Agrégation physique – ENS de Lyon – 2019-2020

27 juin 2020

LP05 - Lois de conservation en dynamique

Gauthier Legrand et Francis Pagaud

27 juin 2020

Bibliographie

→ Mécanique MPSI-PCSI, **Brasselet**
→ Physique tout-en-un MPSI, 2e édition, **Sanz**
→ Physique atomique tome 1, **Cagnac**
→ L'énergie dans le secondaire, BUP Janvier 2019, **Ducasse**
→ Système Terre-Lune : `https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_acceleration`
→ Symétries et invariance ellipse, BUP 751, **Sivardière** (Intéressant pour Runge-Lenz et son interprétation)

Pré-requis : Niveau L3

→ Principe fondamental de la dynamique, théorème de l'énergie cinétique, théorème du moment cinétique
→ Energie potentielle
→ Energie de masse, relation de de Broglie, photon
→ Notions de cinématique relativiste
→ Mouvements dans un champ à force centrale

Table des matières

Il faut vraiment choper le livre "La Symétrie" de Sivardière.

Reste à faire : Un diapo et un Python

Commentaires du jury

2017 Des exemples concrets d'utilisation des lois de conservation sont attendus.
2016 Lors de l'entretien avec le jury, la discussion peut aborder d'autres domaines que celui de la mécanique classique.
2015 Cette leçon peut être traitée à des niveaux très divers. L'intérêt fondamental des lois de conservation et leur origine doivent être connus et la leçon ne doit pas se limiter à une succession d'applications au cours desquelles les lois de conservation se résument à une propriété anecdotique du problème considéré.
2010 Le titre est général. Les lois de conservation sont à illustrer absolument et la physique est généreuse en exemples variés. Les exemples les plus pertinents sont ceux où les deux corps sont de masses comparables. Il est très maladroit d'insister sur des illustrations où, justement, il n'y a pas de conservation simple, le système étudié n'étant par exemple pas isolé. La distinction entre le mouvement d'ensemble et le mouvement barycentrique est fondamentale.

Introduction

Bilan à l'issue du passage de CDLS : Il avait fait un I/ sur toutes les quantités conservées agrémentées d'exemples (Cette anim sympa ou celle-ci). Puis dans le grand II, on suivait le problème à deux corps, avec une anim Python pour le centre de masse et le nombre de ddl réduits à chaque étape (très sympa ! Peut-être mieux que notre leçon.)

On a vu beaucoup de théorèmes de dynamique pour décrire l'évolution des systèmes : le PFD, le TMC, le TEC... Pas seulement le point mais aussi les solides. Mais l'étude de tous les degrés de liberté des systèmes est assez lourde. Pour simplifier les choses : lois de conservation. Ca a en effet des résultats très forts !

D'où viennent les lois de conservation ? Quelle utilité et quelles conséquences

Dans tout ce qui suit : non-relativiste, référentiels galiléens.

1 Conservation de la quantité de mouvement

1.1 Invariance spatiale et conservation

Source : Brasselet p .188 pour tout bien poser

Définition du système (solide déformable), des degrés de liberté. Mention du référentiel.

On énonce le PFD :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F_{ext}}} ; \vec{p} = \iiint_{(\Sigma)} \rho \vec{v} \mathrm{d}\tau$$

(les forces intérieures s'annulent par la 3me loi de Newton, pareil que pour un point) Il existe des interactions via des forces, qui sont des termes sources du mouvement. Si elles s'annulent : pas de force ! Définition du système isolé et pseudo-isolé. Revoir la définition pour les sytèmes à plusieurs points.

Alors $\vec{p}$ est une intégrale première du mouvement ! On obtient la première loi de Newton. On en déduit les équations du **barycentre** (déf) et donc les 3 ddl associés à la vitesse.

Dans le cas d'un solide, on peut distinguer le mouvement d'ensemble et le barycentre, c'est-à-dire que la mise en mouvement d'un point résulte en la mise en mouvement opposée d'un autre point via des forces intérieures.

Quelle origine ? **Il faut poser une définition de conservatif.** Considérons les forces selon x, la direction où l'impulsion est invariante. De plus, elles sont conservatives : $\vec{F_x} = -\vec{\nabla} U(x, y, z) \cdot \vec{e_x}$.

Si la force est invariante selon x, conservation de p_x.

L'homogénéité de l'espace implique la conservation de la quantité de mouvement.

→ C'est le cas pour le mobile autoporteur qui se balade à vitesse constante, regardez !

Une autre illustration possible : un ours de masse m sur la banquise de masse M, le système est isolé. Mais pour ça il faut le J'intègre MP-MP* de l'ancien programme, p. 256. Ou bien le tir au pistolet, on calcule le recul.

1.2 Cas du problème à deux corps

Source : Mécanique 1, BFR ? ou bien Grüber Mécanique générale, sur le problème à deux corps

Et maintenant à deux corps :

→ Et si on en prend deux et qu'on considère le barycentre... Ben ça marche aussi ! *Gauthier - "Ménan ! ?"*, peut-être que cette expérience est de trop

Interprétation : Je n'ai aucune idée de l'état dans lequel finissent les mobiles, mais pour le barycentre, ça je sais quoi qu'il arrive.

On peut également préparer le terrain pour les problèmes à deux corps dans un champ de force central : Grüber p. 555, on établit le mouvement avec le réf barycentrique, le mobile fictif de masse réduite et les cas limites. On passe ainsi de 12 ddl à 6 ddl en étudiant cette particule fictive.

Transition : Un système compliqué devient alors carrément plus simple ! Il existe une autre grandeur carrément commode : l'énergie.

2 Conservation de l'énergie

2.1 Invariance temporelle et conservation

Source : Brasselet p. 205

On part du théorème de l'énergie cinétique, pour un solide On peut le redémontrer pour un point à partir du PFD mais on s'en fiche.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = P_{ext} + P_{int}} ; E_c = \frac{1}{2}\iiint_{(\Sigma)} \rho\vec{v}(r)^2\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}Mv_G^2 \text{ pour un solide en translation}$$

Or, P_{ext} contient les termes de forces conservatives et non-conservatives. On en déduit le théorème de l'énergie mécanique.

Ainsi, pas de puissance non-conservative (système conservatif) ni de puissance intérieure = l'énergie cinétique est une invariance temporelle. C'est très fort, ça peut tout résoudre pour les systèmes 1D.

Origine : système conservatif **(Donc potentiel indép du temps)**, pas de puissance intérieure. Alors :

$$dE_c = P_{ext,c}dt \tag{1}$$

$$E_c(t_2) - E_c(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{\nabla}U \cdot \vec{v}dt \tag{2}$$

$$\Delta E_c = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{\nabla}U \cdot \vec{r} \tag{3}$$

$$\Delta E_c = -\int_{U_1}^{U_2} dU + \cancel{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U}{\partial t}} \tag{4}$$

$$\underbrace{\Delta E_c + \Delta U}_{\Delta E_m} = 0 \tag{5}$$

L'homogénéité temporelle (aka invariance par translation temporelle) implique la conservation de l'énergie mécanique.

Exemple : le pendule

La conservation de l'énergie pour un pendule simple. On peut faire le tracé des énergies pour le pendule. Cette énergie nous dit tout du système.On a une légère décroissance ? Hé oui, le système subit des frottements.

Transition : De fortes implications ! Et pas qu'en mécanique.

2.2 Effet Compton

Source : Cagnac p. 54

Trop ambitieux !

-Certains problèmes sont juste trop complexes... Les chocs = formalisme compliqué. Mais on peut les traiter via la conservation !

C'est également fait en MQ : l'effet Compton. *Dire ce que l'on observe en substance.* C'est relativiste, la dynamique est compliquée. On a beaucoup de DDL. Mais les lois de conservation permet de traiter cela simplement.

Attention à bien poser le problème. Faire bien le lien avec les équations en classique notamment et noter les nouveux invariants ($\vec{p} = \gamma m \vec{v}$).

- **Système :** Photon (ν_0) + électron. La direction x : celle du photon. Interaction dans un rayon fini. A l'issue de l'émission du nouveau photon : angle θ du photon de fréquence ν, ϕ pour l'électron d'impulsion $\vec{p}$.
- **Référentiel :** Référentiel fixe, celui de la particule initialement.
- Inconnues : (ν, $\vec{p} = \gamma m v \vec{e_\phi}$, θ, ϕ)

Propriétés	Avant le choc	Après le choc
Energies	$\begin{cases} E_{ph} = h\nu_0 \\ E_e = mc^2 \end{cases}$	$\begin{cases} E_{ph} = h\nu \\ E_e = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \end{cases}$
Impulsions	$\begin{cases} \vec{p}_{ph} = \dfrac{h\nu_0}{c}\vec{e_x} \\ \vec{p}_e = \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{p}_{ph} = \dfrac{h\nu}{c}\vec{e_\theta} \\ \vec{p}_e = p\vec{e_\phi} \end{cases}$

Conservation de l'impulsion selon $\vec{e_x}$:

$$\frac{h\nu_0}{c} + 0 = \frac{h\nu}{c}\cos\theta + \gamma m v \cos\phi$$

Conservation de l'impulsion selon $\vec{e_y}$:

$$0 + 0 = \frac{h\nu}{c}\sin\theta - \gamma m v \sin\phi$$

Conservation de l'énergie :

$$h\nu_0 + mc^2 = h\nu + \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

4 inconnues, trois équations, on peut tout exprimer en fonction de 1 inconnue, en l'occurrence θ, qui est ce qu'on mesure.

En mettant les deux premières au carré que l'on somme :

$$p^2 = \frac{h^2}{c^2}(\nu_0^2 + \nu^2 - 2\nu_0\nu\cos\theta)$$

alors que dans la dernière :

$$p^2c^2 = \Big(h(\nu_0 - \nu) + mc^2\Big)^2 - m^2c^4 = h^2(\nu_0^2 + \nu^2 - 2\nu_0\nu\cos\theta)$$

En passant en longueurs d'onde :

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)}$$

On déduit des trucs quelque soit l'interaction ! Si on voulaitla prendre en compte, on aurait déduit la section efficace, c'est plus long et compliqué.

3 Conservation du moment cinétique

3.1 Invariance rotationnelle et conservation

Source : Sivardière, La symétrie p. 765 ?

Reprenons : On se replace dans notre système, on fait le TMC par rapport au point O :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{Ext}(O)} ; \vec{L} = \iiint_{(S)} \rho \vec{OM} \times \vec{v} d\tau$$

et $\mathcal{M}_{Ext}(O) = \vec{OM} \times \vec{F}$. Il y a conservation si le moment est nul $\Longleftrightarrow$ les moments se compensent/sont nuls ou si on a une force centrale.

Origine : Potentiel en sphérique. Alors : $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r, \theta, \Phi)$, donc

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = -\vec{r} \times \vec{\nabla}U(r, \theta, \phi)$$

Or, $\vec{\nabla}U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \Phi} \end{pmatrix}$

Donc le produit vectoriel est nul si les dérivées par rapport à θ et Φ sont nulles.

L'isotropie spatiale (aka invariance par rotation spatiale) implique la conservation du moment cinétique.

On peut le vérifier en direct (expérience de la chaise + roue ?) ou bien à l'aide d'une vidéo : `https://youtu.be/2Oc-Ucx_4Ug`

Cette loi est moins intuitive. Elle marche, mais comment on l'explique ? Pourquoi on objet qui se contracte se met à tourner plus vite ? On peut la dissocier de la cause, qui est plus ou moins le TEC en fait : Merci VSauce

Exemples d'application : J'ai tout rédigé dans le doute, il faudra faire un choix qui dépend du timing

Choix n°1 : "Le chat retombe toujours sur ses pattes". Petit site Internet rapide.

Choix n°2 : Au cas où on est large en temps. Conservation du moment angulaire du système Terre-Lune.

On suppose les deux astres parfaitement sphériques avec une vitesse de rotation constante, des trajectoires circulaires et ayant le même plan équatorial. **(Important à mentionner :** Le système n'est pas isolé, le Soleil exerce une grande force. Par conséquent il y a également des marées du Soleil, mais elles sont plus faibles d'un facteur 2. Et pour la contribution au moment, il faut regarder l'angle de déphasage également... Mais on va le négliger pour l'instant. Note perso : la Lune étant dans la sphère de Hill de la Terre, c'est bien l'interaction terrestre qui est prépondérante.

On part d'une observation (géologique) : La durée des jours rallonge de 2ms/siècle (dû aux marées). Si on fait le calcul, $\dfrac{\mathrm{d}\Omega_T}{\mathrm{d}t} = -4.5 \times 10^{-22}$ rad/s

Or, le système est isolé, donc il y a conservation du moment cinétique $\sigma = I_T\Omega + M_L d_L^2 \omega$ où ω est la pulsation de rotation de la Lune autour de la Terre. By the way, la rotation de la Lune sur elle-même est quasi-nulle (négligeable) dûe à ce même effet de marée, appliqué de la Terre sur la Lune.

Or, en faisant le PFD sur un mouvement circulaire, on obtient $\omega = \sqrt{\dfrac{GM_T}{d_L^3}}$

Via la conservation, on en déduit :

$$I_T \frac{\mathrm{d}\Omega_T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sqrt{GM_T}}{2\sqrt{d_L}} M_L \frac{\mathrm{d}(d_L)}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(d_L)}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\sqrt{d_L}}{\sqrt{GM_T}M_L} I_T \frac{\mathrm{d}\Omega_T}{\mathrm{d}t}}$$

A.N. :
- $I_T = 8 \cdot 10^3 7$ kg $\cdot$ m^2
- $M_T = 6.0 \cdot 10^2 4$ kg

— $M_L = 7.3 \cdot 10^2 2$ kg
— $d_L = 3.8 \cdot 10^8$ m

On trouve 3.2 cm/an, ça colle vraiment pas mal aux mesures de 3.8 cm/an (mesures à afficher ?). Dans 10 000 ans (? se renseigner sur ce nombre) on ne pourra plus avoir d'éclipses totales.

L'effet est un million de fois plus faible pour le Soleil sur la Terre sur le ralentissement des jours.

3.2 Retour sur le problème à deux corps

Source : Sanz MPSI 2e édition p. 719 ou Hprépa MPSI méca p.156

Là où ça marche bien, c'est pour la mécanique des astres. On reprend les considérations faites dans le I/. **Attention à poser correctement le truc tout de même, il faut se replacer dans le cadre de l'étude du mobile fictif de masse réduite. On fait le dessin.**

On sait que le mouvement est plan et que l'énergie est liée, on ne revient pas dessus : il reste 2 ddl, $(r, \dot{r})$.

On fait intervenir pleins de choses ! Le barycentre ne bouge pas (conservation des impulsions). Invariance temporelle car on a des potentiels indépendants du temps (conservation de l'énergie). Et enfin il existe des forces centrales, conservation du moment cinétique !

On montre que ce vecteur est invariant, Sanz p. 719 pour la 2e édition.

On en déduit la trajectoire avec la résolution de Sanz ancien programme ou le BUP de Sivardière.

On retrouve une trajectoire fermée, typique des astres, et on comprend mieux la symétrie qui justifie l'existence de ce vecteur, cf. BUP Sivardière, fortement lié au fait que la trajectoire soit fermée et au théorème de Bertrand. Sa direction donne le grand axe, son module l'excentricité.

Ainsi, on a comblé par des lois de conservation les ddl du système, approche faisable avec les variables de Binet, on a juste fait ça plus simplement.

Conclusion

Voilà, on a réussi à traiter des problèmes complexes simplement par des lois de conservation.

On a vu l'intérêt des symétries, et c'est très général (MQ notamment).

Ouvertures possibles : On peut mentionner la thermo et dire que les forces non conservatives retrouvent des lois de conservation en instaurant des ddl microscopiques.

Commentaires pendant la prépa aux oraux

— Penser à bien souligner l'intérêt des lois de conservation, notamment en dénombrant toujours les ddl et leurs simplifications via les lois de conservation. La motivation de la leçon doit être explicite. A mes yeux, on cherche à aller plus loin et de prendre du recul en parlant d'invariance et de l'implication en termes de ddl des quantités conservées : "une intégrale première c'est quand même sympa pour étudier une évolution". Et la partie sur le problème à deux corps fait sortir ce vecteur de Runge-Lenz ultra-intéressant, c'est pourquoi on en parle.

— La 3me loi de Newton : pas vraie en l'état pour des solides ! Ce sont les forces concourantes à l'axe liant A et B qui sont opposées, *aka* la projection d'une force et de sa réciproque le long de l'axe AB.

— **force conservative :** force dérivant d'un potentiel. Le travail ne dépend pas du chemin suivi.

— Connaître toutes les lois de Kepler et tout ça. J'ai redécouvert la loi de Kepler dans le cas général, c'est intéressant : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi C}{G(M_S+M_T)}$

— Revoir Noether

— Fil de pensée pour le problème à 2 corps : La conservation de l'impulsion nous fait passer à 6 ddl dans l'espace des phases. La conservation du moment cinétique nous donne un mouvement plan, 4 ddl. La loi des aires nous fait passer à 3 ddl. Puis l'énergie effective permet de passer à deux ddl, r et $\dot{r}$, donc on utilise Runge-Lenz.

Questions

- Qu'entendez-vous par espace isotrope ? De quelle façon peut-on traiter des systèmes non conservatifs en les rendant conservatifs ? Pourquoi avoir proposé le vecteur de Runge-Lenz, quelle est son utilité en mécanique quantique (cf Aslangul) ? Un autre correcteur m'a posé des questions simples comme lier la courbe d'énergie potentielle effective à la trajectoire d'un astéroïde en état libre (situer le périgée). Puis une ouverture sur les états libre et liés en MQ.
- Pour la Terre autour du Soleil, est-ce qu'il y a des grandeurs conservées autres que le moment cinétique et l'énergie ? Pour le pendule pesant : quelle est la propriété fondamentale qui permet la conservation de l'énergie ? J'ai fait le choc frontal avec les billes : est-ce qu'on peut toujours résoudre le problème des chocs, même en 2D ou 3D ? Traiter plutôt l'effet Compton
- Quand peut-on dire d'un objet qu'il est à l'équilibre ? Quand le moment cinétique se conserve-t-il ? Les lois de conservations permettent-elles de déterminer les vitesses des objets après le choc ? À une, deux, trois dimensions ?
- Quelques questions sur les coniques, sur l'allure des énergies potentielles effectives en général et sur les trajectoires : à quelles conditions sont-elles elliptiques ? fermées ?