LP5 – Lois de conservation en dynamique

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : L3

Bibliographie

✍ *Mécanique du point*, **BFR**
✍ *J'intègre MPSI*, **Salamito**
✍ *Optique, une approche expérimentale et pratique*, **Houard**

Prérequis

➢ Changement de référentiel et formules de composition des vitesses/accélérations

Table des matières

Remarques sur les leçons précédentes

- 2017 : Des exemples concrets d'utilisation des lois de conservation sont attendus.
- 2016 : Lors de l'entretien avec le jury, la discussion peut aborder d'autres domaines que celui de la mécanique classique.
- 2015 : Cette leçon peut être traitée à des niveaux très divers. L'intérêt fondamental des lois de conservation et leur origine doivent être connus et la leçon ne doit pas se limiter à une succession d'applications au cours desquelles les lois de conservation se résument à une propriété anecdotique du problème considéré.

Beh le plan c tout le temps pareil sauf Francis et Gauthier mais ils ont bien aimé la leçon des cléments et disent que c'est peut être mieux donc on part la dessus. Possibilité de faire une dernière troisième partie sur l'effet Compton pour montrer que ça marche en relativité restreinte.

Introduction

1 Quantités conservées et invariances

Dans cette partie, nous allons considérer un système Σ dans un référentiel galiléen. On pourra donc y appliquer tous les théorèmes que l'on a vu jusqu'à maintenant. Plus particulièrement, on considérera seulement des forces conservatives pouvant s'appliquant sur ce système, i.e. qui dérivent d'un potentiel scalaire. L'idée est la suivante : nous allons montrer que les conservation de quantité en mécanique relève d'invariances de notre système.

1.1 Énergie

Commençons tout d'abord par l'énergie. D'après le théorème de l'énergie cinétique, la variation d'énergie cinétique d'un système est égal au travail des forces agissant sur ce système :

$$\Delta E_c = E_{c,2} - E_{c,1} = W \tag{1}$$

Pour un système isolé, le travail des forces est nul, donc l'énergie cinétique qui correspond aussi à l'énergie mécanique se conserve. Ça on le sait. Mais cette conservation s'arrête-t-elle aux systèmes isolés ? La réponse est non bien entendue, vous avez déjà vu la conservation de l'énergie mécanique pour la chute libre par exemple. Sous quelle(s) condition(s) est-ce le cas alors ?

Si l'on note $U(\vec{r}, t)$ le potentiel associé à la résultante des forces s'appliquant sur le système, on peut en déduire le travail W reçu par le système lors du passage d'un point 1 à un point 2 de la trajectoire :

$$W = \int_1^2 \vec{F}.\vec{dl} = -\int_1^2 \overrightarrow{\text{grad}} U(\vec{r}, t).\vec{dl} = -\int_1^2 dU + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt \tag{2}$$

d'où finalement :

$$(E_{c,2} + U_2) - (E_{c,1} + U_1) = \Delta E_m = \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt \tag{3}$$

La variation d'énergie mécanique du système est donc nulle quelque soit les points de la trajectoire, i.e. elle se conserve, si le potentiel ne dépend pas du temps. Cela correspond à une **invariance temporelle** du système.

On peut prendre l'exemple d'une montagne russe. Le potentiel est alors $U(z) = mgz$, il ne dépend que de l'altitude, il est invariant par translation temporelle : le potentiel sera la même à t_1 et à t_2. Cette conservation de l'énergie mécanique n'impose pas cependant une absence de variation de l'énergie cinétique et d'énergie potentielle, simplement une conversion équitable.

1.2 Impulsion

Si on applique cette fois le principe fondamental de la dynamique à un système isolé, on a :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \tag{4}$$

donc l'impulsion est une autre quantité conservée ! Exemple des chocs https://www.edumedia-sciences.com/fr/media/179-collision-elastique-2d. Le système total est isolé, on voit que l'on a conservation de l'impulsion totale.

Y'a-t-il comme dans le cas de l'énergie des systèmes non isolés pour lesquels on a aussi conservation de l'impulsion ? De manière plus générale, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}U(\vec{r},t) \tag{5}$$

donc par projection on a :

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad \frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{6}$$

Ainsi on remarque que la composante de l'impulsion du système selon une coordonnée est conservée si le potentiel auquel est soumis le système ne dépend pas de cette coordonnée. De la même manière que l'on parle d'invariance par translation temporelle, c'est ici l'**invariance par translation spatiale** de notre système qui est donc responsable de la conservation de l'impulsion.

Si l'on reprend l'exemple du lancer d'une balle en chute libre, son impulsion horizontale reste constante, seule l'impulsion verticale évolue ! (ça permet de donner un exemple de l'invariance par translation spatiale sans avoir un système compliqué, les autres ne donnent que des exemples de systèmes isolés).

1.3 Moment cinétique

Si l'on applique finalement le théorème du moment cinétique à un système isolé, on a :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \tag{7}$$

Pour un système isolé on a donc aussi conservation du moment cinétique ! Ce phénomène s'exprime dans le patinage artistique avec les pirouettes (nom de la figure). Lae patineureuse commence à tourner avec les bras grand ouverts puis iel les ramène vers ellui et sa vitesse de rotation augmente. Comment cela se fesse ? En fait lae patineureuse peut être considéré-e comme un système pseudo-isolé (compensation poids/réaction et pas de frottements), son moment cinétique est donc conservé. Or $L = I\omega$ et $I \propto md^2$ donc si d diminue ω augmente CQFD. OdG du gain de vitesse angulaire ?

A quelle condition d'invariance cette nouvelle conservation est alors associée ? Dans le cas général on a :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\vec{r} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}U(\vec{r},t) \tag{8}$$

et donc en coordonnées sphériques :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\,\vec{e}_\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}\,\vec{e}_\phi \tag{9}$$

Pour que le moment cinétique soit conservé, il faut donc que le potentiel ne dépendent pas des deux coordonnées de rotation. On dit alors dans ce cas que le système est **invariant par rotation**.

Revenir sur force centrale = moment cinétique conservé, on les bassine avec ça, ça permet de se rattacher à ce que l'on sait déjà.

2 Application : le problème à deux corps

Les outils développés précédemment vont nous permettre de résoudre le problème à deux corps en le réduisant à un problème à un corps.

Le problème à deux corps est un modèle théorique important en mécanique dans lequel sont étudiés les mouvements de deux corps assimilés à des points matériels en interaction mutuelle (conservative), le système global étant considéré comme pseudo-isolé. Dans cette partie, on s'intéressera au cas où les deux corps sont en interaction gravitationnelle, lequel est un sujet important de la mécanique céleste. Les résultats obtenus permettent de rendre compte des trajectoires des planètes dans le système solaire (dans le référentiel héliocentrique) ainsi que celle de leurs satellites naturels ou artificiels, au moins en première approximation.

Schéma à faire au tableau :

On pose les masses m_1 et m_2 en des points M1 et M2, l'origine en O et les vecteurs unitaires de 1 vers 2 $\vec{r_{12}}$ et de 2 vers 1 $\vec{r_{21}} = -\vec{r_{12}}$. Les vecteurs $O\vec{M}_1$ et $O\vec{M}_2$ sont notés $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$;

La masse 1 est soumise à la seule force $\mathbf{F_{21}}$ qui est l'attraction gravitationnelle de la seconde masse :

$$\mathbf{F_{21}} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r_{12}^2}\mathbf{r_{21}}$$

et de même, la masse 2 est soumise à la force $\mathbf{F}_{21}$:

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r_{12}^2}\mathbf{r}_{12}$$

A priori pour décrire parfaitement le système, il faut déterminer 12 degrés de liberté $(r1, r_2, v_1, v_2)$. Nous allons utiiser les lois de conservation précédentes pour simplifier et résoudre le problème en réduisant le nombre de degrés de liberté.

2.1 Conservation de la quantité de mouvement

✍ BFR p94

Les forces prises en compte dans ce système dérivent d'un potentiel $U = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r_{12}}$ qui ne dépend que de r_{12} distance entre les masses définie par

$$r_{12} = |\mathbf{OM}_2 - \mathbf{OM}_1| = |\mathbf{M}_1\mathbf{M_2}| \ .$$

Ainsi, une translation spatiale globale du système laisse invariant r_{12} et donc U. On peut donc en déduire la conservation de l'impulsion globale du système $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v_2} = \mathbf{C^{ste}}$

Or si on définit le barycentre G des masses par $(m_1 + m_2)\,\mathbf{OG} = m_1\mathbf{OM}_1 + m_2\mathbf{OM}_2$., on peut remarquer que sa dérivée est donnée par

$$(m_1 + m_2)\,\mathbf{v_G} = m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2}$$

que l'on identifie avec l'expression obtenue : on a $\mathbf{v_G} = \mathbf{C}^{\mathrm{ste}}$. Le centre de gravité est en translation rectiligne uniforme. Come on a supposé le système pseudo-isolé, le référentiel barycentrique est donc galiléen, et on va dans la suite se placer dans celui-ci.

On peut alors écrire dans ce référentiel :

$$\begin{gathered}\mathbf{r}_1 = \mathbf{OM}_1 - \mathbf{OG} = (\mathbf{OM}_1 - \mathbf{OM}_2)\,\tfrac{m_2}{m_1+m_2} = -\tfrac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = -\tfrac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}\\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{OM}_2 - \mathbf{OG} = \tfrac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}\\ \text{avec } \mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{12} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\end{gathered}$$

La dynamique du système s'obtient donc en étudiant celle d'un point matériel fictif situé en $\mathbf{r}$, on lui applique donc le PFD.

$$\begin{gathered}m_1\tfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r_1}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_{12}\\ m_2\tfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r_2}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}\end{gathered}$$

$m_2m_1\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = (m_1 + m_2)\,\mathbf{F}_{21}$ par multiplication et différence

La dynamique du point fictif est donc déterminée par le PFD, en prenant une masse fictive $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ qui est la masse réduite du système. On étudie donc une masse μ fictive soumise à un potentiel $U = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r}$. On pourra alors en déduire toute la physique du système : si on connaît $r(t)$, alors on en déduit facilement r_1 et r_2, et v_1 et v_2. Des 12 degrés de libertés de départs $(r1, r_2, v_1, v_2)$ on s'est déjà réduit à 6.

ODG : Mq le barycentre du système Terre-Soleil est situé tout près du Soleil.

2.2 Invarariance par rotation

✍ BFR p23, p115. Le potentiel $U(r)$ du système ne dépend que de r , il y a donc invariance par rotation. On a montré que cela entraînait la conservation du moment cinétique du système :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v} = \mathbf{C^{ste}}$$

Le vecteur $\mathbf{L}$ est constant, or à tout instant $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ est dans le plan orthogonal à $\mathbf{L}$, donc le mouvement est plan. On passe de 6 à 4 DDL.

Une autre conséquence : $\|\mathbf{L}\| = \mu r^2\dot{\theta}$ est une constante noté $\mu\mathcal{C}$ avec $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta}$. Or l'aire balayée par le point est : $dA = \frac{\|\mathbf{r}\times v\ \mathrm{d}t\|}{2}$ donc

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\|\mathcal{L}\|}{2\mu} = C^{ste} = \frac{\mathcal{C}}{2}$$

On retrouve la deuxième loi de Kepler : pour le système Terre-Soleil, le rayon issu du Soleil balaye des aires égales pendant des temps égaux.

2.3 Conservation de l'énergie

✍ Salamito p152

Encore une fois, on utilise la partie 1 : l'invariance temporelle du potentiel entraîne conservation de l'énergie mécanique du système. Comme on a montré qu'on pouvait écrire le problème à deux corps comme le problème d'une particule représentée par μ et $\mathbf{r}$, l'énergie mécanique totale du système $\mathcal{E}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \tfrac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 + U(r)\\
\mathcal{E} &= \tfrac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \tfrac{\mathcal{G}m_1m_2}{r}\\
\mathcal{E} &= \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \left[\tfrac{1}{2}\mu\tfrac{\mathcal{C}}{r^2} - \tfrac{\mathcal{G}m_1m_2}{r}\right]\\
\mathcal{E} &= \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{peff}(r)
\end{aligned}$$

où $E_{peff}(r)$ représente l'énergie potentielle effective à laquelle est soumise la particule. Cette énergie ne dépend plus que de r, la dépendance en θ a disparu dans la constante des aires. On a donc un problème en 1D : plus que 2 DDL hehe...

On peut utiliser la positivité de l'énergie cinétique pour définir différents types de trajectoires en fonction de $\mathcal{E}$:

code python pour les trajectoires en fonction de l'énergie : C'est pas intéressant et on peut passer rapido dessus hehe.

On a exploité toutes les invariances du potentiel que l'on connaissait pour passer de 12 à 2 DDL. Il reste en fait une autre invariance (qui vient de la dépendance en $1/r$ de U.

2.4 Le vecteur de Runge-Lenz

Se préparer à des questions sur ce vecteur en meca Q (avec le Aslangul par ex)

Pour les systèmes soumis à un potentiel de la forme $U = \frac{k}{r}$, on peut définir un vecteur : $\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - mk\mathbf{r}$, appelé vecteur de Runge-Lenz. Montrons que ce vecteur est une quantité conservée de notre système :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} =& \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{L} + \mathbf{v} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} - Gm_1m_2\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta\\
=& - G\frac{1}{\mu}\frac{m_1m_2}{r^2}\mathbf{e_r} \times \mu r^2\dot{\theta}\mathbf{e_z} - Gm_1m_2\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta\\
=& Gm_1m_2\mathbf{e}_\theta\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta - Gm_1m_2\mathbf{e}_\theta\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = 0$$

Le vecteur de Runge-Lenz est bien une quantité conservée. Pourquoi utiliser ce vecteur ? Il permet d'obtenir rapidement l'expression de la trajectoire. On choisi le grand axe comme axe de référence pour les angles :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = Ar\cos\theta &= \mathbf{v}\times\mathbf{L}\cdot r\mathbf{e_r} - Gm_1m_2r\\
&= r\dot{\theta}\,\mathrm{Lr} - Gm_1m_2r\\
&= \mu\mathcal{C}^2 - Gm_1m_2r
\end{aligned}$$

On peut alors écrire l'équation de la trajectoire :

$$r = \frac{r_0}{1 + e\cos\theta} \text{ avec } r_0 = \frac{C^2}{Gm_1m_2} \text{ et } e = \frac{A}{Gm_1m_2}$$

On peut le tracer pour différents cas (programme Python) :

- $e = 0$ cercle de rayon r_0
- $e < 1$ ellipse
- $e = 1$ parabole
- $e > 1$ hyperbole

On peut d'ailleurs montrer que $E_m = G\frac{m_1m_2}{2\mu}\left(e^2 - 1\right) \cdot$ Pour $E_m < 0$, on a une trajectoire non seulement bornée, mais surtout fermée..

Conclusion

Ouverture sur l'effet Compton (Cagnac) : les lois de conservation ça marche aussi en relat gé.