

Leçon n°4 : Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe. Equilibrage statique et dynamique. Exemples. (1^{er} CU)

Introduction

1. Solide en rotation autour d'un axe fixe

- 1.1. Réalisation pratique
- 1.2. Equations du mouvement
- 1.3. Liaison parfaite
- 1.4. Exemple : Le pendule pesant
- 1.5. Autres exemples

2. Equilibre statique et dynamique

- 2.1. Equilibrage statique
- 2.2. Equilibrage dynamique
- 2.3. Exemple : Equilibrage statique et dynamique d'une roue de voiture

Conclusion

Introduction

Dans cette leçon nous appliquons le théorème de la résultante cinétique (TRC) et le théorème du moment cinétique (TMC) à un solide S en rotation autour d'un axe fixe, dans un référentiel galiléen.

Les relations obtenues, écrites dans un référentiel fixe par rapport au solide S, mettent en évidence des actions de contact du solide sur son support, dépendantes du mouvement du solide et pouvant être très importantes.

Afin d'éviter une usure prématurée des contacts de la liaison, nous verrons comment équilibrer le solide en rotation

1. Solide en rotation autour d'un axe fixe

1.1. Réalisation pratique

Considérons un solide S de masse m, en rotation autour d'un axe fixe Oz dans un référentiel galiléen $R = Oxyz$. Ce solide n'a qu'un seul degré de liberté angulaire. La liaison permettant cette rotation est une liaison pivot. Elle peut être réalisée en utilisant différents types de contact :

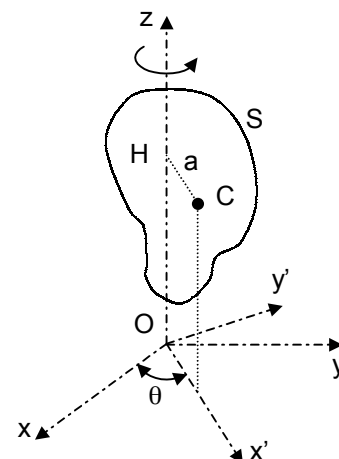
- Deux contacts ponctuels sur l'axe Oz, principalement en horlogerie.
- Deux roulements à billes.
- Deux rotules.
- Contact par coussin d'air ou coin d'huile.
- Contact à couteau, pour les balances.

1.2. Equations du mouvement

Le référentiel tournant $R' = Ox'y'z'$ est fixe par rapport au solide S et l'angle θ entre les axes Ox et Ox' repère la position de S. On note $[R^C, M_O^C]$ et $[R, M_O]$ les torseurs au point O des forces de contact et des autres forces agissant sur S, et la distance à l'axe Oz du centre de masse C ; $HC = a$.

- Appliquons le TRC à S, dans le référentiel galiléen R :

$$m \mathbf{a}_{C/R} = \mathbf{R}^C + \mathbf{R}.$$



Or $\mathbf{a}_{C/R} = (d^2 \mathbf{OC} / dt^2)_R = (d^2 \mathbf{HC} / dt^2)_R$ et en projection sur les axes Ox' , Oy' , et Oz du repère R' , le TRC s'écrit :

$$\begin{cases} -m a \dot{\theta}^2 = R_{x'}^C + R_{x'} \\ m a \ddot{\theta} = R_{y'}^C + R_{y'} \\ 0 = R_z^C + R_z \end{cases}$$

▪ Appliquons le TMC à S, dans le référentiel galiléen R :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_O}{dt} \right)_R = \mathbf{M}_O^C + \mathbf{M}_O.$$

Or $\boldsymbol{\sigma}_O = [\mathbb{I}]_O \boldsymbol{\omega}$ où $[\mathbb{I}]_O$ est la matrice d'inertie en O et $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}$ la vitesse de rotation de S suivant l'axe Oz .

Dans le référentiel tournant R' , $[\mathbb{I}]_O$ s'écrit :

$$[\mathbb{I}]_O = \begin{bmatrix} I_{Ox'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z} \\ -I_{y'x'} & I_{Oy'} & -I_{y'z} \\ -I_{zx'} & -I_{zy'} & I_{Oz} \end{bmatrix}.$$

Les moments d'inertie de S par rapport aux axes Ox' , Oy' et Oz sont constants et ont pour expressions :

$$I_{Ox'} = \iiint (y'^2 + z^2) \rho d\tau, \quad I_{Oy'} = \iiint (z^2 + x'^2) \rho d\tau \quad \text{et} \quad I_{Oz} = \iiint (x'^2 + y'^2) \rho d\tau$$

ainsi que les produits d'inertie :

$$I_{x'y'} = \iiint x' y' \rho d\tau, \quad I_{y'z} = \iiint y' z \rho d\tau \quad \text{et} \quad I_{zx'} = \iiint z x' \rho d\tau.$$

On en déduit les composantes du moment cinétique $\boldsymbol{\sigma}_O$ exprimées dans R' :

$$\boldsymbol{\sigma}_O = \begin{pmatrix} -I_{x'z} \dot{\theta} \\ -I_{y'z} \dot{\theta} \\ I_{Oz} \dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

La matrice d'inertie étant constante dans R' , le calcul de la dérivée du moment cinétique $\boldsymbol{\sigma}_O$ dans R' ne fait intervenir que les dérivées de la vitesse angulaire. En utilisant la relation de dérivation d'un vecteur dans un référentiel mobile :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_O}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_O}{dt} \right)_{R'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}_O,$$

on obtient les composantes de la dérivée du moment cinétique $(d\boldsymbol{\sigma}_O / dt)_R$ dans R' .

Finalement, en projection sur les axes Ox' , Oy' et Oz de R' , le TMC s'écrit :

$$\begin{cases} -I_{x'z} \ddot{\theta} + I_{y'z} \dot{\theta}^2 = M_{Ox'}^C + M_{Ox'} \\ -I_{y'z} \ddot{\theta} - I_{x'z} \dot{\theta}^2 = M_{Oy'}^C + M_{Oy'} \\ I_{Oz} \ddot{\theta} = M_{Oz}^C + M_{Oz} \end{cases}$$

Nous avons obtenu six équations par application du TRC et du TMC. Mais les inconnues sont au nombre de sept ; Six pour le torseur des forces de contact $[\mathbf{R}^C, \mathbf{M}_O^C]$ et une pour l'angle de rotation θ . Il faut donc une équation supplémentaire pour résoudre le problème. C'est l'hypothèse d'une liaison parfaite qui va nous la fournir.

1.3. Liaison parfaite

Le travail des forces de contact, non conservatives, est :

$$\delta W_{NC} = \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{R}^C dt + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O^C dt.$$

Si la liaison entre le solide et son support est parfaite, $\delta W_{NC} = 0$. Au point O de l'axe de rotation Oz, $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ et donc $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O^C = 0$. On en déduit une septième équation : $M_{Oz}^C = 0$. Suivant l'axe Oz, le TMC fournit alors l'équation du mouvement :

$$I_{Oz} \ddot{\theta} = M_{Oz}.$$

Cette équation s'obtient également à partir du théorème de l'énergie cinétique, pour un système conservatif, $dE_C = \delta W$ avec :

$$E_C = \frac{1}{2} I_{Oz} \dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{dE_C}{dt} = I_{Oz} \dot{\theta} \ddot{\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\delta W}{dt} = \dot{\theta} M_{Oz}.$$

D'où :

$$I_{Oz} \ddot{\theta} = M_{Oz}.$$

1.4. Exemple : Le pendule pesant

1.4.1. Le pendule non amorti

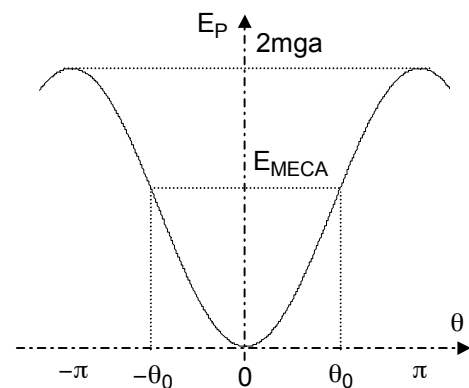
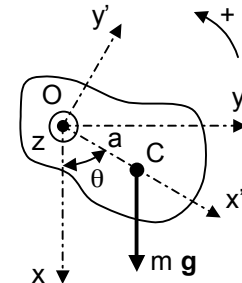
Le solide S de masse m, est en rotation autour de l'axe horizontal fixe Oz. Il est soumis à la pesanteur et aux forces de contact dues à réactions du support sur l'axe de rotation. Si l'on considère la liaison parfaite le moment des forces de contact est nulle ; $M_{Oz}^C = 0$, et d'après la figure : $M_{Oz} = -mga \sin \theta$. L'équation du mouvement s'écrit :

$$I_{Oz} \ddot{\theta} + mga \sin \theta = 0.$$

L'énergie cinétique est $E_C = (1/2) I_{Oz} \dot{\theta}^2$ et l'énergie potentielle $E_P = mga(1 - \cos \theta)$ en prenant $E_P = 0$ pour $\theta = 0$. D'autre part, la conservation de l'énergie permet d'écrire : $E_C = E_{MECA} - E_P$. Les différents mouvements du pendule s'observent sur la figure ci-contre.

- Si $E_{MECA} > 2mga$, le pendule effectue un nombre de tour illimité, le mouvement est révolatif.
- Si $0 < E_{MECA} < 2mga$, le pendule oscille autour de l'angle $\theta = 0$.

Dans le cas particulier où $0 < E_{MECA} \ll 2mga$, les oscillations ont de faibles amplitudes et $\sin \theta \approx \theta$. L'oscillateur est harmonique de période :



$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_{Oz}}{mga}}.$$

On dit qu'il y a isochronisme des petites oscillations car la période ne dépend pas de l'amplitude des oscillations.

Envisageons maintenant le cas où l'amplitude des oscillations est importante. On lâche le pendule sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_0 . La période des oscillations se calcule à partir de l'intégrale première de l'énergie :

$$\frac{1}{2} l_{Oz} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mga(\cos \theta - \cos \theta_0).$$

En intégrant sur un quart de période, entre 0 et θ_0 , on obtient l'expression de la période T :

$$T = \frac{\sqrt{2} T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}},$$

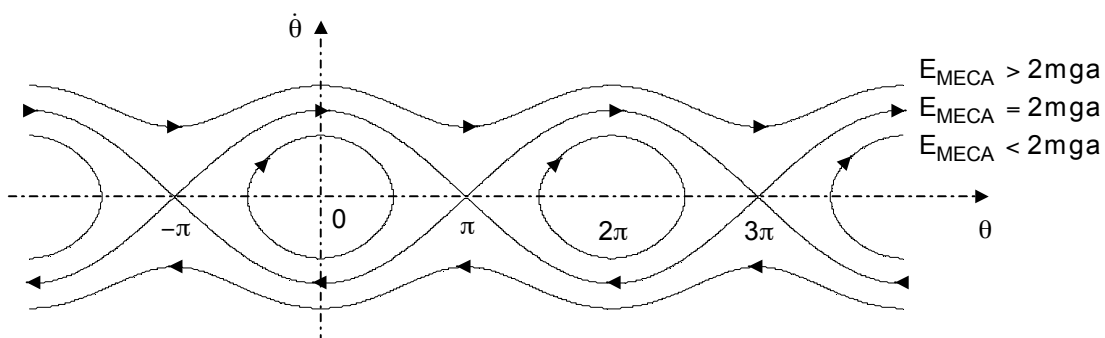
et en utilisant les développements limités :

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right).$$

Il n'y a plus isochronisme des oscillations.

- Si $E_{MECA} < 0$, le mouvement est impossible.

On peut également représenter le portrait des phases de ce pendule non amorti :



1.4.2. Le pendule amorti

Si le pendule est amorti par des forces de frottement visqueux, dues à la résistance de l'air par exemple, le moment $-C\dot{\theta}$ vient s'ajouter au moment du poids et l'équation du mouvement s'écrit :

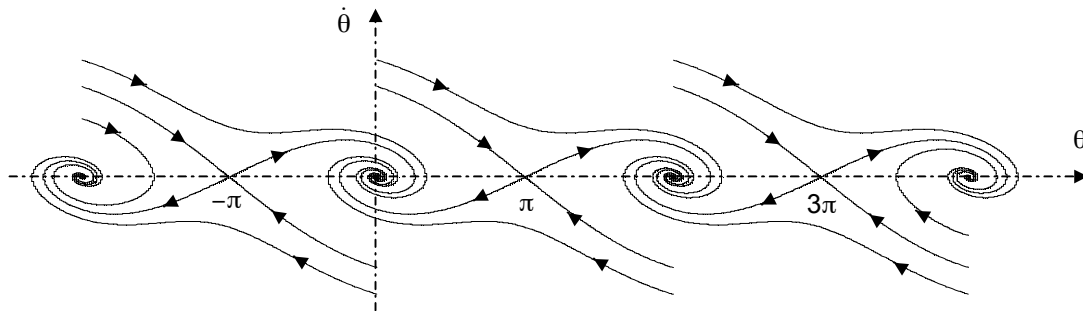
$$l_{Oz} \ddot{\theta} + C\dot{\theta} + mga \sin \theta = 0.$$

Avec une vitesse de rotation initiale très grande, le pendule peut faire plusieurs tour avant de s'amortir autour d'une position d'équilibre stable.

Lorsque les oscillations ont des amplitudes suffisamment faibles, on peut résoudre l'équation différentielle du second ordre en supposant que $\sin \theta \approx \theta$. On constate qu'il y a trois régimes d'amortissement :

- Apériodique : le pendule s'immobilise dans une position d'équilibre stable, sans osciller.
- Critique : C'est la limite du cas précédent lorsque le pendule n'oscille pas encore.
- Pseudo-périodique : le pendule effectue quelques oscillations dont les amplitudes décroissent exponentiellement, avant de s'immobiliser dans une position d'équilibre stable.

Le portrait des phases ci-dessous, permet de visualiser les différents mouvements du pendule avec un amortissement pseudo-périodique, c'est à dire de faibles frottements.



1.4.3. Le pendule amorti et entretenu

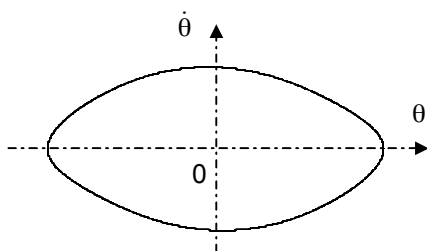
Les petites oscillations d'un pendule amorti, peuvent être entretenues par un couple de moment $A \cos \omega t$. L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$I_{OZ} \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + m g a \sin \theta = A \cos \omega t$$

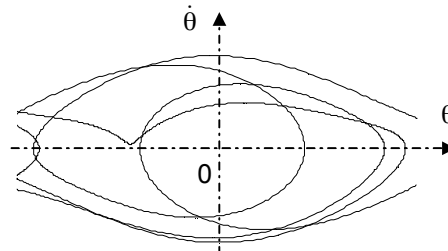
La résolution de cette équation met en évidence le phénomène de résonance pour une fréquence ω particulière, égale à la fréquence de résonance $\omega_0 = \sqrt{mga/I_{OZ}}$, si les frottements sont faibles.

D'autre part, lorsque l'amplitude A du couple permettant d'entretenir les oscillations, dépasse une certaine valeur, le mouvement du pendule devient chaotique.

On représente ci-dessous le portrait des phases du pendule pour A faible (figure de gauche), et pour A dépassant une valeur critique (figure de droite).



Trajectoire périodique



Trajectoire chaotique

1.5. Autres exemples

On peut également étudier :

- La mise en rotation d'une machine tournante.
- La stabilisation de l'aiguille d'un galvanomètre.
- La porte qui bat.
- L'horloge à balancier.

2. Equilibre statique et dynamique

2.1. Equilibrage statique

Le solide S en rotation autour d'un axe, est soumis de la part du support, à des forces de contact $\mathbf{R}^C$. Inversement, le solide exerce sur son support, des forces de contact $-\mathbf{R}^C$. D'après le TRC :

$$-\mathbf{R}^C = \mathbf{R} - m\mathbf{a}_C,$$

et en projection dans le repère $Ox'y'z'$:

$$\begin{aligned} -R_{x'}^C &= R_{x'} + m a \dot{\theta}^2 \\ -R_{y'}^C &= R_{y'} - m a \ddot{\theta} \\ -R_z^C &= R_z \end{aligned}$$

Ces forces dépendent du mouvement, c'est à dire de $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$. Pour éviter qu'à grande vitesse ou à accélération élevée, elles deviennent trop importantes, on réalise un équilibrage statique qui consiste à placer le centre de masse sur l'axe de rotation. Ceci se traduit par la relation :

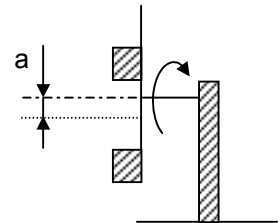
$$a = 0.$$

On réalise cet équilibrage avec une seule masse.

Expérience

Sur une tige en rotation, on fixe deux masses de chaque côté de l'axe, à des distances différentes de l'axe. Quand on fait tourner la tige, le support tremble car il n'y a pas d'équilibrage statique.

On rajoute alors une masse (ou on décale une des deux masses) de façon à ce que $a = 0$. Cette fois, lorsque la tige est en rotation, le support ne tremble plus. L'équilibrage statique est réalisé.



Application

Considérons une roue de voiture de masse $m = 10 \text{ kg}$ et de rayon $r = 25 \text{ cm}$. Si la voiture roule à 130 km/h , soit $36,1 \text{ m/s}$, la vitesse de rotation des roues est $\dot{\theta} = 144,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour un décalage du centre de masse de la roue $a = 0,1 \text{ mm}$, on calcule $m a \dot{\theta}^2 = 20,8 \text{ N}$. Cette force tend à faire fléchir l'axe de rotation.

2.2. Equilibrage dynamique

Le solide en rotation est soumis à des forces de contact de moment $\mathbf{M}_O^C$. D'après le TMC il exerce aussi sur le support le moment :

$$-\mathbf{M}_O^C = \mathbf{M}_O - \left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_O}{dt} \right)_R.$$

En projection dans le repère $Ox'y'z'$ et pour une liaison parfaite :

$$\begin{aligned}
 -M_{Ox'}^C &= M_{Ox'} + I_{x'z} \ddot{\theta} - I_{y'z} \dot{\theta}^2 \\
 -M_{Oy'}^C &= M_{Oy'} + I_{y'z} \ddot{\theta} + I_{x'z} \dot{\theta}^2 \\
 -M_{Oz}^C &= 0
 \end{aligned}$$

Le solide exerce sur son support des forces ayant un moment suivant les axes Ox' et Oy' . Ces moments dépendent du mouvement, c'est à dire de $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$. Pour éviter cela, on réalise un équilibrage dynamique qui consiste à placer le moment cinétique dans la direction de l'axe de rotation Oz . Cet axe Oz devient alors l'axe principal d'inertie, et ceci se traduit par les relations :

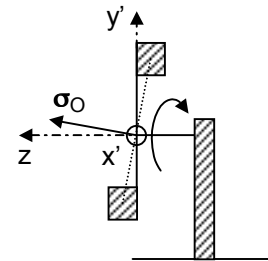
$$I_{x'z} = I_{y'z} = 0.$$

Pour réaliser cet équilibrage, deux masses sont nécessaires.

Expérience

On place deux masses sur une tige en rotation comme indiqué sur la figure. Le moment cinétique $\sigma_O = \iiint \mathbf{OM} \wedge \mathbf{v} \rho d\tau$ n'est pas colinéaire à l'axe Oz . $I_{x'z} = 0$ mais $I_{y'z} < 0$ et à vitesse constante, le solide constitué des deux masses et de la tige, exerce un moment sur le support, suivant l'axe Ox' : $-M_{Ox'}^C = M_{Ox'} - I_{y'z} \dot{\theta}^2 > 0$. Il n'y a pas d'équilibrage dynamique. Quand on fait tourner le solide, le support tremble bien que l'équilibrage statique soit réalisé.

Si le matériel le permet, on fixe sur chaque masse une petite masse supplémentaire de telle sorte que leur centre de masse respectif soit sur l'axe Oy' . Le moment cinétique est alors porté par l'axe Oz . L'équilibrage dynamique est réalisé. Le support ne tremble plus lorsque la tige est en rotation.



2.3. Exemple : Equilibrage statique et dynamique d'une roue de voiture

Considérons une roue de voiture, de masse m et de centre de masse C , en rotation autour de l'axe Oz . Dans la pratique, on réalise simultanément l'équilibrage statique et dynamique de cette roue, à l'aide de deux masselottes de masses m_1 et m_2 placées en deux points A_1 et A_2 de coordonnées x'_1, y'_1, z_1 et x'_2, y'_2, z_2 .

L'équilibrage statique : On place les deux masselottes de façon à ce que le nouveau centre de masse de la roue se trouve sur l'axe Oz . En projection sur les axes Ox' et Oy' on obtient la condition :

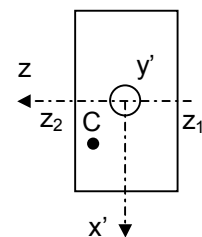
$$\begin{aligned}
 m a + m_1 x'_1 + m_2 x'_2 &= 0 \\
 m_1 y'_1 + m_2 y'_2 &= 0
 \end{aligned}$$

L'équilibrage dynamique : Les masselottes doivent être placées de façon à ce que les nouveaux produits d'inertie en $x'z$ et $y'z$ soient nuls. Cette condition s'écrit :

$$\begin{aligned}
 I_{x'z} + m_1 x'_1 z_1 + m_2 x'_2 z_2 &= 0 \\
 I_{y'z} + m_1 y'_1 z_1 + m_2 y'_2 z_2 &= 0
 \end{aligned}$$

On voit qu'il faut au moins deux masselottes pour l'équilibrage, car si $m_2 = 0$ alors $y'_1 = 0$ et $I_{y'z} = 0$. Or avant l'équilibrage $I_{y'z} \neq 0$.

D'autre part $I_{y'z} + m_1 y'_1 (z_1 - z_2) = 0$. Les masselottes sont dans des plans perpendiculaires à l'axe Oz , différents. Si z_1 et z_2 sont donnés, ainsi que la position de A_1 , on déduit des quatre équations ; m_1, m_2, x'_2 et y'_2 .



Conclusion

Dans le cas d'une liaison parfaite, l'équation du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe s'obtient simplement en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

Mais si l'on veut connaître les actions de contact entre ce solide et son support, il est nécessaire d'utiliser le TRC et le TMC afin d'avoir six équations permettant de déterminer six inconnues : L'angle de rotation et cinq composantes du torseur des forces de contact. Les conditions d'équilibrage statique et dynamique découlent de ces relations.

Dans la pratique, ces équilibrages sont indispensables car ils permettent d'éviter la détérioration rapide des paliers de contact sous l'action de forces très intenses.

Bibliographie

J.P. Pérez, *Mécanique*, Masson, 1997.

M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault, *Mécanique 1 et 2*, Dunod, 1994.