

Leçon n°5 : Approximation gyroscopique. Effets dans les domaines macroscopique et microscopique. (1^{er} CU)

Introduction

1. Approximation gyroscopique

- 1.1. Généralités
- 1.2. Approximation gyroscopique
- 1.3. Gyroscope déséquilibré
- 1.4. Gyroscope équilibré

2. Effets macroscopiques

- *2.1. Précession des équinoxes
- 2.2. Compas gyroscopique ou gyrocompas

3. Effets microscopiques

- 3.1. Précession d'un moment magnétique
- 3.2. Résonance magnétique

Conclusion

Introduction

L'étude du mouvement d'un gyroscope est un problème formel de mécanique. Pour en simplifier la mise en équation nous allons faire une approximation : l'approximation gyroscopique. Elle nous permettra néanmoins de mettre en évidence les propriétés essentielles du gyroscope.

Pour y parvenir nous utiliserons principalement, le théorème du moment cinétique (TMC), appliqué à un solide S en rotation.

Nous donnerons ensuite plusieurs exemples de systèmes physiques dans lesquels se manifeste l'effet gyroscopique.

1. Approximation gyroscopique

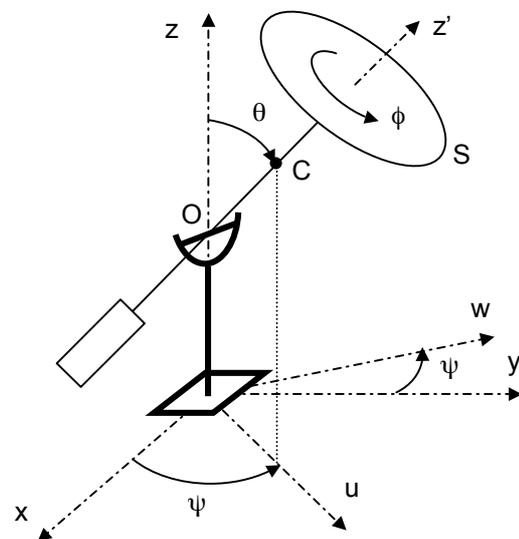
1.1. Généralités

Un gyroscope est un solide de révolution S, mobile autour d'un point fixe O. Dans notre exemple, S est constitué d'un volant, d'une tige et d'un contrepoids. Le volant peut être mis en rotation autour de l'axe Oz' et le contrepoids permet d'équilibrer le gyroscope en plaçant le centre de masse C du solide S, au point O.

Le solide S a donc trois degrés de liberté représentés par les angles d'Euler ; ψ l'angle de précession, θ l'angle de mutation et ϕ l'angle de rotation propre. La liaison est sphérique. Pratiquement, on la réalise par une liaison Cardan en combinant trois liaisons pivots ou par une liaison rotule.

Dans le référentiel terrestre $R = Oxyz$ supposé galiléen, la vitesse de rotation du volant est :

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi} \mathbf{e}_z + \dot{\theta} \mathbf{e}_w + \dot{\phi} \mathbf{e}_{z'}$$



$$\boldsymbol{\sigma}_O \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_O}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\sigma_O^2}{dt} \right)_R = 0 \Rightarrow \|\boldsymbol{\sigma}_O\| = \text{Cte},$$

et

$$\mathbf{e}_z \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_O}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\sigma_{Oz}}{dt} \right)_R = 0 \Rightarrow \sigma_{Oz} = \text{Cte}.$$

Ainsi, le moment cinétique $\boldsymbol{\sigma}_O$ décrit un cône d'axe Oz, d'angle au sommet constant. La toupie précessionne autour de l'axe Oz.

Appliquons la relation de dérivation d'un vecteur dans un référentiel mobile. La dérivée du moment cinétique $\boldsymbol{\sigma}_O$ dans le référentiel terrestre R, supposé galiléen, s'écrit :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_O}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_O}{dt} \right)_{R'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}_O.$$

Dans R' , avec l'approximation gyroscopique, le moment cinétique $\boldsymbol{\sigma}_O = I_{Oz'} \Omega \mathbf{e}_z'$ est constant (en supposant $\Omega = \text{Cte}$). Sa dérivée est nulle et donc :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_O}{dt} \right)_R = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}_O = \frac{m g a}{\sigma_O} \mathbf{e}_z \wedge \boldsymbol{\sigma}_O.$$

On déduit la vitesse de précession :

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \frac{m g a}{I_{Oz'} \Omega} \mathbf{e}_z}.$$

Les mesures expérimentales de ω et Ω permettent de vérifier cette relation.

Application

Une toupie de rayon de base $r = 5$ cm et de hauteur $h = 10$ cm, tourne à la vitesse $\Omega = 50$ tr/s. Son moment d'inertie est $I_{Oz'} = 3 m r^2 / 10$ et son centre de masse tel que $a = 3 h / 4$. Sa vitesse de précession est :

$$\omega = \frac{m g a}{I_{Oz'} \Omega} = \frac{5 g h}{2 r^2 \Omega} = 3,12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

et sa période :

$$T = \frac{2 \pi}{\omega} = 2 \text{ s}.$$

Rq : La masse de la toupie n'intervient pas dans l'expression de la vitesse de précession. D'autre part, l'approximation gyroscopique est vérifiée car ; $\Omega = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \gg \omega = 3,12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

1.4. Gyroscope équilibré

Expérience

Le contrepoids du gyroscope est placé de façon à ce que le centre de masse C soit confondu avec O. Le gyroscope est placé sur un plateau tournant, le plus loin possible de l'axe de rotation. Lorsque le volant est en rotation, on fait tourner lentement le plateau. L'axe Oz' de S garde alors une direction fixe.

De même, en considérant la rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel de Copernic, l'axe Oz' , du gyroscope posé sur une table, reste pointé vers une étoile fixe dans le ciel. Mais ceci ne s'observe qu'au bout de plusieurs heures...

Pour interpréter cette expérience, il suffit d'écrire le TMC dans un référentiel galiléen. En O , les moments des forces appliquées à S sont nuls et :

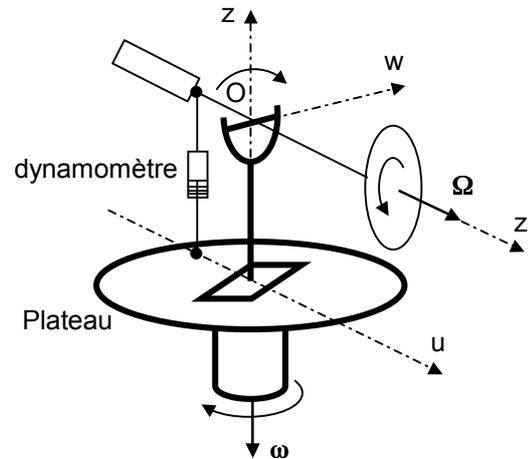
$$\left(\frac{d\sigma_O}{dt} \right)_R = \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \Rightarrow \sigma_O = \text{Cte}.$$

Dans l'approximation gyroscopique, l'axe Oz' garde une direction fixe.

Expérience

Maintenant, le gyroscope est placé au centre du plateau tournant. La rotation d'axe Oz de S par rapport au plateau est bloquée. Le gyroscope "un axe" peut tourner autour de l'axe Ow (et bien sur, autour de Oz'). Lorsque le volant est en rotation, on fait tourner le plateau très lentement à la vitesse ω et on observe une rotation de S autour de l'axe Ow .

Le couple de force qu'exerce le gyroscope sur son support s'appelle le couple gyroscopique. Il apparaît lorsqu'on impose au gyroscope, une rotation autour d'un axe autre que l'axe Oz' . Le moment de ce couple se mesure à l'aide d'un dynamomètre lorsque S est horizontal (voir figure).



Interprétons l'expérience.

Le support, constitué par le plateau tournant, exerce sur le gyroscope, un couple de moment $\mathbf{M}_{O,S \rightarrow g}$. Dans le référentiel terrestre R supposé galiléen le TMC s'écrit :

$$\left(\frac{d\sigma_O}{dt} \right)_R = \mathbf{M}_{O,S \rightarrow g}.$$

D'autre part, le référentiel R_S lié au support (le plateau tournant), tourne à la vitesse ω dans R , et :

$$\left(\frac{d\sigma_O}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\sigma_O}{dt} \right)_{R_S} + \omega \wedge \sigma_O.$$

On en déduit :

$$\left(\frac{d\sigma_O}{dt} \right)_{R_S} = \mathbf{M}_{O,S \rightarrow g} - \omega \wedge \sigma_O.$$

A l'équilibre dans R_S , la somme des moments des forces est nulle et le gyroscope exerce sur son support un couple gyroscopique de moment :

$$\boxed{\mathbf{M}_{O,g \rightarrow s} = -\omega \wedge \sigma_O.}$$

On vérifie cette relation avec les mesures expérimentales de ω , $\mathbf{M}_{O,g \rightarrow s}$ et Ω permettant d'obtenir σ_O .

2. Effets macroscopiques

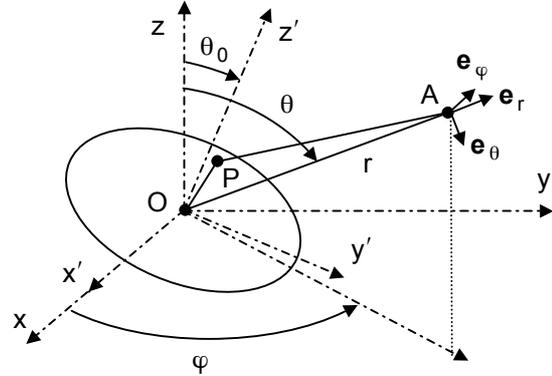
*2.1. Précession des équinoxes

La terre est un gyroscope déséquilibré. Elle tourne autour de son axe de révolution Sud-Nord à la vitesse Ω_T . Mais elle n'est pas parfaitement sphérique, et de ce fait, les astres exercent sur elle un couple de forces gravitationnelles.

(On pourra ne donner que les principaux résultats de ce calcul un peu long, éventuellement à faire en exercice).

Evaluons le moment M_O du couple de forces qu'un astre A exerce sur la terre.

Pour cela commençons par déterminer le potentiel puis le champ de gravitation créé par la terre au point A, centre de l'astre. On note $\mathbf{r} = \mathbf{OA}$, $\mathbf{R} = \mathbf{OP}$ et :



$$PA = \|\mathbf{r} - \mathbf{R}\| = r \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{r^2} + \frac{R^2}{r^2} \right)^{1/2}.$$

En effectuant un développement au deuxième ordre en $R/r \ll 1$, il vient :

$$\frac{1}{PA} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{r^2} - \frac{R^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{r^2} \right)^2 \right].$$

Le potentiel de gravitation en A, s'écrit :

$$\phi = -G \iiint \frac{dm}{PA} = \underbrace{-\frac{G}{r} \iiint dm}_{\phi_1 \text{ terme unipolaire}} - \underbrace{\frac{G}{r^2} \mathbf{r} \cdot \iiint \mathbf{R} dm}_{\phi_2 \text{ terme dipolaire}} - \underbrace{\frac{G}{2r^5} \iiint [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})^2 - r^2 R^2]}_{\phi_3 \text{ terme quadrupolaire}} dm.$$

L'intégration porte sur les coordonnées x, y et z du point P (dans le référentiel $R = O x y z$) à l'intérieur de la terre. Le terme unipolaire est égale à $-G m_T / r$ et le terme dipolaire est nul car O est le centre de masse de la terre. Il reste à évaluer le terme quadrupolaire.

Dans R, les coordonnées du point A sont $(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$, et donc :

$$\phi_3 = -\frac{G}{2r^5} \iiint [3(x r \sin \theta \cos \varphi + y r \sin \theta \sin \varphi + z r \cos \theta)^2 - R^2 r^2] dm.$$

Passons dans le référentiel principal d'inertie $R' = O x' y' z'$ lié à la terre, en effectuant une rotation d'axe Ox et d'angle $-\theta_0$. Le changement de coordonnées s'écrit :

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \cos \theta_0 + z' \sin \theta_0 \\ z &= -y' \sin \theta_0 + z' \cos \theta_0 \end{aligned}$$

On reporte ces coordonnées dans l'expression de ϕ_3 où les variables d'intégration sont x' , y' et z' .

D'après la symétrie de révolution de la terre, les intégrales de $x'y'$, $y'z'$ et $z'x'$ sont nulles. Ce qui revient à dire que dans le repère principal d'inertie R' , les produits d'inertie sont nuls. D'autre part les moments d'inertie vérifient les égalités : $I_1 = I_{Ox'} = I_2 = I_{Oy'} \neq I_3 = I_{Oz'}$. Les intégrales de x'^2 et y'^2 sont donc identiques. En tenant compte de ces remarques et en utilisant la relation de transformation du sinus en cosinus on obtient l'expression de ϕ_3 dans laquelle $I_1 - I_3 = \iiint (z'^2 - y'^2) dm$, puis celle du potentiel de gravitation :

$$\phi = -\frac{G m_T}{r} - \frac{G}{2r^3} (I_3 - I_1) \left[1 - 3(\cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \sin\varphi)^2 \right].$$

Le champ de gravitation est :

$$\mathbf{G} = G_r \mathbf{e}_r + G_\theta \mathbf{e}_\theta + G_\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

où

$$G_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad G_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \quad \text{et} \quad G_\varphi = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}.$$

Le moment \mathbf{M}_O du couple de forces que l'astre exerce sur la terre est l'opposé du moment $\mathbf{OA} \wedge m_A \mathbf{G}$ que la terre exerce sur l'astre :

$$\mathbf{M}_O = -\mathbf{OA} \wedge m_A \mathbf{G} = -r \mathbf{e}_r \wedge m_A (G_r \mathbf{e}_r + G_\theta \mathbf{e}_\theta + G_\varphi \mathbf{e}_\varphi).$$

Dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ du repère $R = O x y z$, ce moment s'écrit :

$$\mathbf{M}_O = r m_A (G_\theta \sin\varphi \mathbf{e}_x + (G_\varphi \cos\theta - G_\theta \cos\varphi) \mathbf{e}_y - G_\varphi \sin\theta \mathbf{e}_z).$$

Si l'on suppose que l'astre se déplace dans le plan de l'écliptique, $\theta = \pi/2$. Dans ce cas, le calcul de G_θ et G_φ conduit à :

$$G_\theta = \frac{3G}{2r^4} (I_3 - I_1) \sin 2\theta_0 \sin\varphi$$

et

$$G_\varphi = -\frac{3G}{2r^4} (I_3 - I_1) \sin^2\theta_0 \sin 2\varphi.$$

Le moment s'écrit alors :

$$\mathbf{M}_O = \frac{3G}{2} \frac{m_A}{r^3} (I_3 - I_1) \left[\sin 2\theta_0 \sin^2\varphi \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \sin 2\varphi \mathbf{e}_y + \sin^2\theta_0 \sin 2\varphi \mathbf{e}_z \right].$$

Prenons la valeur moyenne de ce moment lorsque l'angle φ varie. Puisque $\langle \sin^2\varphi \rangle = 1/2$ et $\langle \sin 2\varphi \rangle = 0$:

$$\langle \mathbf{M}_O \rangle = \frac{3G}{4} (I_3 - I_1) \frac{m_A}{r^3} \sin 2\theta_0 \mathbf{e}_x.$$

Revenons à l'effet gyroscopique. Par analogie avec le gyroscope déséquilibré, dans le référentiel de Copernic R , le TMC s'écrit :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_O}{dt} \right)_R = \langle \mathbf{M}_O \rangle = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}_O,$$

En projetant le TMC sur l'axe Oz, on obtient l'équation scalaire :

$$\left(\frac{d\sigma_{O,s}}{dt} \right)_{R_T} + \mathbf{e}_z \cdot [\boldsymbol{\Omega}_T \wedge (\boldsymbol{\sigma}_{O,s} + \boldsymbol{\sigma}_{O,g})] = M_{Oz}.$$

Or :

$$\mathbf{e}_z \cdot [\boldsymbol{\Omega}_T \wedge (\boldsymbol{\sigma}_{O,s} + \boldsymbol{\sigma}_{O,g})] = \boldsymbol{\Omega}_T \cdot [\boldsymbol{\sigma}_{O,g} \wedge \mathbf{e}_z] = -\sigma_{O,g} \boldsymbol{\Omega}_T \cdot \mathbf{e}_w.$$

De plus :

$$\boldsymbol{\Omega}_T = \Omega_T (-\cos\lambda \mathbf{e}_x + \sin\lambda \mathbf{e}_z) \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_w = -\sin\psi \mathbf{e}_x + \cos\psi \mathbf{e}_y.$$

On obtient finalement en faisant apparaître l'angle $\psi - \pi$, l'équation du pendule :

$$J_{Oz} \frac{d^2(\psi - \pi)}{dt^2} + \Omega \Omega_T I_{Oz'} \cos\lambda \sin(\psi - \pi) = M_{Oz}.$$

Si $M_{Oz} = 0$, le gyroscope et son support oscillent autour de la position stable $\psi = \pi$. Pour de petites oscillations la période est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{Oz}}{\Omega \Omega_T I_{Oz'} \cos\lambda}}.$$

En réalité $M_{Oz} \propto \psi \neq 0$ car en tournant le support frotte sur son socle. L'oscillateur s'amortit et l'axe Oz' finit par pointer vers le nord, dans le plan du méridien.

▪ Le gyrocompas donne aussi la latitude du lieu. Suite à l'expérience précédente, il suffit de bloquer la rotation d'angle ψ du gyroscope, l'axe Oz' étant dans le plan du méridien, et de laisser libre la rotation d'angle θ . Le gyroscope va osciller autour de la direction donnée par l'axe des pôles. La latitude est représentée par l'angle λ que fait le vecteur $\boldsymbol{\Omega}_T$ avec l'horizontale dans le plan du méridien.

L'équation pendulaire s'obtient en projetant le TMC sur l'axe Ow mais cette fois le support est simplement constitué par la partie en rotation suivant cet axe. On appelle son moment d'inertie K_{Ow} . Le calcul conduit à :

$$K_{Ow} \frac{d^2 \left[\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right) \right]}{dt^2} + \Omega \Omega_T I_{Oz'} \sin \left[\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right) \right] = M_{Ow}.$$

3. Effets microscopiques

3.1. Précession d'un moment magnétique

A l'échelle microscopique, les atomes constituant la matière possèdent un moment magnétique qui englobe le moment magnétique orbital que l'on explique classiquement par la rotation des électrons autour du noyau (diamagnétisme) et le moment magnétique intrinsèque, ou spin des particules introduit par la théorie quantique relativiste (paramagnétisme).

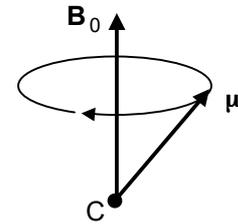
Notons $\boldsymbol{\mu}$ le moment magnétique d'un dipôle magnétique et $\boldsymbol{\sigma}_C$ son moment cinétique calculé en son centre de masse C. Ils sont reliés par la relation $\boldsymbol{\mu} = \gamma \boldsymbol{\sigma}_C$ où γ est le facteur gyromagnétique.

Placé dans un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 le moment magnétique est soumis à un couple de forces de moment :

$$\mathbf{M}_C = \boldsymbol{\mu} \wedge \mathbf{B}_0 = -\gamma \mathbf{B}_0 \wedge \boldsymbol{\sigma}_C.$$

Dans le référentiel terrestre R, le TMC appliqué au dipôle s'écrit :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_C}{dt} \right)_R = -\gamma \mathbf{B}_0 \wedge \boldsymbol{\sigma}_C.$$



Par analogie avec le gyroscope déséquilibré, le dipôle magnétique précessionne autour de \mathbf{B}_0 à la vitesse angulaire :

$$\boxed{\omega_L = -\gamma \mathbf{B}_0}.$$

Cette vitesse est appelée la pulsation de Larmor.

Ainsi pour un moment magnétique d'origine purement intrinsèque, l'image classique la plus simple du spin est celle d'une particule en rotation sur elle-même, constituant un gyroscope.

3.2. Résonance magnétique

En plus du champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 on soumet des échantillons de matière et donc des dipôles magnétiques, à un champ magnétique \mathbf{B}_1 d'intensité beaucoup plus faible, perpendiculaire à \mathbf{B}_0 , tournant à la vitesse $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$.

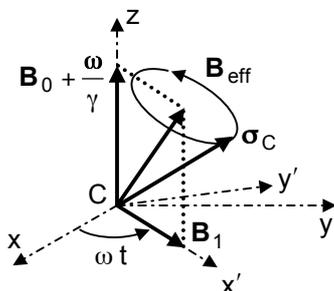
Le référentiel terrestre est noté $R = C x y z$ et le référentiel tournant $R' = C x' y' z$. Dans R le TMC appliqué au dipôle, s'écrit :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_C}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_C}{dt} \right)_{R'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}_C = -\gamma (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) \wedge \boldsymbol{\sigma}_C.$$

De même que $\boldsymbol{\omega}_L = -\gamma \mathbf{B}_0 \mathbf{e}_z = \omega_L \mathbf{e}_z$, la vitesse de précession du dipôle autour du champ tournant est $\boldsymbol{\omega}_1 = -\gamma \mathbf{B}_1 \mathbf{e}_{x'} = \omega_1 \mathbf{e}_{x'}$, et si $\Delta\omega = \omega_L - \omega$, dans le référentiel R' on obtient :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_C}{dt} \right)_{R'} = (\Delta\omega \mathbf{e}_z + \omega_1 \mathbf{e}_{x'}) \wedge \boldsymbol{\sigma}_C = -\gamma \mathbf{B}_{\text{eff}} \wedge \boldsymbol{\sigma}_C.$$

Le champ \mathbf{B}_{eff} est le champ magnétique efficace vu par le dipôle dans R' .



- Lorsque $\Delta\omega \gg \omega_1$, dans R' le moment magnétique précessionne pratiquement à la vitesse :

$$\Delta\omega \mathbf{e}_z = -\gamma \left(\mathbf{B}_0 + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\gamma} \right),$$

autour du champ magnétique vertical $\mathbf{B}_0 + \boldsymbol{\omega}/\gamma$.

- Lorsque $\Delta\omega \approx 0$, dans R' le moment magnétique précessionne à la vitesse ω_1 autour du champ \mathbf{B}_1 .

En réalité, le moment magnétique est quantifié et sa projection sur l'axe Oz est $\mu_z = \gamma \hbar m$ où \hbar est la constante de Planck réduite et m le nombre quantique magnétique. Dans le champ \mathbf{B}_{eff} l'énergie de ce moment magnétique $E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_{\text{eff}}$ est donc aussi quantifiée. Supposons que m prenne deux valeurs ($m = \pm 1/2$). Le moment se retourne et passe à un état d'énergie supérieur avec une variation $\Delta E = h \nu$. Il absorbe un photon de fréquence ν .

La résonance magnétique correspond à une absorption de photons de fréquence ν pour une valeur particulière de ω .

Si l'environnement du moment magnétique change, c'est à dire si la constitution de la matière varie, un champ magnétique \mathbf{b} se superpose à \mathbf{B}_0 et l'absorption du photon n'a plus lieu à la pulsation de Larmor mais à $\omega = -\gamma (\mathbf{B}_0 + \mathbf{b})$.

La résonance magnétique nucléaire (R.M.N.) fait intervenir les moments magnétiques des noyaux des atomes. La fréquence d'absorption ν se situe dans le domaine des radiofréquences entre 1 Mhz et 500 Mhz. Cette technique est très utilisée dans le domaine biomédical.

La résonance paramagnétique électronique (R.P.E.) utilise les moments magnétiques des électrons des atomes. La fréquence d'absorption varie entre 10 Ghz et 200 Ghz.

Conclusion

Que le gyroscope soit équilibré ou déséquilibré, lorsqu'on lui impose un mouvement de rotation par rapport à un axe, il répond par un couple de forces lui donnant une rotation perpendiculaire à cet axe. C'est le couple gyroscopique lorsqu'il est équilibré et le couple qui lui donne son mouvement de précession lorsqu'il ne l'est pas.

Les applications du gyroscope équilibré utilisent le couple gyroscopique. Ainsi le gyrocompas permet à des avions, des sous-marins, ou tout autre appareil ayant une carcasse métallique, de s'orienter alors que l'utilisation de la boussole magnétique n'est plus possible.

Le gyroscope déséquilibré se rencontre dans des systèmes physiques macroscopiques tels que la terre ou microscopiques tels que le moment magnétique des particules.

Bibliographie

J.P. Pérez, *Mécanique*, Masson, 1997.

M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault, *Mécanique 1 et 2*, Dunod, 1994.