fixe** ou même de direction fixe. Une voiture peut tourner par exemple … Dans ce cas, forcer le solide à changer d'axe de rotation induira une réaction de sa part (puisqu'il s'oppose à une variation de son moment cinétique). On appelle cet effet **l'effet gyroscopique** et on l'étudiera dans une prochaine leçon.

Merci pour votre attention.