

Mécanique analytique

1

Objet : Deux branches de la physique fondamentale classique

→ Mécanique newtonienne (PFD)

→ Électromagnétisme (Éq° de Maxwell)

• Inconvénients de ces formulations

→ formalismes très différents, donc manque d'unité

→ formes des Éq° dépendent du choix de coordonnées

exemple mécanique : cartésienne $m\ddot{x}_i = F_i$ vs

cylindrique $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r$, etc. → pas de covariance

→ pas de méthode systématique pour étudier les quantités conservées

→ || de quantification
(construction d'une théorie quantique)

• Intérêt de la mécanique analytique

→ formulation commune à la mécanique et l'Ép,
mais aussi à toutes les interactions fondamentales
(modèle standard, relativité générale)

→ covariance

→ méthodes systématiques de traitement des quantités
conservées (théorème de Noether) et de quantification
(crochets de Poisson)

I) Formalisme lagrangien

A) Contexte

Problème décrit par des coordonnées généralisées

$q: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonctions d'un paramètre t . | 2
 $t \mapsto \{q(t)\}$ espace des configurations

On se donne un Lagrangien $L: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $(q, \dot{q}, t) \rightarrow L(q, \dot{q}, t)$

et une fonctionnelle appelée action

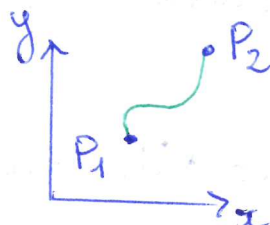
$$S[q] = \int_a^b dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \in \mathbb{R}$$

$\downarrow$ fonction $\downarrow$ dérivée

On souhaite extrémiser S .

Exemples • Chemin le plus court entre deux points du plan

longueur du chemin $L[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \dot{y}(x)^2}$



$\left\{ \begin{array}{l} \text{coordonnée généralisée } y \\ \text{vitesse} \quad \quad \quad \dot{y} = \frac{dy}{dx} \\ \text{paramètre } x \\ \text{Lagrangien } L(y, \dot{y}, x) = \sqrt{1 + \dot{y}^2} \\ \text{action } L[y] \end{array} \right.$

• Principe de Fermat

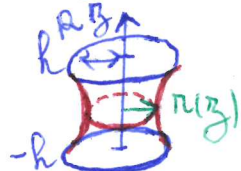
Trajet suivi par la lumière correspond à un chemin optique stationnaire

$$L[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{n(x, y)}_{\text{indice de réfraction}} \sqrt{1 + \dot{y}(x)^2}$$

• Forme d'une bulle de savon entre deux anneaux

cylindriques $\rightarrow$ minimisation de l'énergie de surface $E_s = \gamma A$

$\Rightarrow$ " de l'aire A



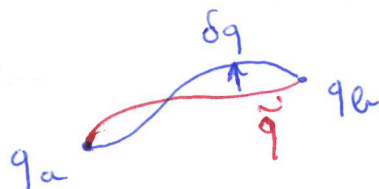
$$A[\eta] = \int_{-h}^h dz 2\pi r(z) \sqrt{1 + \dot{r}(z)^2}$$

B) Principe variationnel

3

• Fonction $\tilde{q}$ qui extremalise S avec conditions aux limites

$$\begin{cases} \tilde{q}(a) = q_a \\ \tilde{q}(b) = q_b \end{cases}$$



S est stationnaire en $\tilde{q}$: pour toute fonction $q = \tilde{q} + \delta q$ voisine

$$\boxed{\delta S = S[q] - S[\tilde{q}] = 0} \quad \text{au 1er ordre en } \delta q$$

avec mêmes conditions aux limites ($\delta q(a) = \delta q(b) = 0$).

• On définit la dérivée fonctionnelle par

$$\delta S = S[\tilde{q} + \delta q] - S[\tilde{q}] = \int_a^b dt \sum_{i=1}^m \frac{\delta S}{\delta q_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) \delta q_i(t)$$

Cherchons son expression.

$$\delta S[\tilde{q}] = \int_a^b dt \left[\mathcal{L}(\tilde{q}(t) + \delta q(t), \dot{\tilde{q}}(t) + \delta \dot{q}(t), t) - \mathcal{L}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) \right]$$

$$\stackrel{\text{DLH}}{=} \int_a^b dt \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) \delta q_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) \underbrace{\delta \dot{q}_i(t)}_{= \frac{d}{dt} \delta q_i(t)} \right]$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} \int_a^b dt \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) \delta q_i(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) \right) \delta q_i(t) \right] + \underbrace{\sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) \delta q_i(t) \right]_{t=a}^{t=b}}_{\text{terme de bord} = 0}$$

Donc $\boxed{\frac{\delta S}{\delta q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}$ en notation simplifiée

• S stationnaire en $\tilde{q} \Leftrightarrow \frac{\delta S}{\delta q_i} = 0$ en $\tilde{q} \Leftrightarrow$

$$\forall i \in [1, m], \quad \text{en } \tilde{q} \quad \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0} \quad \text{équations d'Euler-Lagrange}$$

Exemples . Chemin le plus court entre 2 points du plan 4

$$L(y, \dot{y}, x) = \sqrt{1 + \dot{y}^2} \text{ donne } \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$$

Donc $\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$ constant $\Rightarrow \dot{y}$ constant $\Rightarrow y(x) = Ax + B$.
droite!

• Principe de Fermat

$$L(y, \dot{y}, x) = n(x, y) \sqrt{1 + \dot{y}^2} \text{ donne } \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \sqrt{1 + \dot{y}^2} \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{n \dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial y} = \underbrace{\frac{d}{dx \sqrt{1 + \dot{y}^2}}}_{ds} \left(n \underbrace{\frac{dy}{dx \sqrt{1 + \dot{y}^2}}}_{ds \text{ abscisse curviligne}} \right) \text{ donc } \boxed{\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\nabla} n}$$

Equation des rayons lumineux

• Bulle de savon

$$L(r, \dot{r}, z) = 2\pi r \sqrt{1 + \dot{r}^2} \text{ donne } \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 2\pi \sqrt{1 + \dot{r}^2} - \frac{d}{dz} \left(\frac{2\pi r \dot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} \right) = 0$$

$$\text{Donc } \underbrace{\sqrt{1 + \dot{r}^2} - \frac{\dot{r}^2}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}}}_{\frac{1}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}}} - \underbrace{\frac{r \ddot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} + \frac{r \dot{r} \ddot{r}^2}{(1 + \dot{r}^2)^{3/2}}}_{-\frac{r \ddot{r}}{(1 + \dot{r}^2)^{3/2}}} = 0 \text{ d'où } \boxed{1 + \dot{r}^2 = r \ddot{r}}$$

Solution $r(z) = a \cosh(z/a) = \underline{\text{caténoïde}}$

C) Mécanique lagrangienne

Formalisme lagrangien appliqué à la mécanique newtonienne

→ écriture du PFD comme principe variationnel

Contexte Particule ponctuelle, masse m , position $\vec{x}$, soumise

à force conservative $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ avec $V(\vec{x}, t)$ potentiel
(indépendant de $\dot{\vec{x}}$)

• PFD $m \ddot{x}_i(t) = F_i(\vec{x}(t), t) = - \frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x}(t), t)$, $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$

donc $-\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x}(t), t) - \frac{d}{dt}(m \dot{x}_i(t)) = 0$

Analogie à Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0$

avec $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T(\dot{\vec{x}}, t) - V(\vec{x}, t)}$

avec $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i \Rightarrow \boxed{T(\dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2}$ énergie cinétique

Paramètres de l'espace de configuraⁿ

{	coordonnées généralisées	= position $\vec{x}$
	vitesse	= vitesse $\dot{\vec{x}}$
	paramètre	= temps t

• Cas général Système soumis à des forces conservatives

Laagrangien $\boxed{\mathcal{L} = T - V}$ avec $\begin{cases} T = \text{énergie cinétique} \\ V = \text{potentielle} \end{cases}$

Action $S = \int dt \mathcal{L}$ stationnaire $\hookrightarrow$ principe moindre action

Exemple : N particules de masses $m^{(a)}$, positions $\vec{x}^{(a)}$, interagissant par un potentiel $V(\{\vec{x}^{(a)}\}, t)$

$$\mathcal{L}(\{\vec{x}^{(a)}\}, \{\dot{\vec{x}}^{(a)}\}, t) = \sum_a \frac{1}{2} m^{(a)} \dot{\vec{x}}^{(a)2} - V(\{\vec{x}^{(a)}\}, t)$$

• Remarques . Interactions fondamentales du modèle

standard décrites par formulation lagrangienne.

Électromagnétisme $S = \int dt d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

• $\exists$ formulations pour systèmes non conservatifs et forces dérivant d'un potentiel généralisé $V(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ (dépend vitesse)

Particule chargée dans un champ E, μ , potentiel

$$V(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = q(\Phi(\vec{x}, t) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t))$$

charge

potentiel
scalaire

potentiel
vecteur

Donne la force de Lorentz.

D) Propriétés des équations d'Euler-Lagrange

1) Covariance

Soit un changement de coordonnées :

Transforma° $q \mapsto \boxed{q' = f(q, t)}$ inversible.

Inverse $q' \mapsto q = g(q', t)$.

Transforma° des vitesses : $\begin{cases} \dot{q} \mapsto \dot{q}' = \frac{dq'}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \\ \dot{q}' \mapsto \dot{q} = \frac{\partial g}{\partial q'_i} \dot{q}'_i + \frac{\partial g}{\partial t} \end{cases}$

Une grandeur scalaire est transformée en

$$\boxed{G'(q', \dot{q}', t) = G(q, \dot{q}, t)}.$$

Le Lagrangien est un scalaire $\mathcal{L}' : (q', \dot{q}', t) \mapsto \mathcal{L}(g(q', t), \frac{\partial g}{\partial q'_i} \dot{q}'_i + \frac{\partial g}{\partial t}, t)$

de même que l'action

$$S'[q'] = \int_a^b dt \mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \int_a^b dt \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = S[q].$$

S' stationnaire par rapport à q' $\Leftrightarrow$ S stationnaire par rapport à q

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}'_i} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0}$$

Équa° d'Euler-Lagrange ont même forme dans tous les syst^M de

coordonnées $\rightarrow$ on parle de covariance

17

Remarque

Propriété	Comportement d'une grandeur scalaire
<u>covariance</u>	$L'(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t)$ L' et L ne sont pas les mêmes fonctions
<u>invariance</u>	$L(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t) = L'(q', \dot{q}', t)$ L' et L sont les mêmes fonctions

-
↓
+
forte

Chap. 2

Exemple Particule de masse m dans potentiel V à 2D.

$\rightarrow$ cartésien $q = (x, y)$, $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y, t)$

$\rightarrow$ cylindrique $q' = (p, \theta)$ avec $\begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \end{cases}$

$L'(p, \theta, \dot{p}, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{p}^2 + p^2\dot{\theta}^2) - V'(p, \theta, t)$ avec $V'(p, \theta, t) = V(x, y, t)$

Euler-Lagrange $\frac{\partial L'}{\partial p} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{p}} \right) = m\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V'}{\partial p} - m\ddot{p} = 0$

soit $m\ddot{p} = \underbrace{-\frac{\partial V'}{\partial p}}_{F_p} + \underbrace{m\dot{\theta}^2}_{\text{force centrifuge}}$

2) Non-unité du Lagrangien

Soit le Lagrangien $\bar{L} = L + \frac{dF}{dt}$ avec $F(q, \dot{q}, t)$ une fonction scalaire de l'espace des configurations.

L'action associée est

$$\bar{S}[q] = \int_a^b dt \left[L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}(q, \dot{q}, t) \right] = S[q] + \underbrace{F(q(b), \dot{q}(b), t)}_{\text{constante}} - F(q(a), \dot{q}(a), t)$$

$\bar{S}$ et S conduisent aux mêmes eq^s d'EL.

Le Lagrangien est unique à une dérivée totale près.

8

Remarque Nous avons montré que la condition $\bar{L} - L = \frac{dF}{dt}$ est suffisante. On peut montrer qu'elle est nécessaire.

E) Optimisation sous contraintes

Déf° Contrainte = réduction du nb de degrés de liberté du système, par exemple en fixant une donnée du problème (longueur du pendule, etc.)

Mécanique newtonienne : on doit introduire des forces de réaction associées à ces contraintes (tension de la corde, etc.)

" lagrangienne : pas besoin !

Contraintes $\left\{ \begin{array}{l} \text{holonomes} : \text{eq° algébriques sur les coordonnées } \boxed{f(q,t)=c} \\ \text{non holonomes} : \text{dépendance en vitesse (roulement sans glissement), inégalité (région de l'espace inaccessible)} \end{array} \right.$

Problème En présence de contraintes, les δq_i ne sont plus indépendants

$$\delta S[q] = \int_a^b dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i = 0 \quad \not\Rightarrow \text{Euler-Lagrange}$$

Solution formelle Pour contraintes $f_k(q,t)=0$, $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on introduit des coordonnées généralisées $\lambda_k =$ multiplicateurs de Lagrange.

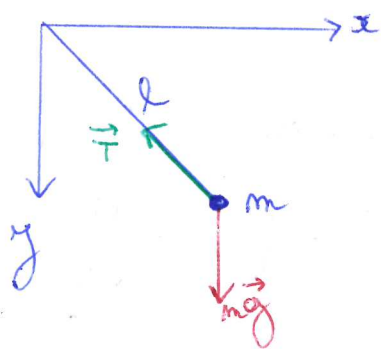
Lagrangien $\boxed{L_c(q, \dot{q}, t; \lambda_k) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(q, t)}$

Extrémalisation de $S \Leftrightarrow$ Euler-Lagrange pour L_c , ce qui redonne les contraintes car $\frac{\partial L_c}{\partial \lambda_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_c}{\partial \dot{\lambda}_k} \right) = f_k(q, t) = 0$.

Exemple Pendule simple.

$$L_c(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \lambda) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$$

$f(x, y)$



Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \text{pour } x : m\ddot{x} = \lambda x \\ \text{" } y : m\ddot{y} = mg + \lambda y \\ \text{" } \lambda : x^2 + y^2 = l^2 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{se résout avec} \\ \lambda \text{ de} \end{array} \right\}$$

Comparaison avec approche newtonienne $\lambda = -\frac{T}{l}$, T = tension.

Solution pratique Implémenter un changement de coordonnées qui intègre la contrainte.

$$(x, y) \mapsto (l, \theta) \text{ et } l \text{ de } \begin{cases} x = l \cos \theta \\ y = l \sin \theta \end{cases}$$

$$L'(l, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

Euler-Lagrange $\frac{\partial L'}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} \right) = -mgl \sin \theta - ml^2\ddot{\theta} = 0$ d'où

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

II) Symétries et lois de conservation

A) Symétries

Soit un système, de Lagrangien $L(q, \dot{q}, t)$. Soit une transf^o inversible (chg^t de coordonnées)

$$q \mapsto q' = f(q, t).$$

Le Lagrangien transformé est $L'(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t)$, de sorte que (Euler-Lagrange pour $L' \Leftrightarrow$ Euler-Lagrange pour L) = covariance

Déf° On dit que $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est une symétrie de } \mathcal{L} \\ \mathcal{L} \text{ est invariant par } f \end{array} \right\}$ si les fonctions L-10

$\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont identiques, i.e. (à une dérivée totale près)

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}$$

B) Symétries continues et infinitésimales

• Soit une famille de transforma° paramétrée par $\alpha \in \mathbb{R}$

$$q \mapsto q' = f_\alpha(q, t), \text{ avec } f_0(q, t) = q \text{ (identité).}$$

Déf° On dit que f_α est une symétrie continue de $\mathcal{L}$ si $\bar{c}$ est une symétrie de $\mathcal{L}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

• Supposons α petit $\rightarrow$ développement limité proche de l'identité.

$$\text{Alors } q' = f_\alpha(q, t) = \underbrace{f_0(q, t)}_{= q} + \underbrace{\alpha g(q, t)}_{:= \delta q} + o(\alpha)$$

$$\exists F_\alpha(q, t) \text{ telle que } \mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF_\alpha}{dt}(q, \dot{q}, t).$$

$$\text{Or } F_\alpha(q, t) = \underbrace{F_0(q, t)}_{= 0 \text{ car } f_0 = \text{id.}} + \alpha G(q, t) + o(\alpha), \text{ donc}$$

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \alpha \frac{dG}{dt} + o(\alpha)$$

On dit que f_α définit une symétrie infinitésimale de $\mathcal{L}$.

Exemples • Chute libre : $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz$

$$\text{Transla° } z' = z + \alpha \text{ donne } \mathcal{L}(z', \dot{z}', t) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz - mg\alpha$$

$$\text{donc } \mathcal{L}(z', \dot{z}', t) = \mathcal{L}(z, \dot{z}, t) + \frac{dF_\alpha}{dt} \text{ avec } F_\alpha = -mg\alpha t.$$

Transla° spatiale est une symétrie continue.

• Oscillateur harmonique 2D: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$ | 11

$$\text{Rotation} \begin{cases} x' = \cos \alpha x + \sin \alpha y \\ y' = -\sin \alpha x + \cos \alpha y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \alpha y \\ \delta y = -\alpha x \end{cases}$$

laisse $\mathcal{L}$ invariant.

C) Théorème de Noether

Lien entre symétrie infinitésimale et quantité conservée.

1) Motivation

On dit que q_i est une variable cyclique si $\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0}$. Alors

Euler-Lagrange donne $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$, i.e que la quantité

$$\boxed{p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}, \text{ appelée } \underline{\text{moment conjugué}},$$

est constante au cours du mouvement = quantité conservée.

Généralisation?

2) Change de Noether

Transform^o infinitésimal $q' = q + \delta q$ avec $\delta q = \alpha g(q, t)$.

Si symétrie, alors $\delta \mathcal{L} = \alpha \frac{dG}{dt}$. Or

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \\ &\quad + \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \quad \text{donc} \end{aligned}$$

$$\sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i = \alpha \frac{d}{dt} \left[- \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} g_i(q, t) + G \right]$$

= 0 si eq^o mouvt vérifiées

D'où la quantité conservée

12

$$Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - G = \text{charge de Noether}$$

Exemples . Chute libre $\mathcal{L}(z, \dot{z}, t) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz$

Translation spatiale $\delta z = \alpha$ donne $\delta \mathcal{L} = \alpha \frac{dG}{dt}$ avec

$G = -mgt$. Donc avec $p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$ moment

conjugué, on a $Q = p_z - G = m\dot{z} + mgt$.

• Invariance stricte sous translation spatiale

Système de 2 particules à 1D interagissant, potentiel $V(q_1 - q_2)$.

Translation spatiale $\delta q_i = \alpha$. On a $\begin{cases} \delta \dot{q}_i = 0 \\ \delta(q_1 - q_2) = 0 \end{cases}$ donc

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 - V(q_1 - q_2) = \mathcal{L}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, t)$$

est strictement invariant ($\delta \mathcal{L} = 0$)

Charge conservée $Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = p_1 + p_2$ est le

moment conjugué (total).

Ici $Q = m_1 \dot{q}_1 + m_2 \dot{q}_2$ est la quantité de mouvement
(pas de potentiel généralisé, comme potentiel vecteur $\vec{A}$)

• Invariance stricte sous rotation

Oscillateur harmonique 2D $\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2} (x^2 + y^2)$

Rotation $\begin{cases} \delta x = \alpha y \\ \delta y = -\alpha x \end{cases} \Rightarrow$ Charge conservée

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} (-x) = m \dot{x} y - m \dot{y} x = -m (\vec{x} \times \vec{v}) \cdot \vec{e}_z$$

13

$\vec{L}$ moment cinétique

est la composante du moment cinétique selon l'axe de rotation

3) Translation temporelle

- Transforma^o du paramètre $t \mapsto t' = t + \delta t$. C'est une symétrie si $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t + \delta t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, soit

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0} \quad \text{symétrie de transla^o temporelle}$$

- Pour trouver la quantité conservée :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\mathcal{L}}{dt} - \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \\ &= \frac{d\mathcal{L}}{dt} - \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i \right] \quad \downarrow \text{si eq^o sont vérifiées} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \end{aligned}$$

La quantité conservée est l'Hamiltonien

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}}$$

Exemple Particule dans un potentiel $V(q)$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \text{ donc } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \text{ et } \mathcal{H} = m \dot{q}^2 - \mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + V(q)$$

s'interprète comme l'énergie mécanique.

Invariance par translation du temps $\Leftrightarrow$ conservation énergie

III) Mécanique hamiltonienne

14

Soit un système mécanique décrit par Lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$.

A) Le Hamiltonien

Nous avons défini les moments conjugués $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$.

On suppose le changement de variable $q_i \mapsto p_i(q, \dot{q}, t)$ inversible

On définit le Hamiltonien

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

Tout est exprimé en fonc° de (q, p, t) $\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i(q, p, t) \\ \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p, t), t) \end{array} \right.$

Espace (q, p) = espace des phases.

Exemples . Particule dans un potentiel $V(q)$. On a $p = m\dot{q}$ et

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + V(q, t) = \frac{p^2}{2m} + V(q, t).$$

• Particule de charge e dans un champ E, B .

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 - e\Phi(\vec{q}, t) + e\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}(\vec{q}, t)$$

Moment conjugué $p_i = m\dot{q}_i + eA_i$ ($\neq$ quantité mouvement)

$$\text{Hamiltonien } \mathcal{H} = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - \mathcal{L}$$

$$\begin{aligned} &= m\dot{\vec{q}}^2 + e\vec{A} \cdot \dot{\vec{q}} - \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 + e\Phi(\vec{q}, t) - e\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A} \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^2 + e\Phi(\vec{q}, t), \text{ soit} \end{aligned}$$

$$\mathcal{H} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\Phi$$

B) Équations de Hamilton

Équations de la dynamique à partir de $\mathcal{H}$?

Dérivées partielles de $H(q, p, t)$ par rapport à q et p ?

15

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - L \right) = \dot{q}_i + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial p_i} \\ &= \dot{q}_i + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \end{aligned}$$

d'où $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}$.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - L \right) = \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} q \\ &= - \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$ donc $\frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{dp_i}{dt}$.

Équations de Hamilton

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

Équations plus « symétriques » que Euler-Lagrange.

Exemple Particule dans potentiel $V(\vec{q}, t)$ $H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{q}, t)$

donc
$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{p_i}{m} & (\text{quant } T_{\text{mouv}}) \\ \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i & (\text{PFD}) \end{cases}$$

Bilan = figure sur PC.

C) Crochets de Poisson

fonc° $A(q, p, t)$ est appelée observable. Équation d'évolution

On a vu que
$$\boxed{\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \ddot{u} \quad \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial A}{\partial q_i} + \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) \end{aligned} \quad \downarrow \text{Hamilton}$$

On définit le crochet de Poisson

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Alors

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{H, A\}}$$

Propriétés du crochet de Poisson

- antisymétrique $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- bilinéaire
- Leibniz $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$
- Jacobi $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$

Remarque • Relations canoniques

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

Fondements de la mécanique quantique

p et q promus en tant qu'opérateurs $\hat{p}$ et $\hat{q}$
 $\{, \}$ remplacés par commutateurs $[,] \frac{i}{\hbar}$

relation canonique $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$

• Voir 2010C pour problème complet.