LP00 – Titre

29 juin 2020

Laura Guislain & Pascal Wang

Niveau :

Commentaires du jury

Bibliographie

✍ *Le nom du livre*, **l'auteur**[1] ⟶ Expliciter si besoin l'intérêt du livre dans la leçon et pour quelles parties il est utile.

Prérequis

➢ Equations d'une ellipse, hyperbole, parabole (coniques)

➢

Expériences

☕ Biréfringence du quartz

Table des matières

Préparation

Ressources : Physique du patinage artistique : https://www.youtube.com/watch?v=qd4CVvItJlo, description https://www.youtube.com/watch?v=XkcTa1z2r-U, extrait à commenter https://youtu.be/TlXCk1LDlC0?t=177 ou les ralentis à la fin de https://youtu.be/23EfsN7vE0A?t=438

Lectures : Page wiki française du problème à deux corps, *Symétries*, Sivardière, conservation en mécanique quantique (symétrie du Hamiltonien) Basdevant, Energie nucléaire p37.

Passage : on vise 15min/15min. On peut sauter l'arme à feu et si on voit qu'il reste du temps à la fin du I/, on explique les marées.

Questions : diffusion Compton, allure de $E_{p,eff}$ pour d'autres potentiels centraux, théorème de Bertrand,

Ressources Laura

- Animation pour les chocs https://www.edumedia-sciences.com/fr/media/179-collision-elastique-2d
- Vidéo action réaction https://www.youtube.com/watch?v=r2RhQdHoZ1I
- Newton Third Law https://www.youtube.com/watch?v=Xx9kiF00rts
- Arme à feu : https://www.youtube.com/watch?v=Uj84yhpSah à 0.09m
- Patineur https://www.youtube.com/watch?v=0RVyhd3E9hY
- Terre Lune synchronisme https://journals.openedition.org/bibnum/678?lang=en
- Kepler + black hole https://www.eso.org/public/videos/eso0226a/

Introduction

Les cours précédents nous on permis de décrire la dynamique des points matériels. On a ainsi pu revoir la deuxième loi de Newton et le théorème du moment cinétique.

On a vu un certain nombre de principes et de théorèmes permettant de décrire l'évolution de certaines quantités physiques au cours du temps. Ainsi, vous connaissez depuis déjà plusieurs années le principe fondamental de la dynamique, qui relie l'accélération d'un système aux forces qui s'appliquent sur celui-ci. Cependant, ces diverses visions sont limitées à des cas où l'on est parfaitement capable de décrire toutes les forces qui s'appliquent sur un système, et donnent souvent lieu à des calculs assez lourds. Aujourd'hui, on va donc chercher à unifier la vision que nous donnent ces différentes lois sous un angle différent : celui des quantités conservées. On verra ainsi qu'un grand nombre de situations physiques peuvent être décrites par des lois de conservation, qui nous permettront de résoudre des problèmes de dynamique sans avoir à passer par la résolution (fastidieuse, voire impossible) d'équations différentielles.

Choc magnétique
On utilise des mobiles avec des aimants qui se repoussent au lieu d'un contact `https://www.youtube.com/watch?v=jRliHOjVilM`. L'un s'arrête et l'autre repart à la même vitesse. Pour le résoudre avec le PFD, cela a l'air difficile ! On va voir qu'avec des lois de conservation, c'est plus commode.

Lois de conservation Les lois de la dynamique Newtonienne sont données sous forme d'équation différentielles. On va présenter un autre point de vue, celui de la conservation de quantités, qui permet de prévoir le comportement d'un système sans résoudre d'équation différentielles.

Objectif Le but de cette leçon est de montrer que ces conservations sont liées à des principes plus généraux, notamment les symétries du problème. On va illustrer leur utilité pour résoudre des problèmes sans parler d'équation différentielle. On va montrer leur grande utilité dans le problème de Kepler.

1 Lois de fondamentales de conservation

Objectif Dans cette partie, on part des principes de la mécanique newtonienne. On rappelle le principe fondamental de la dynamique, applicable dans un référentiel galiléen R. On va alors considérer des invariances : Ce sont des transformations qui laissent le système et sa dynamique inchangés. On parle aussi de symétrie. On va montrer qu'il en résulte des grandeurs conservées. Il s'agit bien uniquement d'une réinterprétation, car ces visions n'apportent pas plus d'information que les lois dont elles dérivent !

Cadre : systèmes, référentiel On considère un système S, (ensemble de points matériels ou de solides) on va essayer de donner beaucoup d'exemples à chaque fois. On suppose dans toute cette partie que les forces dérivent d'un potentiel $U(x, y, z, t)$, qui est le potentiel dans lequel évolue le système. On précise une fois pour toutes qu'on se place dans un référentiel galiléen.

On peut remplir un transparent au fur et à mesure au lieu d'afficher le tableau de quantité conservées à la fin.
Dans les exemples, préciser à chaque fois le système auquel on applique la conservation et dans quel référentiel on se place.

1.1 Quantité de mouvement

Principe d'inertie Le principe d'inertie donne qu'un point matériel isolé ou pseudo-isolé dans un référentiel galiléen a une trajectoire rectiligne uniforme. Sa quantité de mouvement est conservée. Comment faire le lien avec les invariances ?

Invariance par translation selon x On dit que le problème est invariant par translation selon x lorsqu'il n'existe pas de position x_0 privilégiée dans le problème. Ceci se traduit par : le potentiel $U(y, z, t)$ ne dépend pas de x.

Conservation de p_x On calcule, voir fiche. On a alors conservation de la quantité de mouvement suivant l'axe x, le long d'une trajectoire. *Au passage, cette vidéo du ballon et du skateboard* `https://www.youtube.com/watch?v=r2RhQdHoZ1I` *est pas mal mais je crois qu'on a pas le temps.*

Espace homogène Plus généralement si U est invariant dans toutes les directions (ce qui correspond à un espace dit homogène), on trouve une force nulle appliquée au système et donc le principe d'inertie.

Exemple : chute libre Dans un champ gravitationnel uniforme, avec schéma des 3 axes, il n'y a pas invariance par translation selon z : un point matériel a une énergie potentielle différente à des altitudes différentes.

$$U(z) = mgz + cte \tag{1}$$

Par contre, il y a invariance du problème selon x et y, liée à la conservation de la quantité de mouvement horizontale lors du mouvement de chute d'un corps (dans la limite ou l'on peut négliger les frottements de l'air). Ainsi, pas besoin de de résoudre le PFD en x et y, on connaît la réponse. Mais en z, il faut résoudre le PFD.

Application : recul d'un fusil/canon C'est optionnel dans le plan, à virer si on veut finir bien, ou parler des marées. Un pistolet de masse m_P = 1kg tire une balle de masse m_B = 10g horizontalement avec une vitesse $v_B = 350m/s$. Si le système balle+pistolet n'est soumis à aucune force externe, soit $U = 0$, on applique la conservation de la quantité de mouvement, le système étant initialement au repos : $0 = m_p v_p + m_b v_b$. On trouve $v_p = -3.5m/s$. Le pistolet a un mouvement de recul. *En pratique, le système n'est pas isolé puisque qu'un bras le tient. L'énergie cinétique du fusil égale à 6J ici, est absorbée par le bras du tireur. Dans certaines armes, un système récupère une partie de cette énergie pour éjecter la douille vide.*

Choc élastique sur table à coussin d'air

Présentation Les lois de conservation en dynamique sont particulièrement utiles lors de collisions. On montre la vidéo d'une collision élastique sur banc à air `https://youtu.be/E1gnwgkj-PA?t=165`. On utilise un banc à air pour minimiser les frottements. Les mobiles ont la même masse. On observe que le deuxième mobile repart à avec la même vitesse que le premier, qui s'immobilise. Pour ce système, U est indépendant de la direction du rail x : p_x est conservé. On écrit explicitement au tableau $p_{tot} = p_1 + p_2$ avant et après.

Interaction magnétique On recommence l'expérience avec des aimants qui se repoussent au lieu d'un contact `https://www.youtube.com/watch?v=jRliH0jVilM`. On observe la même conclusion.

Intérêt de la description en terme de conservation En effet, dans l'interaction par choc ou par magnétisme, on s'imagine bien que ce serait très compliqué de résoudre explicitement la dynamique du système avec le principe fondamental de la dynamique. Les lois de la dynamique permettent de contourner cette difficulté, du moment où on ne s'intéresse qu'à la différence entre l'état initial et final.

> La puissance des lois de conservations, c'est que si on ne s'intéresse qu'à la différence entre l'état initial et final, il n'y a pas besoin de connaitre le détail microscopique du choc, ni de résoudre le PFD.

En revanche, la description de l'interaction est indispensable pour remonter complètement à la section efficace de diffusion,

Nécessité d'une équation supplémentaire On a observé que le premier mobile s'arrête complètement. C'est quand même remarquable ! Peut-on le prédire ? Les données sont $p_{i,1}$ et $p_{i,2}$. On compte les inconnues : $p_{f,1}$ et $p_{f,2}$. La conservation de l'impulsion fournit une équation. Quelle est l'autre ?

Bonus :Propulsion d'une fusée. ✍ `https://fr.wikipedia.org/wiki/Propulsion_spatiale`

Il manque une équation pour résoudre le choc.

1.2 Energie

Invariance par translation temporelle On considère un potentiel qui cette fois ne dépend que de l'espace : U(x,y,z). Intuitivement, le moment où on commence une expérience n'a pas d'importance sur le résultat.

Exemple : chute libre Dans un champ de gravité constant $U = mgz + cte$, l'invariance par translation temporelle est vérifiée. *Ce n'est pas le cas en RG ?*

Conservation de l'énergie mécanique On peut alors repartir du principe fondamental de la dynamique. On fait le calcul de la fiche, on peut le projeter, c'est la démonstration du théorème de l'énergie cinétique. On retrouve ainsi la conservation de l'énergie mécanique comme conséquence du principe fondamental de la dynamique et de l'invariance par translation temporelle.

Dans un référentiel galiléen, si un système n'est soumis qu'à des forces dérivant d'un potentiel indépendant du temps (dites conservatives), son énergie mécanique est constante.

Formulation Dans un référentiel galiléen, si un système n'est soumis qu'à des forces dérivant d'un potentiel indépendant du temps (dites conservatives), son énergie mécanique est constante. Dans ce cas, on dit que les forces sont conservatives, que le système est conservatif. Ce n'est pas le cas lorsqu'il y a une force de frottement (dérivée temporelle d'ordre impair).

Application au choc élastique On revient sur le choc élastique entre deux solides de même masse. Ici, $U = 0$. La conservation de l'impulsion et de l'énergie donne

$$\begin{aligned} p_{i,1} + p_{i,2} &= p_{f,1} + p_{f,2} \\ \frac{p_{i,1}^2}{2m} + \frac{p_{i,2}^2}{2m} &= \frac{p_{f,1}^2}{2m} + \frac{p_{f,2}^2}{2m} \end{aligned} \tag{2}$$

Avec $p_{i,1} \equiv p$ et $p_{i,2} = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} p &= p_{f,1} + p_{f,2} \\ p^2 &= p_{f,1}^2 + p_{f,2}^2 = (p_{f,1} + p_{f,2})^2 \end{aligned} \tag{3}$$

D'où, en développant le carré,

$$2p_{f,1}p_{f,2} = 0$$

Ainsi, soit $p_{f,1} = 0$, pas de choc. C'est pas surprenant vu qu'on a pas spécifié la nature de l'interaction, donc il peut ne pas y avoir d'interaction. La solution qu'on observe est bien $\boxed{p_{f,2} = 0}$.

Bonus : collision parfaitement inélastique ✍ Bonne vidéo! Si les mobiles 1 et 2 sont attachés après la collision (par du velcro par exemple), on parle de collision inélastique car une nouvelle entité 1+2 est créée. Mais si on considère que l'énergie est conservée, on peut quand même prédire le résultat en considérant que l'énergie finale est $E_f = (m_1 + m_2)v_f^2/2$, en additionnant les masses en utilisant une unique vitesse.

Extension : diffusion Compton On peut aussi utiliser ce formalisme pour traiter des collisions à l'échelle microscopique. Par exemple, la collision élastique entre un photon et un électron : la diffusion Compton.

Non-résolvabilité des problèmes de choc En 1D, on a assez d'équations pour résoudre le problème. En 2D, 3D, il manque des équations pour résoudre le problème. Par exemple, dans la diffusion Compton, l'angle θ est libre de varier.

Limites On a fait une approche mécanique.

- Un choc peut être inélastique. Entre deux boules de billard, l'énergie est dissipée dans les vibrations des solides, ce qui provoque leur échauffement.
- Or l'énergie mécanique est souvent dissipée par frottement. L'énergie mécanique est convertie en énergie interne et le corps s'échauffe : le support chauffe (on se chauffe les mains en les frottant) ou l'air chauffe. Les transferts thermiques sont décrits par la thermodynamique.
- D'où vient l'énergie cinétique dans l'exemple du fusil ? C'est une réaction chimique qui fournit l'énergie qui détend le gaz et éjecte la balle.
- *Les collisions à l'échelle subatomique sont élastiques à condition que la nature des particules ne change pas durant le choc. Garder en tête que des collisions inélastiques peuvent se produire par conversion d'énergie de masse en énergie cinétique ou inversement.*

↓ *On a considéré des système 1D. On passe à une conservation d'un grandeur 3D.*

1.3 Moment cinétique

Invariance par rotation/isotropie On écrit cette fois le potentiel en coordonnées sphériques $U(r, \theta, \phi, t)$, il s'écrit $U(r, t)$ si on a invariance par rotation. La force s'appliquant sur le système s'écrit : $\vec{F} = F_r \vec{e}_r$.

Exemple : interaction gravitationnelle Le potentiel gravitationnel créé par une masse ponctuelle m est : $U(r) = -Gm/r + cte$. Le moment cinétique est conservé.

Conservation du moment cinétique On applique le théorème du moment cinétique [calcul]. On a conservation du moment cinétique lorsqu'il y a invariance par rotation.

Dans un référentiel galiléen, si un système n'est soumis qu'à des forces conservatives dérivant d'un potentiel invariant par rotation, son moment cinétique est conservé

Application : Le patineur en rotation ✍ Super explications par ici! On veut expliquer : https://youtu.be/0RVyhd3E9hY?t=59. La patineuse arrive à tourner plus vite autour de son axe. Comment ? On considère la projection du moment cinétique L_Δ selon l'axe vertical de son corps Δ. Le poids n'exerce pas de couple car la patineuse est approximativement droite. On suppose le contact ponctuel avec la glace : la réaction du support s'applique sur le point de contact qui se trouve sur l'axe Δ donc n'exerce pas de couple (en fait : ce n'est pas exactement le cas, pour garder l'équilibre on plante une partie des patins cf. vidéo). On suppose le contact ponctuel parfait avec la glace : pas de moment résistant. Ainsi, L_Δ est conservé. Lorsque la patineuse rapproche ses membres de l'axe de symétrie $L = I\omega$ est conservé mais I diminue donc ω augmente.

On va approfondir en analysant un extrait du champion du monde et double médaille d'or olympique en compétition : https://youtu.be/23EfsN7vEOA?t=438 En l'air, le patineur rapproche les membres de son corps pour minimiser I et donc augmenter ω. Pour enchaîner des sauts, le patineur lève une jambe à l'atterrissage pour ralentir sa vitesse de rotation tout en gardant son moment cinétique. C'est très important d'utiliser les jambes car ils contribuent autant voir plus que les bras au moment d'inertie : ils sont plus lourds et plus longs. Cela permet d'avoir un deuxième patin stable pour enchainer un deuxièmes saut. Avant le deuxième saut, le patineur plante un patin au sol pour augmenter son moment cinétique : L_Δ n'est pas conservé à cette étape. Ensuite, c'est la même chose que pour le premier saut, il essaie de rapprocher ses membres le plus possible pour maximiser sa vitesse de rotation. Pour l'atterissage, le patineur étend encore une fois ses jambes et ses bras pour arrêter de tourner.

Application : loi des aires On considère le Soleil et un astre du système solaire. La masse du Soleil est $\sim 10^{30} kg$. La masse de Jupiter est $10^{27} kg$. Ainsi, on considère que le Soleil est fixe dans le référentiel de Copernic (lié au centre de masse du système solaire). On place l'origine au centre du Soleil. On considère une planète repérée par $\vec{r}$. La première loi de Kepler donne que la planète suit une trajectoire elliptique. Soit $A(t)$ l'aire de la surface balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$ durant le mouvement, alors la seconde loi de Kepler stipule que des aires égales sont balayées dans des temps égaux. La difficulté est essentiellement d'ordre géométrique. On va faire simple en rappelant l'interprétation géométrique du produit vectoriel. Le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ a une direction perpendiculaire à $\vec{a}$ et sa norme est l'aire du parallélépipède engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On montre un schéma. L'aire dA balayée par $\vec{r}$ en un temps dt est égale à l'aire du triangle formé par $\vec{r}$ et d$\vec{r}$, soit la demi-aire du parallélépipède engendré par $\vec{r}$ et d$\vec{r}$ on montre un schéma :

$$\mathrm{d}A = \frac{|\vec{r} \wedge \mathrm{d}\vec{r}|}{2} = \frac{|\vec{r} \wedge \vec{v}|}{2}\mathrm{d}t = \frac{|\vec{L}|}{2m}\mathrm{d}t$$

Or $\vec{L}$ est conservé donc $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = cte$ d'où la loi des aires.

Animation python de la loi des aires
Pour le moment python, on peut lancer le programme du site de l'agreg "Illustration de la seconde loi de Kepler".

Application : allongement de la distance Terre-Lune La Terre a une vitesse de rotation qui diminue à cause de la dissipation des forces de marées **ODG:** 3 TW. (cf schéma https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_acceleration) Par conservation du moment cinétique du système "Terre-Lune", quand la Terre décélère, le moment cinétique de la Lune associé à son mouvement orbital augmente en compensation, ce qui se traduit par son accélération sur son orbite et, donc, son éloignement. **ODG:** 4cm par an. *Comment la lune "sait-elle" que la Terre ralentit ? Puisque donc le bourrelet de marée n'est pas dirigé exactement vers le centre de la Lune (cas idéal), et que les deux bourrelets (celui d'avant et celui d'arrière) ne sont pas situés aux mêmes distances de la Lune, celle-ci « sent » cette asymétrie. Le bourrelet situé face à la Lune a un effet plus important et l'accélère ; le bourrelet situé à l'arrière la ralentit, mais son effet est moins important car il est plus distant. Le résultat de ce couple est une force contribuant à accélérer la rotation de la Lune et à éloigner son orbite* La distance lunaire continue à augmenter jusqu'à ce que la Terre et la Lune soient verrouillées gravitationnellement et aient une rotation synchrone. Cela se produit lorsque la période de rotation du corps est synchrone avec sa période de révolution. C'est ce qui est arrivé à la Lune. Comme les forces de marées varient en M/d^3, l'effet des marées est plus marqué sur la Lune que sur la Terre. Les modèles prédisent que 50 milliards d'années seraient nécessaires pour que la Terre arrête de tourner. Les deux corps sont alors dans un équilibre et aucune autre énergie de rotation n'est échangée.

> *On a vu dans les parties précédentes le lien entre invariance/symétrie et grandeur conservée. Ce résultat est encore plus général.*

$\downarrow$

1.4 Mise en perspective avec le théorème de Noether

Pour une présentation de 30 min, on peut sauter la partie technique, on donne juste le message et on y revient en conclusion.

Version bébé

Le théorème de Noether exprime l'équivalence qui existe entre les lois de conservation et l'invariance du système par des opérations de symétries continues des coordonnées.

Démontré en 1915 et publié en 1918 par la mathématicienne Emmy Noether à Göttingen, ce théorème fut qualifié par Albert Einstein de "monument de la pensée mathématique".

Tableau récapitulatif

Propriété du système physique	Symétrie	Invariant
Espace homogène	Invariance par translation dans l'espace	Conservation de l'impulsion
Espace isotrope	Invariance par rotation dans l'espace	Conservation du moment cinétique
Système indépendant du temps	Invariance par translation dans le temps	Conservation de l'énergie

(4)

Importance conceptuelle Le théorème de Noether exprime l'équivalence qui existe entre les lois de conservation et l'invariance du lagrangien d'un système par certaines transformations (appelées symétries) des coordonnées. Démontré en 1915 et publié en 1918 par la mathématicienne Emmy Noether à Göttingen, ce théorème fut qualifié par Albert Einstein de "monument de la pensée mathématique".

Symétrie en mécanique analytique On considère un changement/transformation de coordonnée [expression]. On dit que cette transformation est une symétrie du lagrangien si [condition]. Cela revient à laisser invariant l'action, on a vu (prérequis), que cela revient à ce que les Lagrangiens diffèrent d'une dérivée totale.

Enoncé du théorème de Noether [énoncé] **Preuve** [calcul] **Applications** On revisite les quantités conservées précédentes.

Conclusion : On retrouve les mêmes résultats, mais le théorème de Noether représente un apport conceptuel.

Bonus : réciproque du théorème de Noether Réciproquement, on peut associer une symétrie à une quantité conservée. On utilise le formalisme Hamiltonien. Soit G la quantité conservée. On se limite à $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$. Alors la conservation de G se traduit par :

$$0 = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t} = \{G, H\}$$

. Ainsi,

$$\boxed{\{H, G\} = 0}$$

On considère alors une transformation $Q_i = q_i + \Delta q_i$ et $P_i = p_i + \Delta p_i$ définie par :

$$\begin{cases} \Delta q_i = \dfrac{\partial G}{\partial p_i} = \{q_i, G\} \\ \Delta p_i = -\dfrac{\partial G}{\partial q_i} = \{p_i, G\} \end{cases} \tag{5}$$

Il y a symétrie si on a $H(q_i, p_i) = H(Q_i, P_i)$. Cela se traduit au premier ordre par

$$\begin{aligned} H(q_i, p_i) = H(Q_i, P_i) &= H(q_i + \Delta q_i, p_i + \Delta p_i) \\ &= H(q_i, p_i) + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \Delta p_i \right) + \ldots \\ &= H(q_i, p_i) + \{H, G\} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \end{aligned}$$

Comme $\{H, G\} = 0$, on a bien $H(q_i, p_i) = H(Q_i, P_i)$ au premier ordre.

Par exemple, considérons un système avec impulsion conservée. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_i = 0$. La charge conservée est alors $G = c_i p_i$ Alors une transformation symétrique est :

$$\begin{cases} \Delta p_i = \{p_i, G\} = 0 \\ \Delta q_i = \{q_i, c_j p_j\} = c_i \to \Delta \vec{q} = \vec{c} \quad \text{(translation)} \end{cases} \tag{6}$$

On a des lois de conservation : en quoi cela nous aide dans la résolution des problèmes de physique ?

2 Le problème de Kepler

✍ Le principal est sur la fiche. La page wikipedia française est bien aussi : https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_%C3%A0_deux_corps

2.1 Problème à deux corps

Problème à deux corps On va s'intéresser à un système de deux points matériels de masse m_1 et m_2, tels que le système est pseudo-isolé. On peut assimiler des astres à des points matériels en supposant leur symétrie sphérique. On se place dans un référentiel galiléen quelconque. **ODG:** pour la Terre, aplatissement de 1/300.

Exemples Système Terre-Soleil, Terre-Lune. Mais en vrai, il y a des écarts de sphéricité et l'influence des autres astres qui modifient la dynamique.

Changement de variable, centre de masse et particule fictive Le système de deux équations vectorielles est couplé. On veut le découpler. Par un changement de variable, on se ramène à l'étude d'une particule fictive de masse $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ soumise à une force $\vec{F}_{2\to1}$, dans le référentiel barycentrique. On a ramené le problème à deux corps au problème à un corps. En résolvant pour la particule fictive, on repasse à $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ par homothétie. On peut mettre les calculs de cette partie sur transparent, c'est pas très intéressant. *La masse réduite est plus petite que chacune des deux masses. On l'interprète comme la plus grande facilité de varier la distance entre les deux masses comparé au cas où une de deux masses se déplace seule.*

Quelle est la spécificité du problème de Kepler ?

2.2 Prolème de Kepler, utilisation des invariants

Conséquences de la conservation du moment cinétique On a vu que le moment cinétique est conservé. La trajectoire est donc plane. De plus, on se ramène à un problème effectif à une dimension. Puisque U ne dépend pas explicitement du temps, on a directement conservation de l'énergie mécanique pour notre particule fictive :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{Gm_1m_2}{r} = \text{cste}$$

De plus, on sait que $r^2\dot{\theta} = C$ est une constante. On peut donc éliminer totalement la dépendance en $\dot{\theta}$ de cette équation pour se ramener à une équation sur r uniquement :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r}$$

Trajectoires libres, liées Quand on trouve le potentiel effectif, on fait la distinction entre trajectoires libres où r est non borné et trajectoires liées où r est borné. On trace les différents cas aux tableau ou on montre le diapo. Le premier terme étant nécessairement positif ou nul, on voit que l'étude du deuxième terme nous permet de restreindre l'ensemble des r accessibles pour une énergie mécanique donnée. En effet, la courbe correspondant à la somme des deux derniers termes est la suivante : Selon la valeur de E_m, quelles sont alors les types de trajectoires possibles ?

- Si $E_m < E_{\min}$, aucune position ne permet de vérifier l'équation : cette situation est impossible.
- Si $E_m = E_{\min}$, on a nécessairement $r = r_0$: le mouvement se fait avec un rayon constant, et est donc circulaire. Cela correspond également à l'idée que l'énergie cinétique radiale doit obligatoirement être nulle dans cette situation. De plus, la constante des aires nous impose, puisque r est constant, que $\dot{\theta}$ le soit également. On est donc dans une situation de mouvement circulaire uniforme.
- Si$E_{\min} < E_m < 0$, on voit que l'ensemble des positions accessibles est un intervalle borné entre les positions $r_{\min}(E_m)$ et $r_{\max}(E_m)$. Le système est donc dans un état lié. En ces deux positions, l'énergie cinétique radiale est nécessairement nulle, ce qui correspond bien à l'idée d'un extremum local.

- Si$E_m \geq 0$, la seule contrainte est sur le rayon minimal. Le rayon r peut devenir infini, ce qui veut dire que dans ce cas les deux masses peuvent s'éloigner indéfiniment et s'échapper de l'influence de l'autre. On parle alors d'un état de diffusion.

Applications Essayons de voir ce que cela donne pour des exemples :

- Pour la Lune autour de la Terre : $r \simeq 384 \times 10^6 \mathrm{m}, \dot{\theta} \simeq \frac{2\pi}{29.5 \times 86400} = 2.46 \times 10^{-6} \mathrm{rads}^{-1}, m_1 = 7.3 \times 10^{22} \mathrm{kg}$ $m_2 = 6.0 \times 10^{24} \mathrm{kg}$. On obtient une énergie mécanique de $-4.4 \times 10^{28} \mathrm{J}$: c'est bien un état lié !

- Pour envoyer une sonde hors de l'influence de la Terre, il faut que son énergie mécanique soit positive, alors qu'elle part du sol (donc du rayon terrestre). Pour cela, il faut que sa vitesse soit supérieure à

$$\sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}} = 11 \mathrm{kms}^{-1}$$

  On appelle cette valeur la vitesse de libération terrestre. On peut voir qu'elle est indépendante de la masse de l'objet étudié.

On veut les trajectoires !

2.3 Trajectoires

✍ ma fiche, Site de Clément Cabart pour vérifier, top aussi

Récapitulatif des quantités conservées On récapitule l'utilité des quantités conservées jusqu'à présent : le passage de 6 à 1 degré de liberté. C'est l'instant où on justifie tout ce qu'on a fait en leçon !

Quantité conservée : Runge-Lenz Or Kepler a constaté que les orbites forment des ellipses. On pourrait le retrouver en résolvant l'équation sur r auxquel on a aboutit. On va passer par une méthode plus instructive. Les trajectoires sont fermées. Cela est dû à une autre quantité conservée : le vecteur de Runge-Lenz. *Attention, le vecteur de Runge-Lenz n'est pas conservé seulement pour des états liés, mais bien de manière générale.*

Calcul de la conique On choisit le grand axe comme axe de référence pour les angles. On prépare la fin du calcul sur diapositive au cas où on est court en temps.

Trajectoires possibles On discute selon la valeur de e. On peut démontrer que le lien entre E_m est e est donné par

$$E_m = \frac{G^2 m_2^2 m_1}{2C^2}\left(e^2 - 1\right) = \frac{Gm_1 m_2}{2p}\left(e^2 - 1\right)$$

On retrouve bien le fait que si $E_m < 0$, on a une trajectoire elliptique, qui est donc non seulement contrainte mais également fermée !

Interprétation du vecteur de Runge-Lenz Le vecteur de Runge-Lenz est dans le plan, pointe vers le périhélie et sa norme augmente avec l'ellipticité.

Bonus : théorème de Bertrand Avec le problème de Kepler, l'oscillateur harmonique 3D peut aussi avoir des trajectoires fermées et des ellipses.

Application : sagittarius A* ✍ Voir LP 2 pour des compléments.

Vidéo de S2 autour de Sgr A*
Si on veut on peut montrer celle là avant : `https://youtu.be/duoHtJpo4GY?t=159`. On voit que ça bouge. Qu'est-ce qu'on peut en tirer ? Puis celle là `https://www.eso.org/public/videos/eso0226a/`

Beginning in the 1990s, powerful telescopes and clever observational techniques made it possible to resolve individual stars in the Galactic Center. Montrer la figure 3.3 Dedicated observers discovered that the stars are moving, mapped the motions, and ultimately found that the orbits appear to be ellipses with Sgr A* as a common focus (foyer). In other words, the stars orbiting Sgr A form a Keplerian system that is directly analogous to the planets orbiting the Sun. We can therefore use the motion → mass principle to measure the mass of Sgr A^* Stars $\#2, 16$, and 19 are particularly important because they have been tracked long enough to pass pericenter, so their orbits are well constrained. Fitting ellipses to the motion yields the following orbital parameters, Montrer le tableau de valeurs et la valeur déduite.

Par exemple, avec la 3e loi de Kepler, en mesurant les orbites des étoiles au sein de la galaxie, on se rend compte que les orbites sont elliptiques avec un foyer commun. En connaissant leur mouvement et en utilisant la troisième loi de Kepler, on peut estimer la masse de l'objet correspondant, qui est de 10^6 masses solaires environ. C'est le trou noir supermassif au centre de la Voie Lactée . NB : pas besoin de RG au bout de quelques rayons de Schwarzschild $R_s = 2GM/c^2$**ODG:** 0.07 au ✍ Keeton chap3.

Bonus : Sgr A* Could it be a single star ? There is no way for a single star to be anywhere near this massive. Could it be a cluster of stars ? Again, no, such a massive and compact star cluster would "evaporate" due to stellar dynamical effects. **If it is a black hole, why haven't we used relativity ?** Relativistic effects become important on scales comparable to the Schwarzschild radius of a black hole. For Sgr A* this is $R_s = 2GM/c^2 \sim 0.07$au. (1 au = 150 millions de km).

Bonus : précession de Schwarzschild de S2 En réalité, à cause de la relativité générale, les orbites ne sont pas fermées : le périhélie précesse et trace la forme d'une fleur. *De manière générale, une orbite peut ne pas être fermée à cause d'un défaut de symétrie sphérique de l'astre (moment quadrupolaire de masse), de l'influence d'autres astres, ou de la relativité générale.*

Bonus : orbite de transfert ✍ Wiki Pour satelliser un sattellite géostationnaire circulaire, on le met sur une orbite circulaire basse altitude 300 km. Puis on utilise un orbite de transfert elliptique, de périgée/apogée tangent aux deux orbites circulaires.

Limites du problème à deux corps

Les prédictions du problème à deux corps, notamment les trajectoires fermées, ne sont plus valables :

- lorsqu'il y a d'autres astres, par exemple Neptune a été découverte en interprétant les anomalies du mouvement d'Uranus (Le Verrier, 1846)
- si les corps ne sont pas sphériques, on ne peut les assimiler à des points
- effet de rotation propre
- la relativité général fait précesser le périhélie. Exemple : mercure, 574 arcsec dont 43 arcsec dûs à la RG.

Conclusion

Ces lois de conservations sont encore plus importantes dans des problèmes où le ne connaît pas exactement la nature des forces mises en jeu, on peut citer notamment le cas des chocs, ou la diffusion Compton.

Ouverture : Découverte du neutrino En 1930, la communauté des physiciens est confrontée à une énigme : la désintégration β ne semble pas respecter les lois de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et du spin. Pour satisfaire ces principes, Pauli postule l'existence d'une nouvelle particule, de charge électrique nulle, qu'il nomme initialement neutron (pour particule neutre, le neutron n'ayant pas été découvert), et dont il estime la masse au moins 100 fois inférieure à celle du proton. Le physicien italien Edoardo Amaldi l'appelle neutrino (en italien : petit neutron). Par ailleurs, l'étude du bilan de moment cinétique dans cette même réaction permet déjà de déterminer quel spin devrait avoir cette nouvelle particule.

Le neutrino (en fait l'antineutrino électronique), qui accompagne la formation d'un électron (par conservation du nombre leptonique) lors de la transformation d'un neutron en proton) est découvert expérimentalement en 1956, par Frederick Reines et Clyde Cowan, auprès d'un réacteur nucléaire. Ceci illustre la puissance des lois fondamentales de conservation : autant conceptuellement que par leur caractère prédictif.

Ouverture : masse du neutron Le simple recours aux lois de conservation cinématiques a ainsi suffi à Chadwick pour déterminer la masse du neutron en 1931

Compléments/Questions

Théorème de liouville dans l'espace des phases.

Compléments

Applications de la conservation du moment cinétique

- Formation d'un ouragan (Hecht, Physique p293)
- Formation d'une étoile, d'un pulsar (étoile à neutrons en rotation rapide). Un nuage interstellaire initialement en rotation va s'effondrer sous l'effet des forces de gravité. Les dimensions du nuage vont décroitre ce qui va aboutir à une augmentation de la vitesse de rotation de ce dernier par conservation du moment cinétique.

Lois de conservation dans les réactions nucléaires ✍ Basdevant. Diverses lois de conservation fondamentales régissent les réactions nucléaires. Ce sont ces lois qui permettent d'identifier les particules, leur nature comme leurs attributs cinématiques - masse, spin, énergie, impulsion.

Les lois les plus importantes sont la conservation de l'énergie-impulsion, du moment cinetique et de la charge électrique. En physique nucléaire, d'autres lois apparaissent comme la conservation du nombre leptonique, du nombre baryonique et de l'isospin.

Ces lois sont reliées à des propriétés d'invariance des hamitoniens de transition entre états initiaux et finaux.

Lois de conservation en mécanique quantique

Le théorème d'Ehrenfest montre qu'une observable qui commute avec le hamiltonien a une valeur moyenne constante. L'impulsion p est le générateur infinitésimal des translations $D\left(\boldsymbol{x}_0\right)=\exp\left(i\boldsymbol{x}_0\cdot\hat{\boldsymbol{P}}/\hbar\right)$. On le voit en identifiant l'exponentielle en $p=-i\hbar\vec{\nabla}$ au développement de Taylor.

Considerons l'amplitude de probabilité de transition d'un système d'un état initial $|i\rangle$ vers un état final $|f\rangle$ d'un hamiltonien H_0 sous l'influence d'un terme de transition H_T, le hamiltonien total du système étant $H=H_0+H_T$. Au premier ordre des perturbations, dans l'approximation de Born, pour $f\neq i$, elle est proportionnelle l'élément de matrice

$$\gamma_{i\rightarrow f}\propto\left\langle f\left|\hat{H}_T\right|i\right\rangle$$

Soit une observable $\hat{A}$. On sait d'après le théorème d'Ehrenfest que si cette observable commute avec le hamiltonien, sa valeur moyenne est conservée au cours du temps :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle=\frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|[\hat{A},\hat{H}]|\psi(t)\rangle$$

De fait, nous pouvons étendre cette propriété à un processus de transition de la façon suivante. Supposons que $\hat{A}$ commute avec les hamiltoniens $\hat{H}_0$ et $\hat{H}_T$, et considérons dans (1.16) des états initial $|i\rangle$ et final $|f\rangle$ qui soient tous deux états propres de A avec valeurs propres respectives a_i et a_f

$$\hat{A}|i\rangle=a_i|i\rangle,\hat{A}|f\rangle=a_f|f\rangle$$

On obtient donc

$$\left\langle f\left|\left[\hat{A},\hat{H}_T\right]\right|i\right\rangle=\left(a_f-a_i\right)\left\langle f\left|\hat{H}_T\right|i\right\rangle\propto\left(a_f-a_i\right)\gamma_{i\rightarrow f}=0$$

puisque, par hypothèse, $[\hat{A},\hat{H}]=0$. Par conséquent, ou bien $\gamma_{i\rightarrow f}=0$, c'est-a-dire que la transition est interdite, ou, si elle est autorisée, $a_f=a_i$. La grandeur A est conservée dans toute transition si $\hat{A}$ commute avec le hamiltonien de transition. Cette propriété, que nous venons de voir à l'approximation de Born, s'étend à tous les ordres de la théorie des perturbations.

On peut voir les choses sous l'angle suivant, plus profond conceptuellement. L'observable $\hat{A}$ peut être considérée comme le générateur infinitessimal d'une transformation unitaire dans l'espace des états. Soit

$$D(\alpha)=\exp\left(i\alpha\hat{A}\right)$$

où α est un réel quelconque. D est un opérateur unitaire car $\hat{A}$ est hermitien. La transformation unitaire des états $|\psi\rangle$ et des observables $\hat{B}$, associée à D est

$$|\psi'\rangle=D|\psi\rangle\quad\hat{B}=D\hat{B}D^{+}$$

La relation de commutation $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$ entraine que :

$$[D, \hat{H}] = 0 \Rightarrow \hat{H} = D\hat{H}D^\dagger$$

Autrement dit, le hamiltonien $\hat{H}$ est invariant dans la transformation unitaire D associée à l'observable $\hat{A}$

On voit que la conservation de A dans les transitions induites par $\hat{H}$ résulte de la propriété de symétrie du hamiltonien correspond une loi de conservation : celle de la grandeur A, dont l'observable associée est le générateur infinitésimal de la transformation D.

Le groupe des translations a pour générateur infinitesimal l'impulsion totale $\hat{\boldsymbol{P}}$. Soit $D\left(x_0\right)$ un élément de ce groupe

$$D\left(\boldsymbol{x}_0\right) = \exp\left(i\boldsymbol{x}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{P}}/\hbar\right)$$

l'tnvariance par translation du hamiltonien se traduit, de façon équivalente par $|\hat{H}, D] = 0 \Leftrightarrow [\hat{H}, \hat{P}] = 0$. Si $\hat{H}$ est invariant par translation, dans un processus menant d'un etat initial d'impulsion totale $\boldsymbol{P}_i$ à un état final d'impulsion totale $\boldsymbol{P}_f$ on aura toujours

$$[\hat{H}, D] = 0 \Rightarrow \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_f$$

Questions

- **Mécanique** Vous avez défini un système au début de la leçon, quel était ce système exactement ? Peut on considérer que le système S = (Homme-planche-ballon) est isolé ? Expliquer ce qu'est le référentiel barycentrique ! "TMC, TEC,PFD" ok ... mais qu'est ce que c'est ? En quoi sont ils différents ? Comment les relier au premier principe de la thermodynamique ?

- Vous avez parler du recul lorsque l'on tire au fusil, quel est la différence entre les frottements sur la planche à roulette et une balle dans un fusil ? Que faut il privilégier pour que la planche bouge des gros frottement ou des petits frottements ? Connaitriez vous un autre système où les frottements de ne sont pas présent permettant de montrer cette loi de conservation ? Quelles forces s'appliquent sur le système ?

- **Moment cinétique** Lors du TMC vous l'avez introduit avec des masses ponctuelles mais le système Tabouret-Moi-Roue n'est pas ponctuel, comment expliquer le lien entre les deux situations aux élèves ? Comment s'exprime le moment cinétique dans ce cas ? Quelles forces s'appliquent sur le système ? Comment calculer le moment d'inertie de la danseuse ? (approximation d'un cylindre) Et avec les bras tendus ? (ajout de $1/3ml^2$).

- **Conservation** Connaissez-vous d'autres lois de conservation ailleurs qu'en mécanique ? (conservation de la charge). Qui a unifié ces observations sur les grandeurs conservées ? (Noether).

- **Problème à deux corps** Connaitriez vous un exemple de système à deux corps ? En considérant le système Terre-Lune, quel référentiel galiléen vous considérez ? Vous avez établi que le référentiel barycentrique était en MRU donc galiléen, dans le cadre du système Terre-Lune le barycentre est il en MRU par rapport au référentiel héliocentrique ? Quelle est la vitesse de la particule fictive dans le référentiel d'étude ? Donner des exemples concrets de systèmes à deux corps. Y a-t-il une particule fictive pour un système à N corps ? Comment montrer que les forces d'interactions mutuelles sont alignées ? (?) Causes de précession ? RG.

- Qu'entendez-vous par espace isotrope ?

- De quelle façon peut-on traiter des systèmes non conservatifs en les rendant conservatifs ? J'ai invoqué la thermo, on peut traiter les transferts de chaleur. Sinon, on peut faire un changement de variable : on peut rendre l'OH amorti non dissipatif pour un bon choix de variables.

- **Runge-Lenz, MQ** Pourquoi avoir proposé le vecteur de Runge-Lenz, quelle est son utilité en mécanique quantique ? Cf. Aslangul, dégénérescence en l de l'atome d'hydrogène. Etats libre et liés en MQ.

- Lier la courbe d'énergie potentielle effective à la trajectoire d'un astéroïde en état libre (rayon minimal, pas énergie minimale ! !)

- **Diffusion de rutherford** : qu'est-ce qui est surprenant ? Que se passe-t-il si on augmente l'énergie ?