**Leçon n°6 : Utilisation des lois de conservation dans le problème à deux corps. Applications (gravitation, champ de force coulombien). (MPSI, PCSI ou 1er CU)**



# Introduction

Nous verrons que le problème à deux corps, de deux points matériels, se ramène à l'étude d'un point matériel fictif, grandement facilitée par les lois de conservation.
Nous utiliserons les théorèmes fondamentaux de la mécanique ; le théorème de la résultante cinétique (TRC), le théorème du moment cinétique (TMC) et le théorème de l'énergie cinétique (TEC).
En application, nous étudierons le cas particulier mais néanmoins très important, d'une loi de force proportionnelle à $1/r^2$, puisqu'elle recouvre le domaine des interactions gravitationnelles et électrostatiques.

# 1. Problème à deux corps

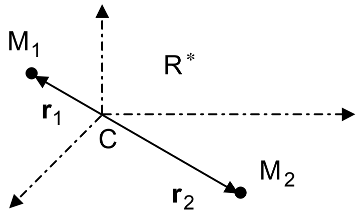
## 1.1. Conservation de la quantité de mouvement du système

Considérons deux points matériels $M_1$ et $M_2$ de masses $m_1$ et $m_2$, isolés dans l'espace. On note C le centre de masse de ce système et $\mathbf{P}_S$ sa quantité de mouvement dans le référentiel galiléen R. Dans ce référentiel R l'application du TRC permet d'écrire :

$$\frac{d\mathbf{P}_S}{dt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_C = \mathbf{Cte} .$$

<u>Le référentiel du centre de masse $R^*$ est donc galiléen. Dans toute la suite de notre étude nous nous placerons dans ce référentiel pour décrire le système</u>.

Dans $R^*$ le point $M_1$ est repéré par le vecteur $\mathbf{r}_1 = \mathbf{CM}_1$ et $M_2$ par $\mathbf{r}_2 = \mathbf{CM}_2$. Les quantités de mouvement respectives sont notées $\mathbf{P}_1 = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_2 = m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{P}$ de façon à ce que la somme soit nulle.




## 1.2. Réduction du problème

Les deux points sont en interaction. $M_2$ exerce sur $M_1$ la force $\mathbf{F}_{2\to1} = \mathbf{F}$ et $M_1$ exerce sur $M_2$ la force $\mathbf{F}_{1\to2} = -\mathbf{F}_{2\to1} = -\mathbf{F}$ . Appliquons le TRC à chaque point :

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F} \qquad \text{et} \qquad m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\mathbf{F}\,.$$

En soustrayant la deuxième relation à la première :

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}\,.$$

Notons $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 = \mathbf{CM}$ la position d'un point fictif M, et $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ sa masse, appelée masse réduite. La relation précédente s'écrit :

$$\mu \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\,.$$

Le point matériel ainsi définit, est soumis à la force centrale **F,** toujours dirigée vers le centre de masse C. L'obtention de **r** à partir de cette équation permet ensuite d'accéder aux positions $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ de $M_1$ et $M_2$. En effet, C étant le centre de masse du système :

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$$

et

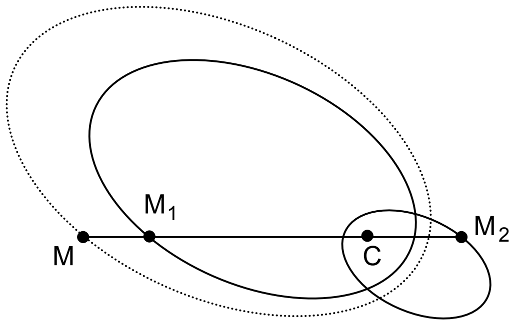
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\,.$$

On déduit :

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}\,.$$

Les trajectoires de $M_1$ et $M_2$ sont homothétiques à celle de M.

Lorsque la trajectoire de M est une ellipse de foyer C, on a représenté les trajectoires elliptiques de $M_1$ et $M_2$ sur la figure, avec $m_2 > m_1$.




**Rq** : Si $m_2 \gg m_1$, $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}$ et $\mathbf{r}_2 \approx \mathbf{0}$. Le point $M_1$ se confond avec M et le point $M_2$ avec C. $M_1$ décrit une ellipse de foyer $M_2$ qui est immobile. C'est le cas des planètes du système solaire sur lesquelles nous reviendrons.

Avec les expressions de $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$, on calcule :

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P} = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 = \mu \dot{\mathbf{r}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}_2 = -\mathbf{P} = m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = -\mu \dot{\mathbf{r}}\,.$$

La quantité de mouvement du point fictif M, par définition égale à $\mu \dot{\mathbf{r}}$, est :

$$\boxed{\mathbf{P} = \mu \dot{\mathbf{r}}}\,.$$

Elle est égale à celle du point $M_1$ et à l'opposé de celle de $M_2$.

Le moment cinétique de M, calculé en C :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{P}}\,.$$

Il est égal à la somme des moments cinétiques de $M_1$ et $M_2$. En effet :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{P} - \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{P} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{P}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{P}_2 .$$

L'énergie mécanique totale de M :

$$\boxed{E_{MECA} = \frac{P^2}{2\,\mu} + E_P(r)}$$

est l'énergie des deux points $M_1$ et $M_2$ en interaction. En effet, puisque $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$ :

$$E_{MECA} = \frac{P^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + E_P(r) = \frac{P_1}{2\,m_1} + \frac{P_2}{2\,m_2} + E_P\left(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|\right).$$

Finalement, l'étude du mouvement des points $M_1$ et $M_2$ se ramène à l'étude du mouvement du point fictif M dans le champ de force centrale **F**.

## 1.3. Conservation du moment cinétique et de l'énergie du point fictif

### 1.3.1. Conservation du moment cinétique

Appliquons le TMC au point fictif M, dans le référentiel du centre de masse. En C, le moment de **F** est nul et :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}\right)_{R^*} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{P} = \mathbf{Cte} .$$

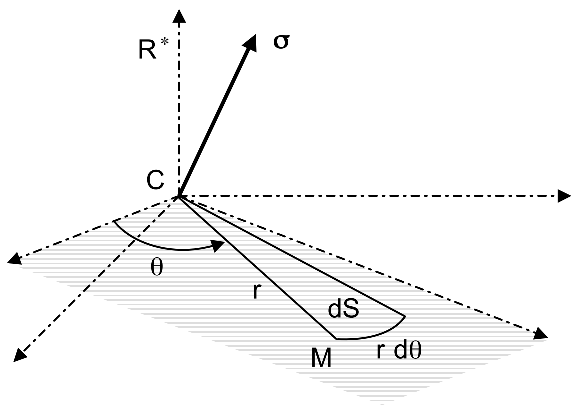
Le mouvement de M se fait donc dans un plan passant par C et perpendiculaire à $\boldsymbol{\sigma}$. Explicitons ce moment cinétique en coordonnées polaires $(r, \theta)$ dans le plan du mouvement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r} \wedge \mu\,\dot{\mathbf{r}} = r\,\mathbf{e}_r \wedge \mu\left(\dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta\right) = \mu\,r^2\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_z .$$

On en déduit l'intégrale première :

$$\sigma = \mu\,r^2\,\dot{\theta} = \text{Cte}$$

La quantité $C = r^2\,\dot{\theta}$ est constante. D'après la figure, en notant dS la surface élémentaire balayée par le rayon vecteur en un temps dt ; $C = 2\,dS/dt = \text{Cte}$. C'est pourquoi C s'appelle la constante des aires. Le rayon vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{CM}$ balaie des aires égales pendant des temps égaux. Le mouvement de M suit la loi des aires.




### 1.3.2. Conservation de l'énergie

L'énergie mécanique totale du point fictif M se conserve si **F** est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle $E_P$. Dans ce cas, en coordonnées polaires dans le plan du mouvement, l'intégrale première s'écrit :

$$E_{MECA} = \frac{1}{2}\,\mu\,\dot{\mathbf{r}}^2 + E_P(r) = \frac{1}{2}\,\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2\right) + E_P(r) = \text{Cte} .$$

En utilisant la relation $\sigma = \mu\,r^2\,\dot{\theta}$ on exprime $\dot{\theta}$ en fonction de $\sigma$, et :

$$E_{MECA} = \frac{1}{2}\mu\,\dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2\,\mu\,r^2} + E_P(r).$$

Introduisons l'énergie potentielle effective :

$$E_{Peff}(r) = \frac{\sigma^2}{2\,\mu\,r^2} + E_P(r).$$

L'énergie mécanique du point M s'écrit :

$$E_{MECA} = \frac{1}{2}\mu\,\dot{r}^2 + E_{Peff}(r).$$

L'énergie mécanique de M est la même que celle d'un point animé d'un mouvement rectiligne et soumis à une énergie potentielle effective $E_{Peff}(r)$. Tout se passe comme si le mouvement était unidimensionnel.
La connaissance de $E_P(r)$ et des deux intégrales premières du mouvement, $\sigma$ et $E_{MECA}$ données par les conditions initiales, permet alors de résoudre entièrement le problème.

Le domaine de variation de r s'obtient par la condition :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\mu}\left(E_{MECA} - E_{Peff}(r)\right) \geq 0 .$$

Ceci permet d'avoir une idée qualitative du mouvement, à savoir si le point M part à l'infini ou non, c'est à dire s'il est dans un état de diffusion ou un état lié.

On cherche ensuite une équation paramétrée avec l'une des variables $\theta$ ou r. Les intégrales premières de l'énergie et du moment cinétique se mettent sous la forme :

$$dt = \frac{\pm\, dr}{\left[\frac{2}{\mu}\left(E_{MECA} - E_{Peff}(r)\right)\right]^{1/2}} \qquad \text{et} \qquad d\theta = \frac{\sigma\, dt}{\mu\, r^2}.$$

En exprimant $d\theta$ en fonction de dr, l'équation du mouvement est donnée par la primitive :

$$\boxed{\theta = \int \frac{\pm\,\sigma\, dr}{r^2\left[2\,\mu\left(E_{MECA} - E_{Peff}(r)\right)\right]^{1/2}} + Cte}.$$

Ce calcul n'est simple que si l'énergie potentielle est coulombienne ($E_P(r) \propto 1/r$) ou harmonique ($E_P(r) \propto r^2$).

# 2. Applications

## 2.1. Mouvement dans un champ de force proportionnel à 1 / r$^2$

Etudions le mouvement du point fictif M dans un champ de force :

$$\mathbf{F} = \frac{k}{r^2}\,\mathbf{e}_r .$$

Cette loi correspond à deux phénomènes physiques :

- L'attraction gravitationnelle entre deux astres de masse $m_1$ et $m_2$ . La constante $k = -G\, m_1\, m_2$ est toujours négative.
- L'interaction électrostatique entre deux charges $q_1$ et $q_2$. Suivant le signe des charges, $k = q_1\, q_2 / 4\, \pi\, \varepsilon_0$ est négative ou positive.

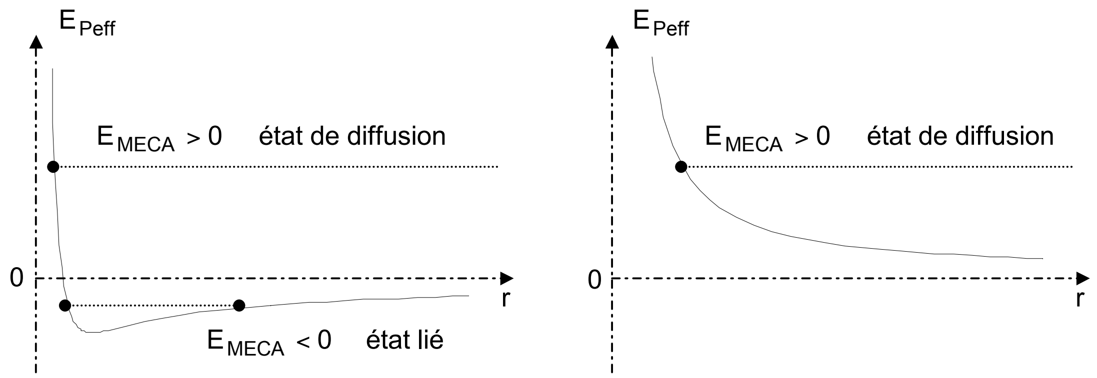
Le champ de force est conservatif. Avec la relation $\mathbf{F} = -\,\mathbf{grad}\, E_P$ on détermine l'énergie potentielle :

$$E_P = \frac{k}{r} ,$$

et l'énergie effective :

$$E_P = \frac{\sigma^2}{2\,\mu\, r^2} + \frac{k}{r} .$$

Nous avons représenté l'allure de ce potentiel effectif dans les deux situations : $k < 0$ et $k > 0$.




$k < 0$ , force attractive $\qquad$ $k > 0$ , force répulsive

- Dans le premier cas, la force est attractive. Il existe des états de diffusion pour $E_{MECA} \geq 0$ où le point M à une trajectoire ouverte (exemple des comètes ou météorites ne passant qu'une seule fois proche du système solaire) et des états liés lorsque $E_{Peff\,min} < E_{MECA} < 0$ pour lesquels la trajectoire de M est fermée (exemple des planètes tournant autour du soleil).
- Dans le deuxième cas, la force est répulsive. Il n'existe que des états de diffusion pour $E_{MECA} \geq 0$ ( exemple de la diffusion de Rutherford).

**Rq** : Pour $k < 0$, les états liés de l'interaction électrostatique entre deux particules chargées, sont décrits par la mécanique quantique.

Déterminons l'équation du mouvement du point fictif M dans le champ de force **F**. Au paragraphe 1.3. nous avons indiqué la démarche à suivre pour obtenir cette équation à partir de l'intégrale première de l'énergie. Mais il se trouve que pour un champ de force proportionnel à $1/r^2$ , les calculs sont plus simples si l'on écrit directement la relation fondamentale :

$$\mu\, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{k}{r^2}\, \mathbf{e}_r .$$

En utilisant l'intégrale première du moment cinétique $\sigma = \mu\, r^2\, \dot{\theta} = \text{Cte}$ on calcule l'accélération centrale $d^2\mathbf{r} / dt^2$ qui n'a forcément qu'une seule composante suivant $\mathbf{e}_r$ :

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{e}_r = -\frac{\sigma^2}{\mu^2 r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathbf{e}_r .$$

C'est la seconde formule de Binet. L'équation de la trajectoire s'écrit :

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{k\,\mu}{\sigma^2} .$$

Introduisons le paramètre :

$$p = \frac{\varepsilon\,\sigma^2}{k\,\mu},$$

homogène à une longueur. $\varepsilon = +1$ si $k > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $k < 0$. On à alors $-k\,\mu/\sigma^2 = -\varepsilon/p$. La solution de l'équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière :

$$\frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) - \frac{\varepsilon}{p}$$

A et $\theta_0$ sont deux constantes d'intégration. Nous choisirons un système d'axes polaires tel que, en $\theta = 0$, r soit minimum, et donc $\theta_0 = 0$. Introduisons une autre constante ; $e = A\,p$. La solution a pour expression :

$$\boxed{r = \frac{p}{e\cos\theta - \varepsilon}}.$$

Cette équation représente une conique dont l'un des foyers est le point C, p le paramètre de la conique et e son excentricité.

Nous pouvons exprimer l'énergie mécanique de M :

$$E_{MECA} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 + \frac{k}{r},$$

en fonction des paramètres p et e. Pour cela on utilise la première formule de Binet :

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2}\left[\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2\right],$$

et l'expression de $1/r$ en fonction de p et e. On obtient :

$$\begin{aligned} E_{MECA} &= \frac{\sigma^2}{2\,\mu}\left[\left(\frac{e\cos\theta - \varepsilon}{p}\right)^2 + \left(-\frac{e\sin\theta}{p}\right)^2\right] + \frac{k}{p}(e\cos\theta - \varepsilon) \\ &= \frac{k\,\varepsilon}{2\,p}\left[e^2\cos^2\theta + 1 - 2\,\varepsilon\,e\cos\theta + e^2\sin^2\theta\right] + \frac{k}{p}(e\cos\theta - \varepsilon) \end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{E_{MECA} = \frac{k\,\varepsilon}{2\,p}\left(e^2 - 1\right)}.$$

- Si $e > 1$, la trajectoire est une hyperbole : $E_{MECA} > 0$.
- Si $e = 1$, la trajectoire est une parabole : $E_{MECA} = 0$.
- Si $0 \le e < 1$, la trajectoire est une ellipse (un cercle pour $e = 0$) : $E_{MECA} < 0$.

## 2.2. Etats liés, gravitation

### 2.2.1. Problème de Kepler

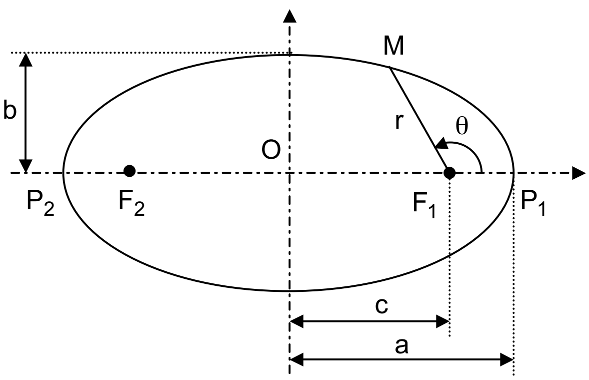
Etudions le mouvement du point fictif M dans un état lié (uniquement lorsque $k < 0$).
A l'origine c'est le problème de Kepler. Il étudia le mouvement des planètes autour du soleil et énonça trois lois empiriques. Les deux premières en 1609 et la troisième en 1618.

- $1^{re}$ loi : Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le soleil occupe l'un des foyers.
- $2^{e}$ loi : En des temps égaux, les rayons vecteurs des planètes balaient des aires égales.
- $3^{e}$ loi : Le rapport du cube du demi-axe de l'ellipse à la période au carré est indépendant de la planète.

Le système à deux corps est constitué du soleil et d'une planète. Le point $M_1$ correspond au centre de la planète et $M_2$ au centre du soleil. La masse du soleil étant beaucoup plus importante que celle des planètes la trajectoire du point M est quasiment celle de la planète étudiée. Au paragraphe précédent nous avons établit la première loi, dans le cas où l'énergie mécanique du point M est négative. La seconde loi est la loi des aires. Elle est vrai pour tous les mouvements à accélération centrale (paragraphe 1.3.). Il reste à démontrer la troisième loi.

Commençons par quelques rappels sur les coniques. Nous voulons exprimer le paramètre p de la conique en fonction de a et b. En coordonnées polaires, l'ellipse de foyers $F_1$ et $F_2$ est représentée par l'équation :

$$r = \frac{p}{e\cos\theta + 1}.$$




Pour $\theta = 0$ on obtient $F_1P_1 = p/(1+e)$ et pour $\theta = \pi$, $F_1P_2 = p/(1-e)$. La somme est égale à $P_1P_2 = 2a$. On déduit :

$$\boxed{a = \frac{p}{1-e^2}}.$$

La relation $c = a - F_1P_1$ nous donne l'expression de c :

$$\boxed{c = \frac{e\,p}{1-e^2} = e\,a}.$$

D'autre part $F_1M + F_2M = 2a$. En particulier, lorsque M est sur l'axe vertical, $F_1M = F_2M = a$. En appliquant le théorème de Pythagore :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2},$$

et à l'aide des expressions de a et c en fonction de p et e :

$$\boxed{b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}}.$$

Finalement :

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a}}.$$

La loi des aires et l'expression précédente du paramètre $p = -\sigma^2 / k\,\mu$ ( $\varepsilon = -1$ car $k < 0$ ) fournissent deux équations :

$$\frac{\sigma}{2\,\mu} = \frac{dS}{dt} = \frac{\pi\, a\, b}{T} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\sigma^2}{k\,\mu} = \frac{b^2}{a}.$$

On élimine le moment cinétique de ces deux équations et on obtient la relation :

$$\frac{a^3}{T^2} = -\frac{k}{4\,\pi^2\,\mu}.$$

Notons $m_S = m_2$ la masse du soleil et $m = m_1$ la masse de la planète. la masse réduite du point M est $\mu = m_S\, m / (m_S + m)$ et $k = -G\, m_S\, m$ d'où :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\, m_S}{4\,\pi^2}\left(1 + \frac{m}{m_S}\right).$$

Et puisque $m_S \gg m$, la troisième loi de Kepler s'écrit :

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\, m_S}{4\,\pi^2}}.$$

Elle permet de déterminer la masse du soleil (ou d'une planète ayant un satellite). La trajectoire de la terre est proche d'un cercle de rayon $a \approx 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}$. La période de révolution est $T = 365{,}25\ \text{jours} = 3{,}16 \cdot 10^7\ \text{s}$ et $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ S.I.. On calcule $m_S = 4\,\pi^2\, a^3 / G\, T^2 \approx 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$.

**2.2.2. Satellisation**

Considérons maintenant un satellite tournant autour de la terre. La masse du satellite $m_{Sat}$ est très faible par rapport à celle de la terre $m_T$ et sa trajectoire s'identifie à celle du point M. Lorsque le satellite est en orbite circulaire (cas particulier de l'ellipse pour $e = 0$ ) de rayon r, son mouvement est uniforme et sa vitesse $v_{Sat}$ s'obtient à partir du TRC appliquée au satellite :

$$\frac{m_{Sat}\, v_{Sat}^2}{r} = \frac{G\, m_T\, m_{Sat}}{r^2}.$$

Or le TRC appliqué à un objet sur le sol terrestre, soumis à l'attraction gravitationnelle de la terre, conduit à $G\, m_T = g_0\, r_T^2$. On déduit la vitesse du satellite :

$$\boxed{v_{Sat} = r_T \sqrt{\frac{g_0}{r}}}.$$

Pour les satellites SPOT spécialisés dans l'observation de la terre, $r = 832 + 6400 = 7232\ \text{km}$ et $v_{Sat} = 7{,}45\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans l'approximation $r \approx r_T$ on trouve $v_{Sat} = 7{,}9\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$. C'est la première vitesse cosmique.

L'énergie cinétique du satellite se met sous la forme:

$$E_C = \frac{1}{2} m_{Sat}\, v_{Sat}^2 = \frac{G\, m_T\, m_{Sat}}{2\, r}.$$

On connaît son énergie potentielle $E_P = -G\, m_T\, m_{Sat} / r$. L'énergie mécanique est la somme :

$$E_{MECA} = E_C + E_P = -\frac{G\, m_T\, m_{Sat}}{2\, r} = -E_C.$$

Dans la haute atmosphère le satellite est soumis à des forces de frottement dû au peu d'air restant, et voit son énergie mécanique décroître. Or $dE_{MECA} = -dE_C < 0$. Il en résulte que l'énergie cinétique du satellite et donc sa vitesse augmente.

Si le satellite est lancé de la terre à une vitesse très grande, il peut se libérer du champ de gravitation terrestre. Pour cela il faut que son énergie mécanique soit positive et sa trajectoire sera alors une hyperbole. La vitesse minimale de libération, ou vitesse parabolique $v_P$ se détermine lorsque l'énergie mécanique est nulle :

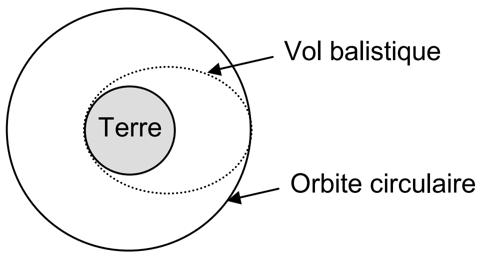
$$E_{MECA} = \frac{1}{2} m_{Sat}\, v_P^2 - \frac{G\, m_T\, m_{Sat}}{r} = 0,$$

d'où :

$$\boxed{v_P = \sqrt{2}\, v_{Sat}}.$$

La trajectoire est une parabole, le satellite arrive à l'infini avec une vitesse nulle. Pour un satellite ayant au départ une faible altitude, $r \approx r_T$ et $v_P = 11{,}2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$. C'est la seconde vitesse cosmique.

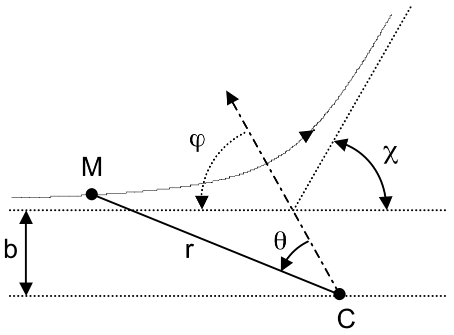
**Rq** : La mise sur orbite d'un satellite directement à partir de la surface de la terre, n'est pas possible car pour une vitesse initiale v telle que $v_{Sat} < v < v_P$ la trajectoire est une ellipse ; c'est le cas du vol balistique. Lorsque le satellite est à l'apogée de cette trajectoire il faut lui donner une vitesse supplémentaire pour le mettre sur une orbite circulaire autour de la terre.



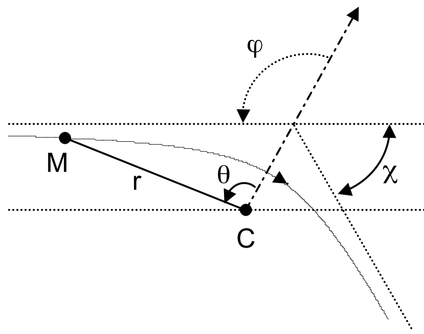

## 2.3. Etats de diffusion

Nous étudions maintenant le mouvement du point fictif M dans un état de diffusion.
Historiquement, le cas répulsif $(k > 0)$ correspond à <u>l'expérience de Rutherford</u> ; Il envoya des particules $\alpha$ ( noyau d'hélium de charge positive 2 e) sur une feuille d'or très mince. La plupart de ces particules ne furent pas déviées. Sachant que les particules chargées négativement avaient une masse faible, il en déduisit que les particules de charge positive (79 e) de l'atome, responsables de la déviation par une force répulsive, se trouvaient confinées dans un très petit volume : le noyau.
Le cas attractif $(k > 0)$ correspond à la diffusion de charges ayant des signes opposés, ou d'une météorite attirée par un astre.

Nous supposons que la masse du centre diffuseur $M_2$ est très supérieure à celle du point $M_1$. On identifie alors la trajectoire de $M_1$ à celle de M. Cette trajectoire est une hyperbole dont un ce ces foyers est le centre diffuseur. Le point M s'en approche à la vitesse $v_0$, à une distance b qui est le paramètre d'impact.




k > 0 , force répulsive




k < 0 , force attractive

Nous allons déterminer l'angle de diffusion $\chi$ dans le cas général. En coordonnées polaires, la trajectoire de M est représentée par l'équation d'une conique :

$$r = \frac{p}{e\cos\theta - \varepsilon}\,.$$

Lorsque $\theta = \varphi$ , r est infini et :

$$e = \varepsilon / \cos\varphi\,.$$

D'autre part $2\,\varphi + \varepsilon\,\chi = \pi$ . D'où :

$$e = \frac{\varepsilon}{\cos(\pi/2 - \varepsilon\,\chi/2)} = \frac{1}{\sin(\chi/2)}\,,$$

puis :

$$e^2 - 1 = \frac{1}{\tan^2(\chi/2)}$$

D'après l'expression de l'énergie mécanique ; $e^2 - 1 = 2\,p\,E_{MECA} / k\,\varepsilon$ et donc :

$$\tan^2\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{k\,\varepsilon}{2\,p\,E_{MECA}}\,.$$

En utilisant la conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique, puis l'expression de p :

$$E_{MECA} = \frac{1}{2}\mu\,v_0^2, \qquad \sigma = \mu\,v_0\,b \qquad \text{et} \qquad p = \frac{\varepsilon\,\sigma^2}{\mu\,k}\,,$$

on obtient :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{k\,\varepsilon}{\mu\,v_0^2\,b}}\,.$$

La distance minimale d'approche $r_m$ de M au centre diffuseur se calcule pour $\theta = 0$ :

$$r_m = \frac{p}{e-\varepsilon} = \frac{p}{e^2-1}(\varepsilon+e) = \frac{k\,\varepsilon}{2\,E_{MECA}}(\varepsilon+e),$$

d'où :

$$\boxed{r_m = \frac{k\,\varepsilon}{\mu\, v_0^2}\left(\varepsilon + \frac{1}{\sin(\chi/2)}\right)}.$$

**Rq** : Le calcul de $r_m$ se fait également en écrivant la conservation de l'énergie et du moment cinétique entre la position où r est infini et $r_m$. On élimine la vitesse en $r_m$ de ces deux équations et on obtient :

$$E_{MECA}\left(1-\frac{b^2}{r_m^2}\right) = \frac{k}{r_m} \quad \Rightarrow \quad r_m = \frac{k}{2\,E_{MECA}} + \left[\left(\frac{k}{2\,E_{MECA}}\right)^2 + b^2\right]^{1/2}.$$

Dans l'expérience de Rutherford, $r_m$ fournit une borne supérieure au rayon du noyau de l'atome. Les particules $\alpha$ ont une masse $\mu \approx m_1 = 6{,}68\cdot 10^{-27}$ kg et une vitesse incidente $v_0 = 1{,}7\cdot 10^7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. La constante $k = 2\,e\cdot 79\,e/4\,\pi\,\varepsilon_0$ avec $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C et $\varepsilon_0 = 1/36\,\pi\cdot 10^9$ S.I. ($\varepsilon = +1$). Pour les déviations à angle droit $\chi = 90°$, on trouve $r_m = 45{,}5\cdot 10^{-15}$ m. Le rayon du noyau est environ cent milles fois plus petit que celui de l'atome.

# Conclusion

Nous avons résolu le problème à deux corps de façon exacte en le réduisant à un problème à un corps ; celui du point matériel fictif M.
Dans les applications aux forces proportionnelles à $1/r^2$, la trajectoire de M est une conique. Une ellipse pour les états liés et une hyperbole pour les états de diffusion.
En réalité, ce sont des trajectoires approchées car les planètes du système solaire par exemple, interagissent entre elles. On pourrait alors considérer un problème à trois corps (deux planètes et le soleil) mais celui-ci n'est déjà plus soluble. En toute rigueur, toutes les planètes sont en interaction avec tous les astres de l'univers. C'est donc un problème à N corps que l'on traite par des méthodes statistiques.

## Bibliographie

J.P. Pérez, *Mécanique*, Masson, 1997.

M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault, *Mécanique 1 et 2*, Dunod, 1994.