

## Leçon n°7 : Principes de la cinématique relativiste. Durée propre. Longueur propre. (1<sup>er</sup> CU)

### Introduction

#### 1. Rappels historiques

1.1. Mécanique classique et transformation de Galilée

1.2. Mise en défaut de la transformation de Galilée

#### 2. Postulats de la relativité restreinte et transformation de Lorentz

2.1. Postulats de la relativité restreinte

2.2. Expériences de pensée, conséquences immédiates

2.3. événements et intervalles

2.4. Transformation spéciale de Lorentz

2.5. Loi de composition des vitesses

#### 3. Temps propre, longueur propre

3.1. Temps propre

3.2. Longueur propre

3.3. Exemples

#### \*4. Interprétation géométrique et quadrivecteur

4.1. Interprétation géométrique et quadrivecteur "position"

4.2. Quadrivecteur vitesse

### Conclusion

## Introduction

Lorsque l'on parle de relativité, il faut bien distinguer le "principe de relativité", commun à Galilée et à Einstein, des théories de la relativité, en particulier la "théorie de la relativité restreinte" qui s'appuie entre autre sur le principe de relativité.

Nous commencerons par rappeler ce qu'est la relativité galiléenne et la transformation de Galilée. Puis en tenant compte des expériences historiques sur la vitesse de la lumière et les lois de Maxwell, nous verrons apparaître la relativité restreinte associée à une nouvelle transformation, celle de Lorentz.

## 1. Rappels historiques

### 1.1. Mécanique classique et transformation de Galilée

En cinématique classique, le mouvement d'un point M par rapport à un référentiel galiléen R est défini par trois fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  représentant sa position à l'instant  $t$ . Un événement est donc défini par la donnée de trois coordonnées d'espace plus le temps. Le carré de l'intervalle entre deux points  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  et  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , dans un repère orthogonal est :

$$s_{1,2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

De même entre deux points infiniment proches  $M(x, y, z)$  et  $M + dM (x + dx, y + dy, z + dz)$  :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Cette quantité est indépendante du système de repérage des points et est invariante vis à vis d'un changement de référentiel galiléen. Cela signifie que dans un autre référentiel galiléen  $R'$  en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $u$  par rapport à  $R$ , le carré de l'intervalle entre  $M(x', y', z')$  et  $M + dM (x' + dx', y' + dy', z' + dz')$  est le même que dans  $R$ , et donc :

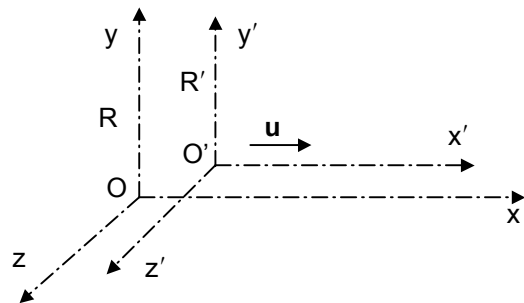
$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

Notons que l'on peut toujours positionner les axes  $Ox$  et  $Ox'$  de  $R$  et  $R'$  parallèlement à  $\mathbf{u}$  sans restreindre la généralité du problème.

La forme quadratique qui à tout vecteur  $\mathbf{dM}$  associe le scalaire  $ds^2$  a pour signature  $(+,+,+)$ . Elle est définie positive et permet de définir une norme euclidienne. L'espace à trois dimensions est donc euclidien.

Le temps s'écoule de façon identique dans  $R$  et  $R'$ . Deux événements simultanés dans  $R$  le sont également dans  $R'$ . Ainsi il existe aussi un invariant temporel vis à vis d'un changement de référentiel galiléen :

$$dt = dt'.$$



La transformation permettant de passer des coordonnées  $(x,y,z)$  d'un point  $M$  dans  $R$ , à ses coordonnées  $(x',y',z')$  dans  $R'$  au même instant, est la transformation de Galilée :

$$x' = x - ut$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Les lois de composition des vitesses s'obtiennent en dérivant les relations précédentes par rapport au temps. Elles s'écrivent :

$$v_x' = v_x - u$$

$$v_y' = v_y$$

$$v_z' = v_z$$

En dérivant une nouvelle fois on obtient les lois de composition de l'accélération :

$$a_x' = a_x$$

$$a_y' = a_y$$

$$a_z' = a_z$$

Il y a invariance de l'accélération par changement de référentiel galiléen.

En mécanique classique la masse est un invariant. Pour un point matériel  $M$  de masse  $m$ , soumis à une force  $\mathbf{F}$ , le principe fondamental de la mécanique classique s'écrit  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . La force doit donc être invariante pour que le principe de relativité soit vérifié. Ce principe qui stipule que toutes les lois physiques de la nature sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens est satisfait lorsque l'on associe à la mécanique classique la transformation de Galilée. Si l'on essayait d'associer d'autres lois physiques, de l'électromagnétisme par exemple, à la transformation de Galilée, ce principe ne serait plus vérifié comme nous allons le voir.

## 1.2. Mise en défaut de la transformation de Galilée

### 1.2.1. Incompatibilité avec l'électromagnétisme

Les équations de Maxwell, à la base de l'électromagnétisme, prévoient la propagation d'ondes dans le vide à la vitesse  $c \approx 300\,000 \text{ km/s}$ . Cette vitesse est indépendante de la source de l'onde et donc du référentiel d'étude. La question est alors de savoir dans quel référentiel on mesure cette vitesse. A la

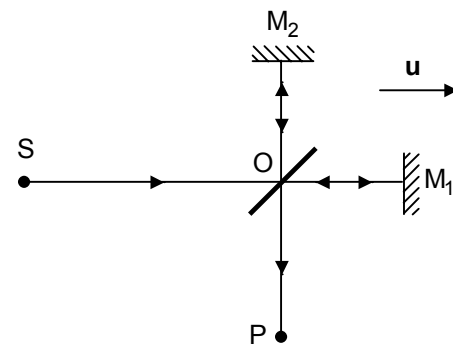
fin du XIX siècle, la plupart des scientifiques supposaient l'existence d'un milieu baignant tout l'univers : L'éther. Par analogie avec les ondes sonores se propageant dans l'air, l'éther devait avoir une structure rigide permettant la propagation des ondes électromagnétiques. Il devenait alors naturel de définir la vitesse des ondes électromagnétiques par rapport à l'éther. Mais de ce fait on mettait en évidence l'existence d'un référentiel absolu, contrairement au principe de relativité.

### 1.2.2. Expérience de Michelson et Morley

De nombreuses expériences ont essayé de mettre en évidence la variation de la vitesse de la lumière dans le vide suivant le référentiel d'observation, conformément à la transformation de Galilée. L'une d'elle, la plus connue, commença en 1881 et acquit une précision adéquate en 1887. C'est l'expérience de Michelson et Morley que nous allons décrire.

Nous appellerons  $c$  la vitesse de la lumière mesurée dans le référentiel absolu de l'éther  $R$ , et  $c'$  cette vitesse mesurée dans un référentiel  $R'$  en translation rectiligne uniforme par rapport à  $R$ . La difficulté de l'expérience était de trouver un référentiel mobile  $R'$  se déplaçant suffisamment vite par rapport à l'éther pour obtenir un écart net entre  $c$  et  $c'$ . L'ingéniosité de Michelson et Morley a été d'utiliser la terre elle-même, supposée se déplacer dans l'éther, et dont la vitesse orbitale autour du soleil est  $u \approx 30 \text{ km/s}$ . Si la transformation de Galilée est valable, un faisceau qui se propage parallèlement au déplacement de la terre à une vitesse  $c' = c \pm u$  et si sa direction est perpendiculaire au déplacement  $c' = c$ .

Pour vérifier cela, Michelson et Morley ont utilisé un interféromètre constitué de deux bras  $OM_1$  et  $OM_2$  de longueurs  $l = 10 \text{ m}$  perpendiculaires entre eux. Le bras  $OM_1$  est parallèle au déplacement de la terre et par une rotation de  $90^\circ$  il peut prendre une direction perpendiculaire à  $u$ . Un faisceau lumineux émis par une source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 5 \mu\text{m}$  en  $S$ , est divisé en deux par le miroir semi-réfléchissant placé en  $O$ . Après réflexion sur les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  les faisceaux viennent interférer en  $P$ . En pratique, on réalise un coin d'air. La différence de marche étant très faible, les interférences correspondantes s'observent en lumière non parallèle.



Le calcul de la variation de l'ordre d'interférence lorsque les miroirs tournent de  $90^\circ$  donne  $\Delta p = 2lu^2/\lambda c^2 = 0,4$ . Or le déplacement observé était de 0,02 frange. Le résultat de l'expérience était donc négatif et aucune expérience similaire n'a jamais permis de détecter un net décalage des franges.

Cette expérience vient confirmer les lois de Maxwell prédisant une vitesse de la lumière constante. Beaucoup de scientifiques de l'époque, dont Lorentz, essayèrent de restaurer la théorie de l'éther en imaginant qu'au voisinage de la terre par exemple, l'éther était entraîné par celle-ci. Mais aucun cadre théorique cohérent ne permettait sérieusement de prendre en compte ces hypothèses. Il s'agissait alors de faire un choix parmi les trois assertions suivantes, incompatibles entre elles.

- La vitesse de la lumière dans le vide est constante et ne dépend pas du référentiel d'étude.
- Toutes les lois physiques sont identiques dans tous les référentiels galiléens.
- La transformation de Galilée permet de passer d'un référentiel galiléen à un autre.

C'est Einstein, n'ayant jamais vraiment cru à l'existence de l'éther, qui proposa d'abandonner la transformation de Galilée et de ne conserver que le principe de relativité et l'invariance de  $c$ . Ce seront les deux postulats de la relativité restreinte.

## 2. Postulats de la relativité restreinte et transformation de Lorentz

### 2.1. Postulats de la relativité restreinte

- **1<sup>er</sup> postulat** : Toutes les lois physiques de la nature prennent la même forme dans tous les référentiels galiléens (ou inertiels) en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres et dans lesquels l'espace est homogène, isotrope et le temps uniforme.

Ce premier postulat correspond au principe de relativité, évoqué en mécanique classique.

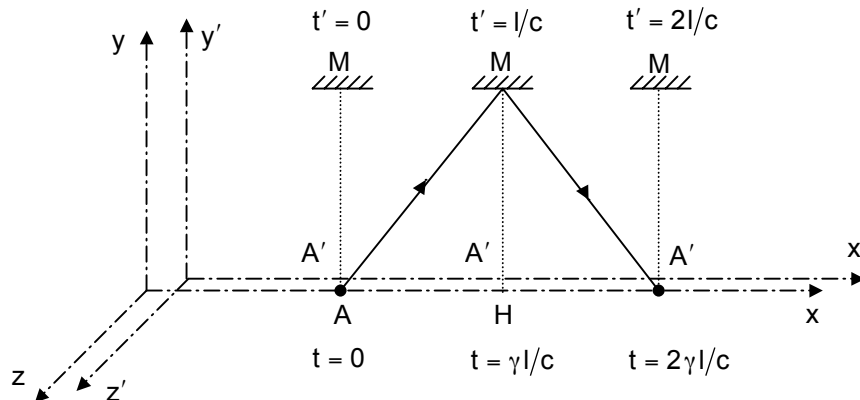
- **2<sup>ème</sup> postulat** : La vitesse de la lumière dans le vide est constante ( $c = 299\,792\,458$  m/s) dans tous les référentiels galiléens. C'est la vitesse limite de propagation des interactions.

## 2.2. Expériences de pensée, conséquences immédiates

A première vue, le deuxième postulat est en contradiction totale avec la transformation de Galilée. Mais la mécanique classique newtonienne associée à cette transformation avait donné de très bons résultats notamment dans l'étude du mouvement des planètes, avec les lois de Kepler. On remarque que même si la vitesse orbitale des planètes est importante (comme on l'a vu pour la terre), elle reste très faible devant la vitesse de la lumière comme dans la plupart des systèmes mécaniques étudiés. Le champ d'application de la transformation de Galilée se situe donc dans le domaine des faibles vitesses devant  $c$ , alors que le deuxième postulat concerne uniquement  $c$ . Ainsi il n'y a plus de contradiction. La relativité galiléenne est un cas limite de la relativité restreinte pour des vitesses  $v \ll c$ .

Voyons maintenant sur deux expériences de pensée, les conséquences du second postulat. Considérons deux référentiels galiléens  $R$  et  $R'$ . Le référentiel  $R'$  se déplace à la vitesse  $u$  par rapport à  $R$ , les axes  $Ox$  et  $Ox'$  étant parallèles à  $u$ .

- Dans la première expérience, un observateur  $A'$  lié à  $R'$  envoie un signal lumineux suivant l'axe  $Oy'$ . Ce signal est réfléchi par un miroir  $M$  fixe dans  $R'$  à une distance  $l$  de  $A'$ , et revient en  $A'$  au bout d'un temps  $t' = 2l/c$  puisque la vitesse de la lumière est  $c$  dans  $R'$ .



La figure représente les différentes positions du miroir, vu par un observateur  $A$  immobile dans  $R$ . Supposons que  $A$  coïncide avec  $A'$  lorsque le signal est émis. Ce signal revient en  $A$  au bout d'un temps  $t = 2AM/c$ . Or :

$$AM = \sqrt{AH^2 + l^2} \quad \text{avec} \quad AH = u \frac{AM}{c}.$$

On déduit :

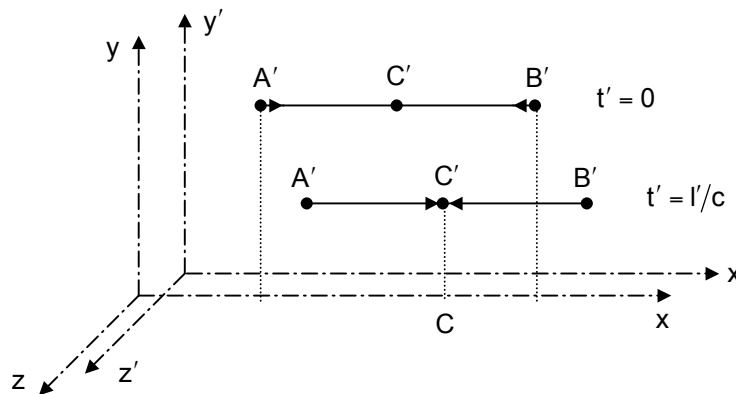
$$AM = l\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{u}{c}.$$

D'où :

$$t = \gamma t'.$$

La durée de l'expérience est plus courte pour un observateur de  $R'$  que pour un observateur de  $R$  car  $\gamma > 1$ . Le temps ne s'écoule pas de la même façon dans  $R$  et  $R'$ , contrairement à l'hypothèse du temps absolu de la cinématique classique. Bien sûr, si  $u \ll c$ ,  $\gamma \approx 1$  et le temps peut être à nouveau considéré comme universel.

▪ Dans la deuxième expérience, deux observateurs  $A'$  et  $B'$  immobiles dans  $R'$ , situés à la même distance  $l'$  (et non  $l$ , car nous verrons que la distance mesurée dans  $R$  et dans  $R'$  n'est pas la même, sur cet exemple) d'un troisième observateur  $C'$  également fixe dans  $R'$ , émettent chacun un signal lumineux suivant la direction  $Ox$  à l'instant  $t' = 0$ , qui arrive en  $C'$  au même instant  $t' = l'/c$ . Préalablement, pour synchroniser les horloges de  $A'$  et  $B'$ ,  $C'$  peut leur envoyer un signal.



La figure représente les trois observateurs liés à  $R'$ , vus de  $R$ , à l'émission et à la réception des signaux.

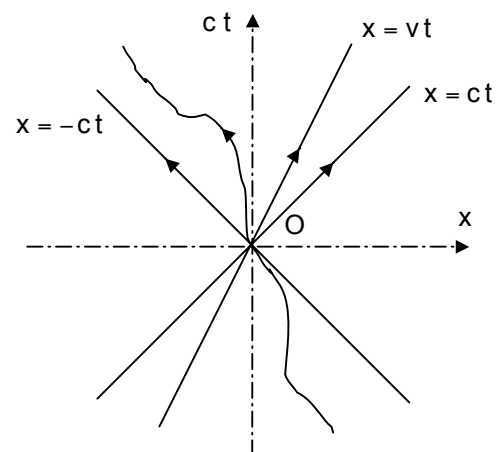
À la réception des signaux, un observateur  $C$  lié à  $R$  se trouve en face de  $C'$ . Lorsque  $A'$  et  $B'$  ont émis leur signaux,  $B'$  était plus proche de  $C$  que  $A'$ . Pour  $C$ ,  $B'$  a donc envoyé son signal après  $A'$  car la vitesse de la lumière est la même dans  $R$  et  $R'$ . L'émission des signaux est simultanée dans  $R'$  mais ne l'est pas dans  $R$ . Nous verrons plus tard comment calculer cet écart en temps dans le référentiel  $R$ .

Ainsi, le temps doit être défini dans chaque référentiel galiléen.

### 2.3. Evénements et intervalles

Désormais, une expérience (par exemple l'émission d'un signal) sera décrite dans l'espace-temps quadridimensionnel par un événement appelé aussi point d'univers. Il se caractérise par la donnée de trois coordonnées spatiales et une coordonnée temporelle dans un référentiel galiléen. Au cours du temps un point d'univers se déplace dans l'espace-temps et décrit une ligne d'univers. Une particule animée d'un mouvement rectiligne uniforme a une ligne d'univers rectiligne. En particulier, si sa vitesse est  $c$ , les lignes d'univers partant d'un événement  $O$  forment le cône de lumière de cet événement.

Pour visualiser graphiquement ces notions, il est commode d'utiliser l'espace-temps à une dimension spatiale. Sur la figure, nous avons représenté un événement  $O$  (un point en  $x = 0$  et  $t = 0$ ), le cône de lumière de cet événement formé par les droites  $x = \pm ct$ , et deux lignes d'univers; la première, quelconque issue de  $O$  et la deuxième, rectiligne, correspondant à une particule de vitesse  $v = ct_e < c$ . Les lignes sont orientées du passé vers le futur car le temps s'écoule toujours dans le même sens. D'autre part, les lignes d'univers issues de  $O$  se situent à l'intérieur de son cône de lumière. Ceci va permettre de préciser ce qu'est la causalité en relativité restreinte, en définissant l'intervalle entre



deux évènements. Nous voyons déjà qu'en plus du principe de causalité en relativité galiléenne (tout effet précède la cause), deux évènements ne peuvent avoir de relation causale que si l'un est dans le cône de lumière de l'autre et inversement.

Considérons un évènement  $M_1$  de coordonnées  $(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  dans un référentiel galiléen  $R$ , correspondant à l'émission d'un signal lumineux, et un évènement  $M_2$  de coordonnées  $(ct_2, x_2, y_2, z_2)$  dans  $R$ , correspondant à la réception de ce signal. On a alors la relation :

$$c^2(t_2 - t_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Les évènements  $M_1$  et  $M_2$  sont respectivement sur le cône de lumière de  $M_2$  et  $M_1$ .

Définissons maintenant l'intervalle  $s_{1,2}$  entre deux évènements quelconques  $M_1(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  et  $M_2(ct_2, x_2, y_2, z_2)$  par :

$$s_{1,2}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2.$$

Si  $M_1$  et  $M_2$  sont sur leur cône de lumière réciproque l'intervalle est nul. Mais dans le cas général  $s_{1,2}^2$  peut être positif ou négatif. Plaçons-nous dans un autre référentiel  $R'$  où les coordonnées de  $M_1$  et  $M_2$  sont  $(ct'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$  et  $(ct'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$ . Dans  $R'$ , l'intervalle  $s'_{1,2}$  entre  $M_1$  et  $M_2$  est tel que :

$$s'^2_{1,2} = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2.$$

Si  $M_1$  et  $M_2$  peuvent être reliés par un signal lumineux, alors  $s'^2_{1,2} = s^2_{1,2} = 0$ . Dans le cas contraire nous ne savons rien a priori sur l'éventuelle relation liant  $s'^2_{1,2}$  et  $s^2_{1,2}$  tant que nous n'avons pas la transformation qui permet de passer des coordonnées de  $R$  à celles de  $R'$ .

Essayons malgré tout de voir, sans démonstration rigoureuse, comment sont reliés les intervalles entre deux évènements infiniment voisins  $M(ct, x, y, z)$  et  $M+dM(c(t+dt), x+dx, y+dy, z+dz)$  dans  $R$  et dans  $R'$ .

Dans  $R$ , l'intervalle  $ds$  est tel que :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

et dans  $R'$  :

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$$

Supposons que  $ds^2$  et  $ds'^2$  soient des infiniment petits du même ordre. Cette hypothèse se traduit par la relation :

$$ds^2 = \alpha(u) ds'^2,$$

où  $\alpha$  est une fonction ne pouvant dépendre que du module de la vitesse de  $R'$  par rapport à  $R$ ,  $u$ , puisque l'espace est isotrope. Elle ne peut pas dépendre des coordonnées spatiales car l'espace est supposé homogène, pas plus que des coordonnées temporelles car le temps est uniforme. De plus, en considérant un troisième référentiel galiléen  $R''$  à la vitesse  $v$  par rapport à  $R'$  et  $w$  par rapport à  $R$ , il vient :

$$ds''^2 = \alpha(v) ds'^2 = \alpha(w) ds^2 = \alpha(w) \alpha(u) ds'^2,$$

d'où :

$$\alpha(u) = \alpha(v) / \alpha(w).$$

Mais  $u$  doit aussi dépendre de l'angle que font les vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  entre eux. Cet angle n'apparaît pas dans le rapport  $\alpha(\mathbf{v})/\alpha(\mathbf{w})$ . On en déduit que  $\alpha$  ne dépend pas de  $u$ , donc  $\alpha = \alpha/\alpha$  et  $\alpha = 1$ . Finalement :

$$ds^2 = ds'^2.$$

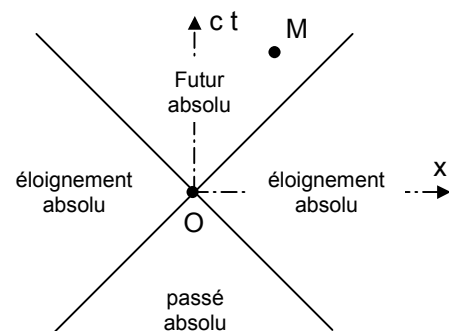
Cette relation exprime l'invariance de l'intervalle par changement de référentiel galiléen. On dit que l'intervalle est un invariant relativiste. Pour un intervalle fini entre deux événements  $M_1$  et  $M_2$  :

$$s_{1,2}'^2 = s_{1,2}^2.$$

Nous sommes donc en mesure de définir le passé et le futur d'un événement indépendamment du référentiel d'étude. Trois cas se présentent.

- $s_{1,2}^2 > 0$  : L'intervalle est du genre temps. Les événements  $M_1$  et  $M_2$  peuvent être reliés par un signal se propageant moins vite que la lumière. Ils sont dans leur cône de lumière réciproque.
- $s_{1,2}^2 < 0$  : L'intervalle est du genre espace. La distance spatiale entre  $M_1$  et  $M_2$  est trop grande pour que les événements puissent être reliés par un signal à la vitesse  $c$  pendant le temps  $t_2 - t_1$ . Il n'existe pas de relation causale entre  $M_1$  et  $M_2$ .
- $s_{1,2}^2 = 0$  : L'intervalle est du genre lumière. Les événements  $M_1$  et  $M_2$  ne peuvent être reliés que par un signal lumineux de vitesse  $c$ .

La figure représente deux événements  $O(0,0)$  et  $M(ct,x)$  dans un espace-temps à deux dimensions. Le point  $M$  se situe dans le cône de lumière de  $O$  pour  $t > 0$ . Nous allons montrer que l'événement  $M$  a lieu après l'événement  $O$ . Il n'existe pas de référentiel dans lequel  $M$  et  $O$  aurait lieu simultanément. En effet, en considérant un référentiel  $R'$ , où  $M$  a pour coordonnées  $(ct',x')$ , l'invariance relativiste de l'intervalle du genre temps entre  $O$  et  $M$  permet d'écrire  $c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 > 0$ . Si  $t' = 0$  alors  $-x'^2 > 0$ , ce qui est impossible. Donc  $M$  ne peut pas être antérieur à  $O$ , car dans ce cas il devrait obligatoirement "passer" par  $O$ , du fait qu'il doit rester dans le cône de lumière. Un raisonnement identique peut être mené pour  $t < 0$ .



Ainsi la notion de causalité est invariante relativiste.

Par contre, si  $M$  se situe à l'extérieur du cône de lumière de  $O$ , il existe des référentiels où  $M$  a lieu avant, pendant ou après l'événement  $O$ .

## 2.4. Transformation spéciale de Lorentz

Nous cherchons maintenant à établir de façon explicite la loi de transformation permettant de passer des coordonnées d'un événement  $M$ ,  $(ct, x, y, z)$  dans un référentiel galiléen  $R$ , à ses coordonnées  $(ct', x', y', z')$  dans un autre référentiel galiléen  $R'$ . Supposons, comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant, que  $R'$  se déplace à la vitesse  $u$  par rapport à  $R$ , les axes  $Ox$  et  $Ox'$  restant parallèles. A l'instant initial  $t = 0$ , les événements origine  $O$  et  $O'$  coïncident. Dans ces conditions, la transformation cherchée s'appelle la transformation spéciale de Lorentz.

Remarquons tout d'abord que les coordonnées  $y$  et  $z$  ne sont pas affectées. Nous y reviendrons lorsque nous aurons compris comment interpréter la transformation en terme de rotation. Il en résulte :

$$y' = y \quad \text{et} \quad z' = z.$$

Supposons la transformation linéaire. Le temps étant uniforme, l'espace homogène et isotrope, il nous reste à déterminer quatre coefficients,  $a$ ,  $b$ ,  $d$  et  $e$  en fonction de  $u$  tels que :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ d(u) & e(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

Pour cela, utilisons l'invariance relativiste de l'intervalle entre  $O$  et  $M$  :

$$c^2 t'^2 - x'^2 = (a^2 - d^2) c^2 t^2 + (b^2 - e^2) x^2 + 2(ab - ed) c t x = c^2 t^2 - x^2.$$

On déduit trois relations par identification :

$$a^2 - d^2 = 1 \quad (1)$$

$$b^2 - e^2 = -1. \quad (2)$$

$$ab - ed = 0 \quad (3)$$

Une quatrième relation s'obtient avec l'origine  $O'$  dans  $R'$  en  $x' = 0$ , qui se transforme en  $O$  dans  $R$  en  $x = ut$ , d'où  $0 = d c t + e u t$ . En posant  $\beta = u/c$ , il vient :

$$d = -\beta e. \quad (4)$$

On reporte  $d$  dans (3) et on obtient :  $b = -\beta e^2/a$ . Puis  $d$  et  $b$  dans (1) et (2) donne :

$$\begin{aligned} a^2 - \beta^2 e^2 &= 1 \\ \beta^2 e^4 - e^2 a^2 &= -a^2 \end{aligned}$$

Finalement, en posant  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ , on obtient :

$$e = \pm \gamma.$$

D'après (4) :

$$d = \mp \beta \gamma.$$

De (1) et (2) on déduit :

$$a = \pm \gamma \quad \text{et} \quad b = \mp \beta \gamma,$$

de signes opposés d'après (3). Lorsque  $u$  tend vers 0, la transformation correspond à la matrice identité. On lève ainsi l'indétermination des signes et il vient :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma \\ -\beta \gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

La transformation spéciale de Lorentz s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma \left( t - ux/c^2 \right) \\ x' &= \gamma (x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma & 0 & 0 \\ -\beta \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

Pour  $\beta \ll 1$ , nous retrouvons immédiatement, au premier ordre en  $\beta$ , la transformation de Galilée.

La transformation spéciale de Lorentz s'interprète comme une rotation hyperbolique dans le plan  $xOx'$ . En effet si nous définissons la rapidité  $\varphi$ , prenant des valeurs de  $-\infty$  à  $+\infty$  par  $\text{th}\varphi = \beta$ , la transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\varphi & -\text{sh}\varphi & 0 & 0 \\ -\text{sh}\varphi & \text{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

D'une façon générale, les transformations préservant l'invariance relativiste de l'intervalle ne peuvent être que des rotations (ou des translations qui ne présentent pas d'intérêt). Elles se décomposent en trois rotations ordinaires dans les plans  $xOy$ ,  $xOz$  et  $yOz$  et trois rotations hyperboliques dans les plans  $xOx'$ ,  $yOy'$  et  $zOz'$ . Dans chacune de ces rotations, les coordonnées orthogonales au plan de rotation restent inchangées.

## 2.5. Loi de composition des vitesses

A partir de la transformation spéciale de Lorentz, on obtient par différentiation :

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma(dt - u dx/c^2) \\ dx' &= \gamma(dx - u dt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned}.$$

Et puisque dans  $R'$  les composantes de la vitesse d'un point  $M$  sont  $v'_x = dx'/dt'$ ,  $v'_y = dy'/dt'$  et  $v'_z = dz'/dt'$ , la loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \\ v'_y &= v_y \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} \\ v'_z &= v_z \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} \end{aligned}.$$

Conformément au deuxième postulat de la relativité restreinte, si  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$  alors  $v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z = c^2$  et réciproquement. On retrouve également la loi de composition classique pour  $\beta \ll 1$ .

## 3. Temps propre, longueur propre

### 3.1. Temps propre

Considérons une particule  $M$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $R$ . Son mouvement n'étant pas forcément rectiligne uniforme, il n'existe pas un seul référentiel galiléen lié à la particule dans lequel elle serait au repos au cours du temps. Par contre, à chaque instant, on peut introduire un référentiel galiléen  $R'$  où la particule est immobile, appelé référentiel propre ou référentiel tangent de la particule. Il a la vitesse  $\mathbf{v}$  de celle-ci à l'instant considéré et nous supposons que l'origine  $O'$  de son repère, coïncide avec  $M$ .

Dans  $R$ , l'intervalle entre deux événements infiniment proches,  $M(ct, x, y, z)$  et  $M+dM(c(t+dt), x+dx, y+dy, z+dz)$  est :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Pendant le temps  $dt$ , la particule s'est déplacée de  $dl$  tel que :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2 dt^2.$$

D'où :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = c^2 dt^2 \left(1 - v^2/c^2\right).$$

Dans le référentiel propre  $R'$ , la vitesse de la particule est nulle et l'intervalle de temps propre  $dt'$  est défini par la relation :

$$ds'^2 = c^2 dt'^2.$$

L'intervalle  $dt'$  est un invariant relativiste au même titre que  $ds' = ds$ . Le temps propre de la particule  $t'$ , s'obtient par intégration de  $dt'$  dans les différents référentiels propres introduit au cours du temps. D'après les deux relations précédentes :

$$dt = \gamma dt' \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

L'intervalle de temps propre  $dt'$ , mesuré dans  $R'$  est plus court que l'intervalle  $dt$  mesuré dans  $R$  car  $\gamma > 1$ . Autrement dit, le temps s'écoule moins vite dans le référentiel propre que dans  $R$ . On dit qu'il y a dilatation du temps.

Il est facile de retrouver ce résultat à l'aide de la transformation spéciale de Lorentz. Considérons une horloge (ou une particule) qui émet des signaux à intervalles de temps réguliers  $\Delta t'$ , mesurés dans son référentiel propre  $R'$ . Dans ce référentiel, l'horloge est immobile et donc  $\Delta x' = 0$ . Mais la transformation spéciale de Lorentz, inversée (la matrice de passage s'obtient en remplaçant  $\mathbf{v}$  par  $-\mathbf{v}$ ) donne :

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + v \Delta x' / c^2 \right)$$

et :

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'}.$$

Cette conséquence surprenante de la relativité restreinte se vérifie expérimentalement. Une particule susceptible de se désintégrer a une durée de vie moyenne déterminée dans son référentiel propre par son horloge interne. Si sa durée de vie est très courte, elle sera néanmoins observable si sa vitesse est proche de  $c$  car  $\gamma$  sera très grand devant 1 de même que le temps de son observation dans  $R$  avant sa désintégration.

C'est dans les accélérateurs de particules que l'on peut vérifier ce phénomène, ou comme l'ont fait Frish et Smith en 1963, en étudiant la désintégration des muons produit dans la haute atmosphère.

### 3.2. Longueur propre

Considérons une barre en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $R$ . A chaque instant, définissons son référentiel propre  $R'$  et plaçons l'axe  $Ox'$  parallèle à la barre. A l'instant  $t$  dans  $R$ , supposons comme nous l'avons toujours fait, que les axes  $Ox$  et  $Ox'$  sont parallèles.

La longueur propre d'une barre est la longueur de cette barre dans son référentiel propre. Nous la notons  $\Delta x'$ . Pour connaître la longueur de la barre dans  $R$ , il suffit de déterminer la distance  $\Delta x$  séparant les deux événements correspondant aux extrémités de la barre au même instant, c'est à dire pour  $\Delta t = 0$ . Or la transformation spéciale de Lorentz nous donne :

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t).$$

D'où :

$$\boxed{\Delta x' = \gamma \Delta x} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Dans la direction du mouvement, la longueur mesurée dans R est plus petite que celle mesurée dans R'. On dit qu'il y a contraction des longueurs. Mais dans une direction perpendiculaire au mouvement, la longueur est la même puisque  $\Delta y' = \Delta y$  et  $\Delta z' = \Delta z$ .

En conséquence, tout objet volumique subit une contraction. Par exemple, en électromagnétisme, la densité volumique de charge dans le référentiel propre, s'écrit :

$$\rho' = \frac{dq}{dV'} = \frac{dq}{dx' dy' dz'}.$$

Et dans le référentiel R :

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{dq}{dx dy dz} = \frac{\gamma dq}{dx' dy' dz'} = \gamma \rho'.$$

### 3.3. Exemples

#### 3.3.1. Expérience de Michelson et Morley

Reprenons l'expérience décrite au paragraphe 1.2.2.. Considérons le référentiel héliocentrique galiléen R et le référentiel propre de l'interféromètre de Michelson R', lié à la terre.

Dans R', les faisceaux lumineux issus du miroir semi-réfléchissant en O, parcourent les distances OM<sub>1</sub>O et OM<sub>2</sub>O en un temps identique :

$$t' = t'_1 = t'_2 = \frac{2l'}{c},$$

où l' est la longueur propre des deux bras de l'interféromètre.

Dans R, d'après la dilatation du temps, le temps mis par les faisceaux lumineux pour revenir en O, dans chacun des bras est :

$$t = t_1 = t_2 = \gamma t' = \gamma \frac{2l'}{c}.$$

L'ordre d'interférence est donc nul et il n'y a pas de décalage des franges. Mais attention, la distance parcourue par les faisceaux dans chacun des bras n'est pas la même car il y a uniquement contraction de la longueur du bras parallèle à la direction du déplacement de la terre. Ainsi la théorie de la relativité restreinte permet d'expliquer le résultat de l'expérience de Michelson et Morley.

#### 3.3.2. Expériences de pensée

La première expérience de pensée que nous avons abordée, à savoir la réflexion d'un signal lumineux sur un miroir mobile, nous avait permis de mettre en évidence le phénomène de dilatation du temps. Elle correspond à la réflexion du faisceau transverse dans l'expérience de Michelson et Morley. Nous n'y reviendrons pas.

La seconde expérience nous avait fait entrevoir la non simultanéité de deux événements dans un référentiel R, alors qu'ils le sont dans un référentiel R' que nous appelons maintenant référentiel propre, sans pouvoir toutefois déterminer le décalage temporel dans R.

Nous allons pouvoir calculer maintenant, ce décalage, à l'aide de la transformation spéciale de Lorentz. Considérons les deux événements A' et B' de coordonnées dans R', (t'\_A = 0, x'\_A = -l') et

( $t'_B = 0, x'_B = l'$ ), correspondant à l'émission simultanée des signaux lumineux. La transformation spéciale de Lorentz permet d'écrire :

$$\begin{aligned} t_A &= \gamma \left( t'_A + v x'_A / c^2 \right) \\ t_B &= \gamma \left( t'_B + v x'_B / c^2 \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$t_A = -\frac{\beta \gamma l'}{c} \quad \text{et} \quad t_B = \frac{\beta \gamma l'}{c}.$$

On retrouve bien le fait que  $t_A$  soit antérieur à  $t_B$ . La contraction des longueurs s'exprime par la relation  $l' = \gamma l$ . Finalement, le décalage est :

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{2\beta \gamma^2 l}{c}.$$

### 3.3.3. Autres exemples

- Expérience de Frish et Smith
- Effet Doppler longitudinal et transversal
- Paradoxe des jumeaux
- Aberration des étoiles

## \*4. Interprétation géométrique et quadrivecteur

### 4.1. Interprétation géométrique et quadrivecteur "position"

Considérons les coordonnées  $(ct, x, y, z)$  d'un événement M, dans un référentiel galiléen R, comme les composantes  $OM_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , d'un quadrivecteur OM dans un espace vectoriel à quatre dimensions. En notant  $x_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , ces composantes :

$$OM_i = (x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z).$$

Puisque  $x, y, z$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$  dans l'espace ordinaire à trois dimensions, nous écrirons également :

$$OM = (ct, \mathbf{r}).$$

On appelle parfois OM, le quadrivecteur position, bien que quadrivecteur événement soit plus adapté.

Il est possible de munir l'espace vectoriel à quatre dimensions, d'une forme quadratique non définie positive, qui à tout quadrivecteur OM associe le scalaire :

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

C'est sa pseudo-norme. Elle est égale à :

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

et est donc invariante relativiste. La métrique est pseudo-euclidienne de signature  $(+, -, -, -)$  et l'espace correspondant s'appelle l'espace de Minkowski.

**Rq :** Si nous avons défini l'intervalle entre O et M par  $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ , la signature de la métrique aurait été  $(-, +, +, +)$ . Ce choix est purement conventionnel.

Signalons enfin que le produit scalaire entre deux quadrivecteurs OM et OP de composantes  $x_i$  et  $y_i$  est :

$$OM \cdot OP = x_i y_i = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 .$$

En toute rigueur, le terme produit scalaire n'est pas exacte puisque la forme quadratique n'est pas définie positive. Il est facile de se convaincre, en utilisant la transformation spéciale de Lorentz, que c'est un invariant relativiste.

## 4.2. Quadrivecteur vitesse

Définissons maintenant le quadrivecteur vitesse  $V$  d'une particule en mouvement à une vitesse arbitraire  $\mathbf{v}$ , par rapport à un référentiel galiléen  $R$ . A un instant  $t$  dans  $R$ , il existe un référentiel propre  $R'$  où la particule est au repos. La vitesse de la particule est le déplacement élémentaire de l'événement  $M$  associé à la particule, pendant le temps propre  $dt'$ . Le quadrivecteur vitesse s'écrit alors :

$$V = \frac{dOM}{dt'} .$$

Mais dans  $R$ ,  $dt = \gamma dt'$  avec  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  et donc :

$$V = \gamma \frac{dOM}{dt} .$$

En utilisant la notation  $OM = (ct, \mathbf{r})$ , le quadrivecteur vitesse  $V$  s'écrit :

$$V = \gamma(c, \mathbf{v}) .$$

Et ses composantes :

$$V_i = (v_0 = \gamma c, v_1 = \gamma v_x, v_2 = \gamma v_y, v_3 = \gamma v_z)$$

La pseudo-norme de  $V$  est :

$$V^2 = V_i V_i = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2 .$$

Elle est invariante relativiste.

Enfin, vérifions que les composantes du quadrivecteur vitesse se transforment conformément à la transformation spéciale de Lorentz, lors d'un changement de référentiel galiléen. Notons  $\mathbf{u}$ , la vitesse d'un référentiel galiléen  $R'$ , par rapport à un autre référentiel galiléen  $R$ . La vitesse de la particule dans  $R$  est  $\mathbf{v}$  et dans  $R'$ ,  $\mathbf{v}'$ . Nous avons :

$$\begin{pmatrix} \gamma' c \\ \gamma' v'_x \\ \gamma' v'_y \\ \gamma' v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta \gamma_u & 0 & 0 \\ -\beta \gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix} ,$$

où  $\beta = u/c$ ,  $\gamma_u = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  et  $\gamma' = 1/\sqrt{1-v'^2/c^2}$ . On déduit :

$$\begin{aligned}
 \gamma' &= \gamma \gamma_u \left(1 - u v_x / c^2\right) & v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - u v_x / c^2} \\
 v'_x &= (\gamma \gamma_u / \gamma') (v_x - u) & \text{et} & v'_y &= v_y \frac{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}{1 - u v_x / c^2}, \\
 v'_y &= \gamma v_y / \gamma' & & v'_z &= v_z \frac{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}{1 - u v_x / c^2}, \\
 v'_z &= \gamma v_z / \gamma' & & &
 \end{aligned}$$

en accord avec ce que nous avons obtenu au paragraphe 2.5..

## Conclusion

La relativité restreinte a émergé suite à l'étude de l'électromagnétisme par Maxwell et de l'incompatibilité de l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide avec la transformation de Galilée. Cette théorie s'est révélée parfaitement adaptée à l'étude de l'électromagnétisme, puis de toutes les autres lois fondamentales de la nature, à l'exception de la gravitation. En effet, il n'est pas possible d'appliquer la relativité restreinte à la gravitation de Newton. Pour remédier à cela, Einstein proposa en 1915, la théorie de la relativité générale, dans laquelle la géométrie de l'espace-temps n'est plus pseudo-euclidienne mais variable suivant le champ de gravitation existant dans cet espace.

## Bibliographie

C. Grossetête, *Relativité restreinte et structure atomique de la matière*, ellipses, 1985.

M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault, *Mécanique 1 et 2*, Dunod, 1994.

L. Landau, E. Lifchitz, *Physique théorique, Théorie des champs*, Mir Moscou, 1989.