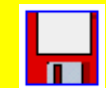


NOTIONS DE GYROSCOPIE

COUPLE GYROSCOPIQUE



CONTENU : Mis à jour novembre 2000, revu sept 2011

[I CADRE DE L'ETUDE](#)

[II MISE EN EQUATIONS](#)

[Couple gyroscopique](#)

[III EQUATIONS DE L'APPROXIMATION
GYROSCOPIQUE](#)

[IV NOTION DE DERIVE](#)

[V EXEMPLES DE LA TOUPIE](#)

[Autres Exemples pratiques](#)

Nous présentons dans les cours qui suivent, les fondements de la gyroscopie. C'est une partie de la mécanique classique souvent délaissée parce que très spécialisée, demandant un sens mécanique inhabituel et nécessitant des approximations, au demeurant fort justifiées mais qui déplaisent quelquefois au mécanicien trop mathématicien quelquefois.

Les applications de la gyroscopie et à travers elle des techniques inertielles ont révolutionné les systèmes de pilotage, de guidage et de navigation parce qu'offrant une autonomie totale de manœuvre même à des distances considérables de la Terre ou dans des conditions d'environnement très sévères (Rentrée de capsules, sous-marins,...)

I CADRE DE LA GYROSCOPIE?

1°) CADRE ET HYPOTHESES:

En pratique, dès qu'un système comporte un corps tournant, on peut parler de gyroscopie. Cependant l'expérience montre que les effets étonnants et réellement "utiles" n'apparaissent que dans deux circonstances:

- Un solide unique est en mouvement de rotation, quelle que soit sa rotation, le mouvement n'est pas alors perturbé par un autre système.

Dans le cas particulier où le moment des forces extérieures, calculé au centre d'inertie est nul, l'étude relève alors de la [THEORIE DE POINSOT](#) traitée sur ce site.

On peut alors rappeler qu'en particulier si la rotation axiale se fait autour du grand axe d'inertie, l'orientation de cet axe reste fixe dans un repère inertiel. De plus dans le cas d'une grande vitesse de rotation axiale, le mouvement présente alors **une très grande stabilité, appelée RAIDEUR GYROSCOPIQUE. qui se manifeste par des mouvements très lents de l'axe du gyroscope, donc des vitesses angulaires très faibles et donc des accélérations angulaires encore plus faibles.**

Nous conserverons cette hypothèse durant tout le cours, elle sera justifiée à postériori.

● Le corps tournant appartient à un système complexe et présente :

- Soit un moment d'inertie axial très important
- Soit une rotation axiale très rapide, par rapport aux rotations possibles des autres parties du système
- Soit les deux

Dans tous les cas on parlera d'un " **MOMENT CINETIQUE $H = I\omega$ important**", avec une rotation de **250 à 3000 t/s** et un moment cinétique de **10^{-3} à 1 N-m/s**

Intuitivement comparé à la quantité **MV** qui caractérise l'**INERTIE EN TRANSLATION**, ici c'est **$I\omega$** qui caractérise l'**INERTIE EN ROTATION**.

2°) **HYPOTHESES ET NOTATIONS :**

a) SUR LA FORME DU CORPS TOURNANT(appelé GYRO) :.

De toute évidence, il vaut mieux faire tourner un corps de révolution (Toupie) qu'un solide ayant 3 moments d'inertie différents.

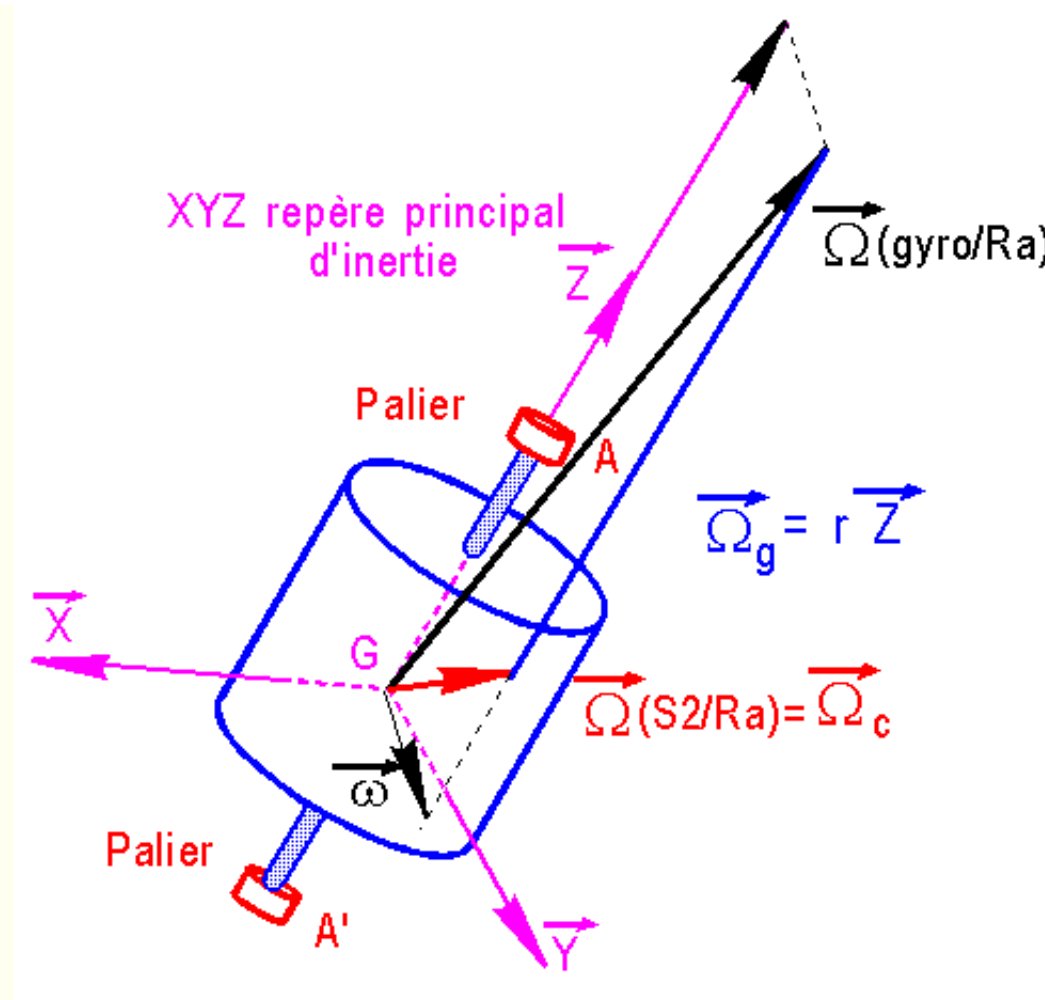
Nous supposerons donc toujours que le "GYRO" est de révolution axiale, l'axe de révolution sera toujours noté Z, troisième axe d'un repère principal XYZ lié ou non au gyro. Le gyro sera noté S3.

Matrice d'inertie du gyro dans le repère principal G XYZ.

$$\bar{I}(S_3 / GXYZ) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

b) SUR LE MONTAGE DU GYRO SUPPOSE ENTRETENU:

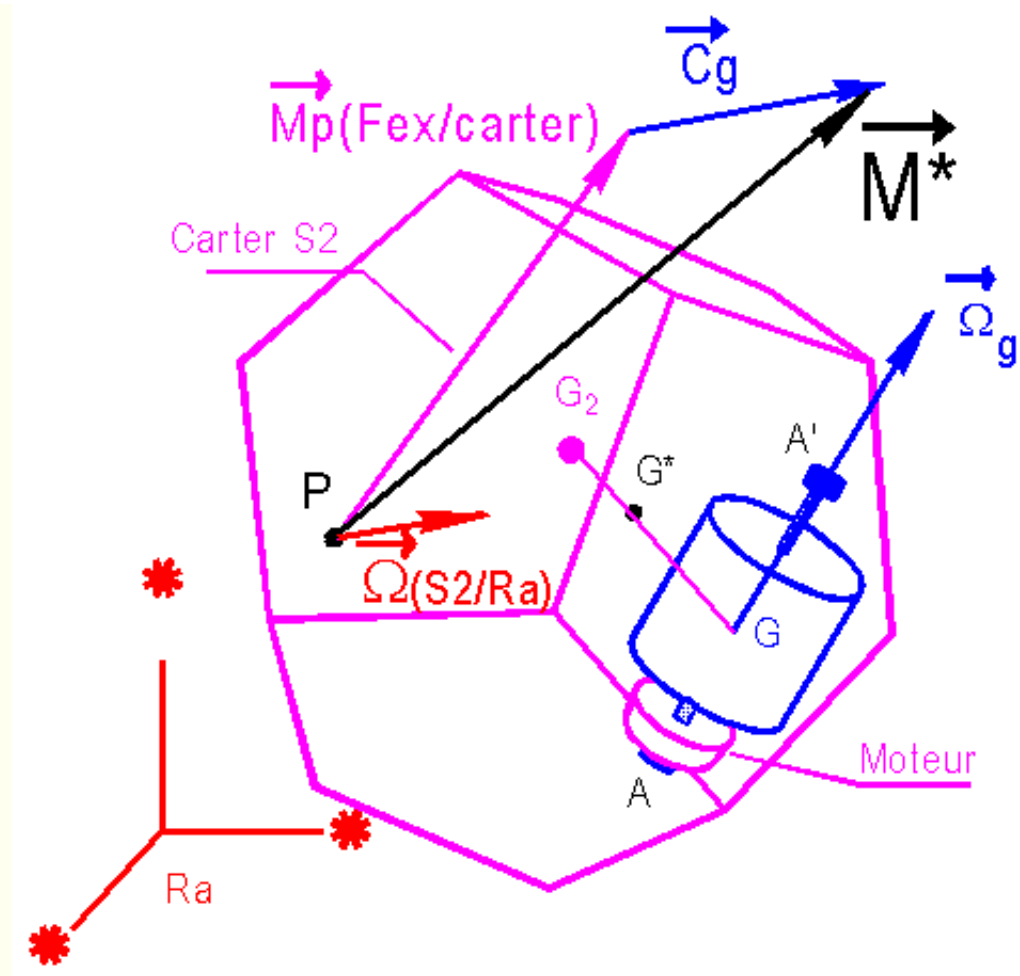
On appellera "**CARTER**" le solide S2(pourquoi S2, tout simplement parce qu'en général un corps tournant S3 est monté dans 2 armatures de Cardan, la première dite externe S1 et la deuxième dite interne S2), qui porte le gyro au moyen de 2 paliers A et A'. Cette dénomination de carter est parfaitement adaptée puisque le gyro doit être protégé des poussières et régulé en température. De plus la grande vitesse de rotation présente un danger pour l'environnement extérieur.



Le gyro sera supposé **ENTRETENU**, ce qui signifie que sa **vitesse angulaire de rotation axiale r** , par rapport au carter reste constante dans le temps.

Le **CARTER** s'appelle aussi "**ELEMENT SENSIBLE**", car c'est lui qui reçoit directement les effets du gyro et lui seul est vraiment observable. Sa structure sera donc agrémentée d'équipements divers:

- Moteur d'entraînement du gyro
- Alimentation électrique de ce moteur
- Capteur de vitesse angulaire axiale
- Asservissement de vitesse angulaire.
- Electronique de l'asservissement.
- Régulation de température.....
- **Paliers A et A', supposés PARFAITS**, c'est à dire sans frottement. Nous n'entrons pas encore dans le détail de la suspension (à gaz, magnétique, accordée, roulement à billes ...).



c) NOTATIONS :

La figure ci-dessus illustre les définitions, suivantes :

Référentiel inertiel ou galiléen

R_a

G pour le gyro

Centres d'inertie

G_2 pour le carter S_2

G^* pour l'ensemble $S^* = S_2 + S_3$

Masses

M pour S_2

M pour S_3

Vecteur rotation absolue de S_2

$$\vec{\Omega}(S_2 / R_a) = \vec{\Omega}_c$$

Vecteur rotation de S_3 /Carter

$$\vec{\Omega}(S_3 / S_2) = \vec{\Omega}_g = r\vec{Z}$$

Moment en P des forces extérieures sur S_2+S_3

$$\vec{M}_P(F_{ex} / S_2 + S_3)$$

Couple gyroscopique défini plus loin

$$\vec{C}_g = \mathbf{C}\vec{\Omega}_g \wedge \vec{\Omega}_c$$

Rotation axiale absolue du gyro

R

Rotation transversale absolue

W

Moment cinétique de $S_2+S_3=S^*$, S_3 "calé" sur S_2 . H^*

c) NOTION DE "GYRO CALE SUR LE CARTER" :

Plus loin, nous serons amenés à utiliser la notion de système avec gyro calé, bloqué sur son carter. Il s'agira du système global S2+S3, dans lequel le gyro ne tourne pas par rapport à S3. Autant dire, à paliers "soudés".

Nous noterons S^* ce système particulier, dans lequel le gyro est bloqué sur son support.

II MISE EN EQUATIONS :

1°) MOMENT CINETIQUE

Soit P un point quelconque, nous avons :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{H}}_p(\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) &= \bar{\mathbf{H}}_p(\mathbf{S}_2) + \bar{\mathbf{H}}_p(\mathbf{S}_2) = \bar{\mathbf{H}}_p(\mathbf{S}_2) + \mathbf{P}\bar{\mathbf{G}} \wedge m\bar{\mathbf{V}}_s(\mathbf{G}) + \bar{\mathbf{I}}(\bar{\Omega}_c + \bar{\Omega}_g) \\ \bar{\mathbf{H}}_p(\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) &= \bar{\mathbf{H}}^*_p(\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) + \mathbf{Cr}\bar{\mathbf{Z}}\end{aligned}$$

Résultat évident physiquement.

2°) THEOREME DU MOMENT CINETIQUE:

Appliquons le théorème du moment cinétique le plus général en P, en remarquant que le vecteur r_Z est constant dans un repère lié à S_2 .

$$\left[\frac{d}{dt} \bar{H}_p(\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) \right]_{Ra} = \bar{M}_p(\mathbf{F}_{ex} / \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) + (M+m)\bar{V}_a(\mathbf{G}^*) \wedge \bar{V}_a(\mathbf{P})$$

$$= \left[\frac{d}{dt} \bar{H}_p^*(\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) + \mathbf{Cr}\bar{\mathbf{Z}} \right]_{Ra} = \left[\frac{d}{dt} \bar{H}_p^*(\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) \right]_{Ra} + \bar{\Omega}_c \wedge \mathbf{Cr}\bar{\mathbf{Z}}$$

Finalement on obtient l'équation équivalente (à * près) :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{H}^*_P (\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) \right]_{Ra} = \vec{M}_P (\mathbf{F}_{ex} / \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) + \mathbf{C} \vec{\Omega}_g \wedge \vec{\Omega}_c + (M+m) \vec{V}_a (\mathbf{G}^*) \wedge \vec{V}_a (\mathbf{P})$$

3°) NOTION DE COUPLE GYROSCOPIQUE :

Par définition, on pose un nouveau vecteur appelé **COUPLE GYROSCOPIQUE** :

$$\vec{\mathbf{C}}_{\mathbf{g}} = \mathbf{C} \vec{\Omega}_{\mathbf{g}} \wedge \vec{\Omega}_{\mathbf{c}}$$

L'équation finale de 2°) montre le résultat suivant considéré comme un théorème:

THEOREME TRES GENERAL : EN PRESENCE D'UN GYROSCOPE ON PEUT CONSIDERER CE GYROSCOPE BLOQUE SUR SON CARTER(Rotation "oubliée"), A

CONDITION DE RAJOUTER AU MOMENT DES FORCES EXTERIEURES UN MOMENT SUPPLEMENTAIRE , **LE COUPLE GYROSCOPIQUE**, compensant les effets de la rotation "oubliée".

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{H}^*_{\text{P}} (\text{S}_2 + \text{S}_3) \right]_{\text{Ra}} = \vec{M}^*_{\text{P}} (\text{F}_{\text{ex}} / \text{S}_2 + \text{S}_3) + (\text{M} + \text{m}) \vec{V}_a (\text{G}^*) \wedge \vec{V}_a (\text{P})$$

où

$$\vec{M}^*_{\text{P}} (\text{F}_{\text{ex}} / \text{S}_2 + \text{S}_3) = \vec{M}_{\text{P}} (\text{F}_{\text{ex}} / \text{S}_2 + \text{S}_3) + \text{C} \vec{\Omega}_{\text{g}} \wedge \vec{\Omega}_{\text{c}}$$

NB : Le lecteur aura bien remarqué que le mouvement de S2 reste inchangé, car la mise en équations est strictement équivalente.

4°) **INTERPRETATION DU COUPLE GYROSCOPIQUE :**

Il faut essayer ici de faire "sentir" ce qu'est le couple gyroscopique. Tout d'abord, pour qui a lu la théorie de Poinsot, on constate qu'un grande moment cinétique pour un solide de révolution totalement libre, crée une très grande stabilité de ce mouvement. Le meilleur exemple en est la terre dont la rotation reste immuable avec son axe invariablement pointé vers l'étoile polaire.

On peut exprimer cette propriété en disant que le gyroscope possède une grande inertie et qu'il s'oppose à toute action extérieure tendant à lui imposer une rotation transverse.

Précisément appelons w le vecteur rotation transverse, commun à S2 et au gyro S3. C'est le carter S2 qui communique cette rotation à S3, par l'intermédiaire des paliers.

Le couple gyroscopique s'écrit donc aussi :

$$\vec{C}_{\text{g}} = \text{C} \vec{\Omega}_{\text{g}} \wedge \vec{\Omega}_{\text{c}} = \text{C} \vec{\Omega}_{\text{g}} \wedge \vec{\omega} = \text{C} r \omega \vec{v}$$

montrant qu'il est d'autant plus important que sa vitesse est grande et aussi proportionnel à l'attaque imposée' w.

Physiquement et grossièrement, pour créer une rotation transversale w portée par l'unitaire u il faut exercer un couple M porté par u. **Le couple gyroscopique primaire Cg** est alors porté par l'axe v. Mécaniquement il va donc créer une nouvelle rotation w1 autour de v, donc transversale aussi.

Que se passe-t-il alors ? **Un couple secondaire Cg1** est crée, porté par l'axe opposé à u, tout simplement pour "contrer" le couple initial M. Un peu plus loin on montrera et l'expérience le montre parfaitement, que la première rotation w est complètement annihilée par cet effet gyroscopique.

Hypothèse 3 : Comme les paliers ne peuvent transmettre un moment porté par leur axe Z, le moment imposé au gyro est transverse

$$\left[\frac{d\vec{H}}{dt} \right]_{Ra} = \mathbf{A} \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right]_{Ra} + \mathbf{C} \mathbf{r} \left[\frac{d\vec{Z}}{dt} \right]_{Ra} \approx \mathbf{C} \mathbf{r} \left\{ \left[\frac{d\vec{Z}}{dt} \right]_{S2} + \vec{\Omega}_c \wedge \vec{Z} \right\}$$

$$\left[\frac{d\vec{H}}{dt} \right]_{Ra} \approx -\mathbf{C} \vec{\Omega}_g \wedge \vec{\Omega}_c = -\vec{C}_g = \vec{M}_{G^*}(\mathbf{Fex} / \mathbf{S}_3)$$

THEOREME : Lorsqu'un gyroscope reçoit un moment, il réagit de manière à créer un couple gyroscopique qui annule ce moment.

$$\vec{M}_{G^*}(\mathbf{Fex} / \mathbf{S}_3) + \vec{C}_g \approx \vec{0}$$

$$\vec{C}_g = \mathbf{C} \vec{\Omega}_g \wedge \vec{\Omega}_c = \mathbf{C} \vec{\Omega}_g \wedge \vec{\omega}$$

Nous confirmons donc les remarques faites sur le rôle du couple gyroscopique.

Cette formulation des équations de la gyroscopie est de loin la plus générale :

- Indépendante de tout système d'axes
- Indépendante de tout paramétrage par des angles de rotation.
- Très claire sur le rôle du couple gyroscopique qui "contre" le moment imposé à S3, transmis par l'intermédiaire des paliers.

FORMULATION EQUIVALENTE :

En gyroscopie, on s'intéresse essentiellement au mouvement de l'axe gyro, suivi par des capteurs angulaires qui transformeront plus tard un gyro en détecteur.

On a donc eu l'idée d'introduire un point P extrémité du moment cinétique principal $\vec{H} = \mathbf{C} \mathbf{r}$. Vue de G, la dérivée du moment cinétique H apparaît comme la vitesse de P.

On pose donc :

$$\left[\frac{d\vec{H}}{dt} \right]_{Ra} = \vec{V}_a(\mathbf{P}) = \mathbf{C} \mathbf{r} \left[\frac{d\vec{Z}}{dt} \right]_{Ra} = \mathbf{C} \mathbf{r} \left\{ \left[\frac{d\vec{Z}}{dt} \right]_{S2} + \vec{\Omega}_c \wedge \vec{Z} \right\}$$

$$\vec{V}_a(\mathbf{P}) = -\mathbf{C} \vec{\Omega}_g \wedge \vec{\Omega}_c = -\vec{C}_g = \vec{M}_{G^*}(\mathbf{Fex} / \mathbf{S}_3)$$

En conclusion, il vient une relation nouvelle (attention apparemment il y a un problème de dimension entre vitesse et moment, mais il ne faut pas oublier que OP = Cr est un moment cinétique).

THEOREME : La vitesse de l'extrémité P du moment cinétique principal du gyroscope est égale au moment en G des forces extérieures agissant sur le gyroscope.

$$\vec{V}_a(P) = \vec{M}_{G^*} (F_{ex} / S_3)$$

NB 1 : Cette approche de la gyroscopie est d'un grand secours pour la description physique des phénomènes. Elle se prête moins bien aux développements analytiques.

NB 2 : Le lecteur curieux pourra s'essayer à montrer que l'origine du couple gyroscopique réside dans les forces d'inertie de Coriolis, dont le moment en G donne effectivement le couple gyroscopique.

Il s'agit donc bien d'une forme particulière d'inertie, mais l'origine mystérieuse des termes de Coriolis, laisse le problème entier.

IV NOTION DE DERIVE :

Pour créer le couple gyroscopique, le gyro s'impose une rotation transversale w . En gyroscopie instrumentale w s'appelle la **DERIVE** ou encore la **PRECESSION**.

Cette dérive est tout à la fois :

- Une ennemie quand il s'agit d'utiliser le gyroscope comme moyen de pointage ou de références d'axes inertiels (voir Poincot)
- Utile lorsque, nous le verrons le gyroscope est utilisé comme détecteur, puisque le couple gyroscopique mettra en évidence des perturbations externes ou des rotations à mesurer. (Voir instruments de mesure)

Si l'on remarque que :

$$|\vec{V}_a(P)| = |\vec{\omega} \wedge \mathbf{Cr}\vec{Z}| = \mathbf{Cr}\omega = |\vec{M}_G| \Rightarrow \omega = \frac{|\vec{M}_G|}{\mathbf{Cr}} \ll r$$

On prouve à posteriori que plus le moment cinétique $H = Cr$ du gyro est grand, plus la dérive est faible, on comprend que l'on cherche à atteindre des vitesses de rotation très élevée, pour réduire la dérive.

V EXEMPLES :

Pour alléger cette page, les exemples nombreux et divers sont fournis à part : [VOIR EXEMPLES PRATIQUES](#).

Nous ne donnons qu'un seul exemple significatif, car connu de tout le monde : la toupie.

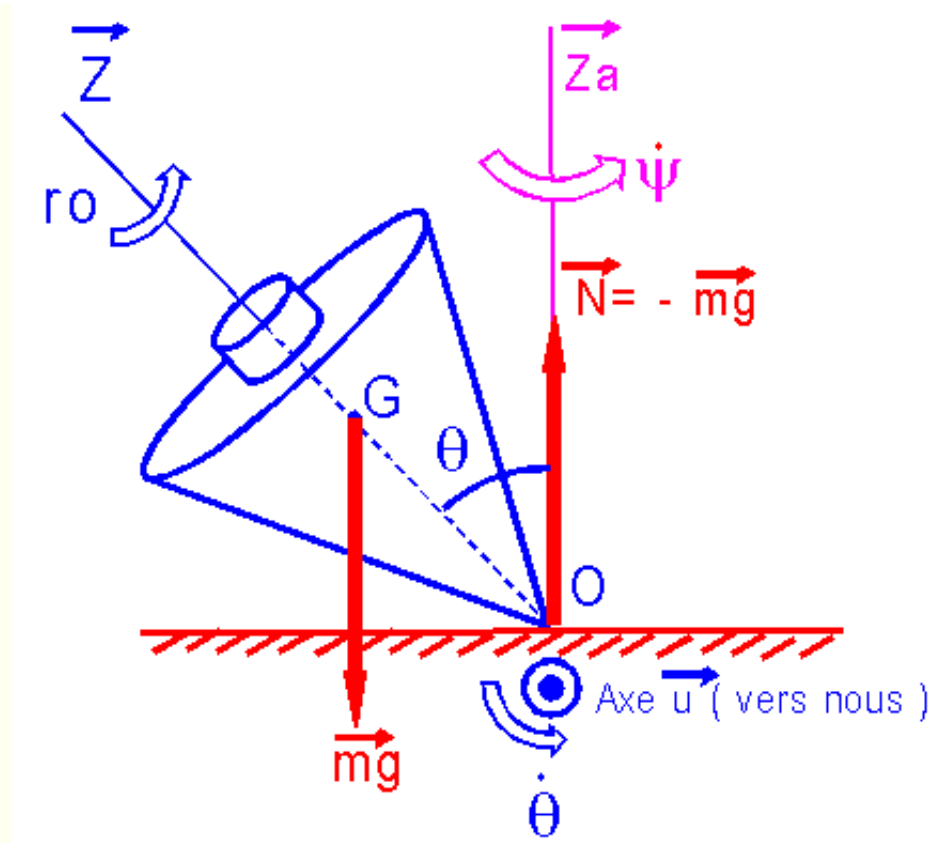
Une toupie est lancée en rotation de vitesse angulaire r_0 , autour de son axe principal Z. Mise en contact, sans frottement, avec une surface plane horizontale, quel est son mouvement?

On notera q l'angle de rotation autour de l'axe u, et y celui autour de l'axe vertical Za. On note OG = D, M la masse et C l'inertie axiale de la toupie.

Dans le cadre de la gyroscopie, on peut affirmer que les vitesses et accélérations angulaires de q et y sont petites. Dans ces conditions l'accélération verticale de G est quasiment nulle et la réaction N est identique au poids mg.

Typiquement $S^* = S_2 + S_3 = \text{Toupie}$ (S_2 inexistant).

Le couple externe M^* est porté par l'axe horizontal u et vaut $mgD\sin q$.



a) RESOLUTION PHYSIQUE :

Si l'on introduit le point P extrémité du moment cinétique principal, la vitesse de P est donc portée par l'axe horizontal u, orthogonal à Z. Donc l'angle θ ne peut varier, ce qui entraîne que l'axe Z ne peut avoir qu'un mouvement conique d'axe Za. C'est bien ce qui se passe en pratique.

Si l'on veut trouver la vitesse angulaire de précession autour de Z, on écrit que P décrit un cercle de rayon $H \sin \theta$. On obtient alors la précession :

$$\dot{\psi} = \frac{mgD}{Cr}$$

b) RESOLUTION CLASSIQUE :

On s'appuie sur le couple gyroscopique, en posant une vitesse angulaire transversale $\dot{\theta}$ (dérivée) inconnue :

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \vec{Z}_a \\ \vec{M}_{G^*}(\vec{F} \text{ ex } \vec{S}_3) + \vec{C}_g \approx \vec{0} \\ \vec{C}_g = C \vec{\Omega}_g \wedge \vec{\omega} \end{cases} \Rightarrow mgD \sin \theta - Cr \dot{\psi} + Cr \dot{\theta} (\vec{Z} \wedge \vec{u}) = \vec{0}$$

Pour conclure simplement comme plus haut :

$$\dot{\psi} = \frac{mgD}{Cr} \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = 0$$

NB : Ce résultat est en partie le résultat moyen du mouvement dit de Lagrange et Poisson, que vous retrouverez dans tout ouvrage de mécanique classique.

[Ce cours a une suite](#)

