

LP06 - Cinématique relativiste

Gauthier Legrand et Francis Pagaud

27 juin 2020

Bibliographie

- Mécanique 1, **Feynman** (Détails de calcul Michelson-Morley p. 206)
- Introduction à la relativité restreinte, **Hladik**
- http://ressources.agreg.phys.ens.fr/media/ressources/RessourceFichiers/24-Raimond_-_Electromagnetisme_et_relativite.pdf cours ulm
- <https://darksideofgravity.com/relat.pdf> dernière partie pour intro à la RG
- <https://sciencetonnante.wordpress.com/2020/03/05/le-paradoxe-des-jumeaux/> science etonnante
- <http://www.bibnum.education.fr/physique/relativite/l-experience-cruciale-de-hafele-et-k> article avions
- BUP 546, Gié, transformation de Lorentz de ρ et \vec{j}
- https://en.wikipedia.org/wiki/Li%C3%A9nard%E2%80%93Wiechert_potential
- BUP 624, Gié : BUP de Gié sur des paradoxes et leur résolution
- BUP 945, CHAMBRE À BROUILLARD
- BUP numero 945 page 635 Cinématique relativiste : une approche « physique »
- https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_15.html

Pré-requis : Niveau L3

- Transformation de Galilée
- Equations de Maxwell
- Effet Doppler classique

Table des matières

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Limites de la cinématique classique | 3 |
| 1.1 | La relativité galiléenne | 3 |

| | | |
|----------|--|----------|
| 1.2 | Non-invariance galiléenne des équations de Maxwell | 3 |
| 1.3 | L'expérience de Michelson et Morley | 4 |
| 2 | Postulat de la relativité restreinte | 4 |
| 2.1 | Enoncé | 4 |
| 2.2 | Contraction du temps | 4 |
| 2.3 | Contraction des longueurs longitudinales | 5 |
| 2.4 | Événements et simultanéité | 5 |
| 3 | Diagramme d'espace-temps et conséquences | 6 |
| 3.1 | La transformation spéciale de Lorentz | 6 |
| 3.2 | Notion d'invariant et causalité | 6 |
| 3.3 | Diagramme d'espace-temps | 7 |
| 3.4 | Effet Doppler relativiste | 7 |

La leçon est peut-être un peu dense, à voir si on veut le calcul Michelson-Morley

Reste à faire : Un mini-code Python pour tracer γ et discuter sa valeur. Faire le diapo.

Commentaires du jury

2016 Les notions d'événement et d'invariant sont incontournables dans cette leçon.

2015 Le jury rappelle qu'il n'est pas forcément nécessaire de mettre en oeuvre des vitesses relativistes pour être capable de détecter et de mesurer des effets relativistes.

2014 Cette leçon exige une grande rigueur dans l'exposé tant sur les notions fondamentales de relativité restreinte que sur les référentiels en jeu. Elle invite les candidats à faire preuve d'une grande pédagogie pour présenter des notions a priori non intuitives et faire ressortir les limites de l'approche classique. Un exposé clair des notions d'invariant relativiste est attendu.

2013 Un exposé clair des notions d'invariant relativiste et de composition des vitesses et de ses propriétés est incontournable dans cette leçon. La réciprocity des effets de dilatation des durées et de contraction des longueurs doit être soulignée.

Introduction

Déf cinématique :

Les physiciens étaient optimistes à l'aube du XX^{me} siècle. On arrive à déduire le mouvement des planètes ! (à quelques exceptions près...) On comprend tout à l'électromagnétisme ! On a des théories assez fortes. Il y avait bien quelques soucis mais rien de très important... Et pourtant Einstein a tout révolutionné en 1905.

Problématique : Quelle nécessité à l'introduction de la relativité restreinte et quelles conséquences sur la cinématique ?

1 Limites de la cinématique classique

1.1 La relativité galiléenne

Source :

Définition d'un référentiel. Principes brefs de la relativité galiléenne à mentionner à l'oral :

- L'espace-temps est homogène et isotrope. Référentiels privilégiés dans lesquels on sait que l'accélération est nulle. (relativité **restreinte**)
- Le passage des référentiels inertiels aux autres sont en translation uniforme : transformée de Galilée. (donc le temps est absolu (Newton disait « Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément. »), et pas de vitesse limite)
- Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels, décrits par la transformée de Galilée : **Principe de relativité**.

Sur slide : Introduction de deux référentiels, transfo galilée, loi de composition des vitesses (2 min).

-Les lois de la physique sont les mêmes : électromagnétisme (1865). Problème : la composition des vitesses ne marche pas.

1.2 Non-invariance galiléenne des équations de Maxwell

Source : Hladik p. 11

On fait le calcul sur slide issu du Hladik (1 min) : composition des vitesses ne marche pas pour la force de Lorentz.

Pourtant, les lois de Maxwell sont fiables... Une seule conclusion possible : ça marche pas la relativité galiléenne. Existe-t-il un référentiel privilégié dans lequel les équations de Maxwell marcheraient ? L'éther... ?

De façon générale, les équations de Maxwell n'ont pas la même écriture dans les repères \mathcal{R} et \mathcal{R}' , et aucun changement de jauge ne permet de les écrire de façon analogue, elles ne sont donc pas invariantes par transformée de Galilée. Cette observation est en contradiction avec le principe de relativité. Elle n'est en rien anormale, car la transformée de Galilée introduit une dissymétrie entre les variables de temps et d'espace, alors que les équations de Maxwell couplent ces variables. Pour que les équations de Maxwell restent invariantes par changement de référentiel il faut donc trouver une nouvelle transformation.

Il en est de même pour l'équation de d'Alembert, pour les mêmes raisons

1.3 L'expérience de Michelson et Morley

Source : Feynman p. 206, cours d'Ulm

Référentiel de l'expérience \mathcal{R} : l'éther ! dans lequel se déplace la lumière. Référentiel \mathcal{R}' : la Terre, qui se déplace dans l'éther en translation uniforme sur des temps courts.

Prenons la direction de translation selon x : les vitesses des objets suivent la loi de composition des vitesses. $\vec{v}_{\mathcal{R}'} = \vec{v}_{\mathcal{R}} - \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, avec $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{v}_{\text{Terre}} = 30 \text{ km/s}$

Principe : Un interféromètre est attaché à la Terre, la lumière se déplace dans l'éther. L'une des deux directions est plus longue que l'autre.

On fait les dessins et les calculs, cf. Feynman p. 206. C'est invariant par rotation?! (5 min)

-Conclusion pas immédiate. L'éther est entraîné comme une couche visqueuse? Les longueurs se contractent? (hypothèse de Fitzgerald-Lorentz qui s'accrochent à l'éther). Une autre possibilité : invariance de c ... ?

Beaucoup d'autres expériences... Mais Einstein dynamite tout ça en 1905.

2 Postulat de la relativité restreinte

2.1 Enoncé

Source : Ulm p. 76

L'espace est toujours homogène-isotrope. **On reste 1D.**

1. Il existent des référentiels dans lesquels les lois de la physique sont les mêmes (translation uniforme).
2. L'électromagnétisme est une loi de la physique.

Conséquence : c est une constante quel que soit le référentiel (et c'est prouvé a priori!
1964 : Expérience de l'émission de photons par des pions se déplaçant à $v = 0.99975c$)

Et pour que ce principe soit vrai, il est nécessaire de considérer un **temps relatif**.

2.2 Contraction du temps

Source : Ulm p. 77

On refait le calcul pas compliqué. Penser à bien définir les référentiels \mathcal{R} de la voiture et \mathcal{R}' du labo!

$$\Delta t = \Delta t' \underbrace{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}_{1/\gamma}$$

Définition temps propre : temps dans le référentiel de l'objet (là où il est au repos).

Toujours inférieur au temps impropre! Le déroulement se fait sur des temps plus longs dans un référentiel en mouvement par rapport au référentiel de l'objet.

Exemple : les muons. C'est pas que de la théorie! Source : Hladik p. 45 et 52.

2.3 Contraction des longueurs longitudinales

Source : le talent (j'ai pas de ref), quelques mots Hladik p. 49. Pérez ? Feynman ?

Mètre et seconde étroitement liés par la vitesse de la lumière (définition du SI). Donc variation des temps \iff variation des longueurs!

Expérience de pensée : mesure de la longueur d'une règle dans \mathcal{R}' , à l'aide d'un objet en mouvement dans son référentiel \mathcal{R} à la vitesse $\vec{v} = c\vec{ste}$. On relève le temps de passage devant les extrémités A et B de O .

Dans \mathcal{R} : écart des temps Δt , donc $L = v\Delta t$.

Dans \mathcal{R}' : la règle est en mouvement. Ecart des temps $\Delta t'$, donc $L' = v\Delta t'$.

Or, la mesure est faite en O , donc le temps propre associé c'est Δt (**Attention! c'est pas celui de la règle!**).

Via le paragraphe précédent : $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma}$, donc

Longueur propre : Longueur mesurée par un observateur fixe par rapport à l'objet. Ici, c'est L' .

$$\boxed{L' = \gamma L}$$

-La longueur propre d'une règle est toujours plus grande que la longueur impropre! Un objet vu en mouvement est vu plus petit qu'il ne l'est en vrai.

2.4 Evénements et simultanéité

Source : Ulm pour l'évènement, et talent pour simultanéité

Puisque les distances et le temps dépendent des référentiels, on a une coordonnée en plus. On va alors parler **d'évènements** : phénomène physique qui a lieu quelque part à un certain instant. C'est universel. Dans un référentiel, on peut le caractériser par des coordonnées, un point de l'espace (x,y,z) et un temps t , associé aux coordonnées (x,y,z,t) exprimées dans la base du référentiel, ainsi paramétré selon 4 coordonnées associées à un référentiel à chaque fois.

Exemple : Un mec au milieu d'un wagon de longueur propre $2L$, dans le référentiel \mathcal{R}' en mouvement à la vitesse v et de centre O . Dans son référentiel : Il émet un flash dans toutes les directions à $t = 0$. Dans son référentiel à nouveau, l'évènement A : le photon touche le mur de gauche et l'évènement B le photon touche le mur de droite est simultané, au temps $t_1 = L/c$.

Mais dans \mathcal{R} , dont l'origine coïncide avec O' à $t = 0$. c est constante, donc plus de chemin à parcourir à droite, il n'y a plus simultanéité!

Ca pose pleins de questions, et notamment... La causalité. Essayons de construire un formalisme pour mieux appréhender tout ça :

3 Diagramme d'espace-temps et conséquences

3.1 La transformation spéciale de Lorentz

Source : Hladik p. 30

Attention! L'intro de la transfo de Lorentz est pas triviale mathématiquement, car toute une famille de fonctions peut préserver l'invariant. Il faut retrouver toutes les interprétations physiques pour que ça marche.

Soit deux référentiels, l'un en TRU par rapport à l'autre selon x à la vitesse v . On a des évènements, donc quadri-vecteurs

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

-Permet de retrouver les résultats précédents. Si on l'applique deux fois, on retombe sur l'identité (invariance par réflexion)

-On retrouve la TG si $v \ll c$ (c'est une correction d'ordre 2 sur l'espace via γ . On peut voir les conséquences de la relat à faible vitesse avec une précision suffisante cependant).

-On a une vitesse limite. Et c'est une bonne nouvelle, ça veut dire que rien ne peut se propager à une vitesse infinie, les interactions ne sont plus instantanées, notamment la gravité.

3.2 Notion d'invariant et causalité

Source : Ulm p. 80

On a les maths, sortons-en la physique. Un évènement peut être décrit par un quadri-vecteur. On va le placer dans le plan (x,ct) par simplicité (tracé du diagramme). Si les deux évènements sont liés de cause à effet par la lumière, alors (Pythagore) :

$$c^2(t_2 - t_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Ca nous donne envie d'introduire l'intervalle entre deux évènements quelconques, soit une *pseudo-norme* : en 4D, on a

$$s_{1-2}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Le signe - peut paraître contre-intuitif, mais si on se dit que l'EM est invariant par changement de référentiel, alors le d'Alembertien aussi. Or, il contient ce signe -, donc c'est pas déconnant de le retrouver.

Et ça, c'est **invariant par transformée de Lorentz!**

Trois cas de figure :

- $s_{1-2} = 0$: liés par la lumière
- $s_{1-2} > 0$: intervalle de type temps (le lien peut s'effectuer dans le temps. La ligne qui les rejoint : **ligne d'univers**), la causalité est possible.
- $s_{1-2} < 0$: intervalle de type espace, pas de causalité possible.

On a l'invariant par TL, si on a la même origine initiale, l'intervalle est conservé, tout comme la causalité. Stylé. Ainsi, on peut tracer un cône de lumière dans lequel la causalité peut être vérifiée. (discussion Ulm p. 82 sur le futur et le passé intéressante)

3.3 Diagramme d'espace-temps

Source : Le talent

-Dédution des nouveaux axes d'espace-temps par la transformation de Lorentz. Pour ce faire, on prend la transformation de Lorentz avec $x' = 0$, ça nous donne la position de l'origine *aka* l'axe des ordonnées du nouveau référentiel dans l'espace (x,ct). Idem avec $ct' = 0$, on obtient l'axe du temps initial dans tout l'espace du nouveau référentiel. Tracé du diagramme.

On montre comment sont repérés les évènements, comment la simultanéité saute (en expliquant l'expérience des flash lumineux dans le train en traçant les deux droites des photons à 45 degrés) + les évènements qui étaient simultanés dans le référentiel initial sont toujours liés par une ligne type espace car le cône de lumière n'a pas changé!.

On peut réinterpréter quelques expériences de pensée ainsi :

- la contraction du temps en faisant correspondre les graduations de l'axe des ordonnées (l'horloge est fixe dans son référentiel, donc $c\Delta t' = c\gamma\Delta t$ $\underbrace{\quad}_{\text{Attention!}} + \underbrace{\beta\gamma\Delta x}_{=0}$)
- la dilatation de la règle.

3.4 Effet Doppler relativiste

Source : Hladik p. 44 + Hladik p. 54

Le traitement est pas très rigoureux, on pourra trouver une autre référence, type Langlois ou BFR 1

Le quadrivecteur $c\omega; \vec{k}$ est invariant par TL, donc c'est un quadrivecteur sur lesquels on peut appliquer la transfo de Lorentz.

On fait les calculs, RAS.

Bien faire la différence avec l'effet Doppler classique, dire que l'effet relativiste est d'ordre 2 et conséquence de la contraction des durées. De plus l'effet est également trans-

verse. A été mis en évidence expérimentalement, Ives et Stillwell 1938

Conclusion

En voulant généraliser les lois de la physique à tous les référentiels, on a dû mettre à bas tout un modèle défaillant et faire un immense saut conceptuel. Et c'est pas du pipeau, ça fait ses preuves, notamment en physique des particules et en astro! (voir l'aberration des étoiles, Hladik p. 103)

Ouvertures possibles : L'étude de la dynamique et le PFD.

Commentaires pendant la prépa aux oraux

- Des précisions historiques sur l'après Michelson-Morley dans le Grüber Mécanique générale, p. 598
- Il faut définir ce qu'on appelle "mesurer une longueur/mesurer un temps"
- Les lois sont elles invariantes ou covariantes? Covariantes, attention! Cela signifie que les lois sont les mêmes mais les quantités conservées ne sont pas forcément les mêmes.
- aberration des étoiles Hladik page 103 https://fr.wikipedia.org/wiki/Aberration_de_la_lumiere
- Charge invariante et lien avec les potentiels retardés

Questions

- C'est quoi un muon? D'où ça vient? Comment ça se détecte?
- Est-ce qu'il y a seulement les transformations de Lorentz qui conservent l'intervalle d'espace-temps?
- Qu'est-ce que le paradoxe des jumeaux? Comment se résout-il?
- Est-il théoriquement possible de traverser la galaxie en une vie humaine? Et dans la pratique?
- La norme de la vitesse de la lumière est identique dans tous les référentiels galiléens, qu'en est-il de sa direction de propagation?
- Quelle est la conséquence de cet effet sur l'observation d'une étoile (aberrations de la lumière)?
- C'est quoi la définition exacte d'une transformation de Lorentz? Qu'est-ce qu'elle représente par rapport à l'espace de Minkowski? On conserve la norme, donc invariance implique Lorentz.
- Préciser "les lois de la physique sont invariantes par changement de ref inertiel"