LP07 - Dynamique relativiste

Gauthier Legrand et Francis Pagaud

27 juin 2020

Bibliographie

- Relativité restreinte, **Hladik**
- Mécanique 1, **BFR** (je n'avais pas la ref mais il semble très bien)
- Mécanique 1, **Feynman** bien pour une vision globale et plus physique de la relativité restreinte
- Relativité Restreinte, **Semay** pour la rigueur et l'exercice sur l'OH relativiste
- Introduction à la relativité, **Langlois** (je n'avais pas la ref mais il semble très bien)
- Théorie des champs, **Landau** les deux premiers chapitres sont intéressants
- <http://supernovae.in2p3.fr/~llg/Enseignements/Agregation/Relativite/> cours Ulm 1
- http://ressources.agreg.phys.ens.fr/media/ressources/RessourceFichiers/24-Raimond_-_Electromagnetisme_et_relativite.pdf cours Ulm 2 (page 70)
- http://www.armelmartin.mon-site-a-moi.fr/doc/cours/adoc_bertozzi_article.pdf expérience de bertozzi

Pré-requis :

- Cinématique relativiste
- Quadrivecteurs vitesse et énergie-impulsion

Table des matières

1	Importance des quadrivecteurs	2
1.1	Quadrivecteurs vitesse et énergie-impulsion	2
1.2	Application aux collisions	3
1.3	Choc inélastique	3
2	Équation du mouvement	5
2.1	Principe fondamental de la dynamique modifié	5
2.2	Vitesse maximale atteignable	5

3 Applications	6
3.1 Synchrotron	6
3.2 Oscillateur harmonique relativiste	6

Remarques générales : bien préciser à chaque fois qu'on se place dans un référentiel galiléen (celui du laboratoire ou centre d'inertie)

Nouveau plan (on met en pré-requis les quadrivecteurs) I/ un nouveau PFD : démonstration, bertozzi, OH (+ synchrotron mais bof) II/ Chocs : lois de conservation, chocs élastiques, chocs inélastiques

Commentaires du jury

2015 La leçon doit souligner l'intérêt du formalisme quadrivectoriel.

2010 La forme plus complexe des lois de la dynamique peuvent rendre les exemples choisis très techniques. Il convient de choisir des illustrations simples où les effets relativistes apparaissent rapidement. L'étude des collisions peut bien évidemment entrer dans le cadre de cette leçon. Ne pas oublier que les lois de conservation sont également un outil de découverte de particules nouvelles, indétectables directement.

2004 Le référentiel du centre de masse est toujours introduit, mais l'intérêt qu'il présente n'est pas suffisamment souligné, en particulier dans la détermination du seuil énergétique d'une collision inélastique. Il faut savoir faire la différence entre invariance et conservation .

Introduction

Mécanique classique (avec la loi de Newton et la transformation de Galilée), le PFD s'écrit de la même façon dans tous les référentiels galiléens. Problème : ça ne marche plus quand on considère la transformation de Lorentz.

Il faut donc déterminer les lois de la dynamique relativiste, que l'on souhaite invariantes vis-à-vis d'une transformation de Lorentz (principe de relativité). De plus il faudra que ces lois redonnent, aux faibles vitesses, les lois de la mécanique classique.

Problématique :

1 Importance des quadrivecteurs

D'après le cours de cinématique relativiste, on sait que l'espace et le temps sont intimement liés, il faut donc considérer un espace de dimension 4.

1.1 Quadrivecteurs vitesse et énergie-impulsion

Source : BFR page 262

On part du quadrivecteur position $X = (ct, x, y, z)$ qui est de pseudo norme constante $ds^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

Pour le montrer : Landau montre que $ds^2 = adt'^2$ car ce sont des infiniment petits du même ordre et que la nullité de l'un implique celle de l'autre. De plus, a ne peut dépendre que de la norme de la vitesse. En faisant l'opération sur plusieurs changements de référentiels on trouve que nécessairement $a = 1$.

On cherche alors un quadrivecteur vitesse puis énergie-impulsion qui soient eux aussi des invariants sous transformation de Lorentz.

On définit alors le quadrivecteur vitesse $U = \frac{dX}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \vec{v})$, avec la pseudo-norme $U^2 = c^2$ qui est invariante sous transformation de Lorentz.

Il en est de même pour le quadrivecteur énergie-impulsion $P = mU = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$, avec la pseudo-norme $P^2 = mc^2$ qui est invariante sous transformation de Lorentz.

Pour interpréter le terme γmc^2 il faut regarder ce que vaut γmc^2 dans la limite des faibles vitesses. On trouve $\gamma mc^2 \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$. On reconnaît l'énergie cinétique de la particule, γmc^2 est donc homogène à une énergie et on admet que c'est l'énergie totale de la particule qu'on note E . On peut alors réécrire le quadrivecteur $P = (E/c, \gamma \vec{p})$

On a alors $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2$

Pour des particules au repos $\vec{p} = \vec{0}$ on a l'équivalence énergie-masse $E = mc^2$. En relativité restreinte, on n'a plus conservation de la masse, seulement conservation de l'énergie du fait de cette équivalence masse-énergie.

Pour le photon $E^2 = (h\nu)^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = (h\nu)^2 + m^2c^4$ donc le photon est de masse nulle. On écrit malgré tout son quadri-vecteur énergie-impulsion $P = (h\nu, h\nu\vec{n})$ **donc de pseudo-norme nulle ? Oui car la masse au repos est nulle.**

Transition : Voyons comment appliquer ce formalisme

1.2 Application aux collisions

Source : Hladik page 115 + Langlois page 65 + <http://thierry.chave.free.fr/P8.pdf>

Bon du coup c'est pas fou parce qu'on utilise pas trop les quadrivecteurs là, je crois que c'est mieux fait dans le Langlois

Un photon rencontre un électron au repos, on obtient un photon et un électron en mouvement

$$\text{Conservation énergie (choc élastique)} : h\nu_1 + m_e c^2 = h\nu_2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2}$$

$$\text{Conservation de l'impulsion totale (système isolé)} : \vec{p}_{phot\ 1} + \vec{0} = \vec{p}_{phot\ 2} + \vec{p}_{e2}$$

On introduit l'angle θ entre la direction de propagation du photon incident et celle du photon transmis. On secoue tout ça et on obtient $\Delta\lambda = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$

Sur slide montrer l'expérience de Compton

1.3 Choc inélastique

Source Grosses Têtes

On parle de choc inélastique quand le nombre de particules ou leur nature évoluent. L'énergie du système initial est conservée, mais pas si on regarde seulement les particules

initiales : une partie de l'énergie leur a été prise pour créer de nouvelles particules ou changer leur nature.

On se place dans le référentiel du centre d'inertie parce que c'est un référentiel inertiel et que les particules émises ont une vitesse nulle dans le cas limite minimal. (si on considère que les particules doivent être immobiles dans le ref du laboratoire dans l'état final, la conservation de l'impulsion totale donne que l'impulsion initiale doit être nulle, et donc le choc n'existe pas).

On considère une particule 1 d'impulsion initiale $\vec{p}_1$ et d'énergie $E_1 = \vec{p}_1^2 c^2 + m_1^2 c^4$ qui rentre dans une particule 2 immobile d'énergie $E_2 = m_2 c^2$. Le quadrivecteur énergie-impulsion du système initial s'écrit alors $P_{ini} = \left(\vec{p}_1, \frac{(E_1 + m_2 c^2)}{c} \right)$, dont la norme est

$$|P_{ini}|^2 = \vec{p}_1^2 - \frac{(E_1 + m_2 c^2)^2}{c^2}.$$

On se met au seuil d'énergie pour que la collision ait lieu, dans ce cas les particules finales sont immobiles dans le ref du centre d'inertie, le quadrivecteur final est donc $P_f = (\sum_k m_k c, \vec{0})$.

La conservation du quadrivecteur donne $|P_{ini}|^2 = \vec{p}_1^2 - \frac{(E_1 + (m_2 c^2))^2}{c^2} = |P_f|^2 = -(\sum_k m_k c)^2$. On trouve alors $\vec{p}_1^2 c^2 - E_1^2 - 2E_1 m_2 c^2 - (m_2 c^2)^2 = -(\sum_k m_k)^2 c^4$, et en utilisant le fait que $E_1^2 = \vec{p}_1^2 c^2 + m_1^2 c^4$ on obtient $\vec{p}_1^2 c^2 - \vec{p}_1^2 c^2 - m_1^2 c^4 - 2E_1 m_2 c^2 - (m_2 c^2)^2 = -(\sum_k m_k)^2 c^4$ puis finalement

$$2E_1 m_2 c^2 = \left(\sum_k m_k \right)^2 c^4 - m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4$$

Mais comme nous l'énergie qui nous intéresse c'est l'énergie cinétique et qu'on a $E_1 = m_1 c^2 + E_{c1}$ (système isolé donc pas d'énergie potentielle), la condition devient $2E_{c1} m_2 c^2 + 2m_1 m_2 c^4 = (\sum_k m_k)^2 c^4 - m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4$ d'où

$$E_{c1} = \frac{c^2}{2m_2} \left(\left(\sum_k m_k \right)^2 - (m_1 + m_2)^2 \right)$$

Cela donne l'énergie cinétique minimale que doit avoir la particule incidente pour que la collision puisse avoir lieu. Si cette énergie minimale est négative alors la réaction est toujours possible (la condition de minimum d'énergie est toujours vérifiée). En revanche lorsque $(\sum_k m_k)^2 > m_1^2 + m_2^2$, il y a une énergie seuil.

Exemple pour la réaction proton 1 + proton 2 donnent proton 1 + proton 2 + proton 3 + antiproton 4 : $E_c^{min} = \frac{c^2}{2m} ((4m)^2 - (2m)^2) = 6mc^2 \simeq 5,63 \text{ GeV}$. L'énergie totale minimale du proton incident est donc $E_1 = E_c^{min} + mc^2 = 7mc^2$ qui vaut par définition γmc^2 , donc on trouve $\gamma = 7$ ce qui permet de trouver $v = 0,99c$. D'où l'intérêt des accélérateurs de particule.

Transition : Comme en mécanique classique, les bilans d'impulsions servent à comparer deux situations entre lesquelles il est compliqué de modéliser ce qu'il s'y passe. Dans

$$\frac{\delta}{c} \vec{v} \cdot \vec{j} = \frac{\delta}{c} \frac{dE}{dV}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{j} = \frac{dE}{dt}$$

la plupart des cas on peut quand même décrire ce qu'il se passe à chaque instant, c'est le rôle du PFD

2 Équation du mouvement

2.1 Principe fondamental de la dynamique modifié

Source : Semay page 168 + BFR page 265

On cherche à rendre le PFD invariant sous transformation de Lorentz. En l'état ce n'est pas le cas. On cherche à trouver une équation qui soit de la forme $\frac{dP}{d\tau} = K$, avec K un quadrivecteur à relier aux forces qui s'appliquent sur le système. Le seul domaine dans lequel on sait exprimer un tel quadrivecteur est en électromagnétisme. On extrapole alors ce lien avec les autres forces. On pose alors :

$$\frac{dP}{d\tau} = F = \left(\frac{dE/c}{d\tau}, \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)$$

Pour se renseigner sur l'électromagnétisme regarder le chapitre 11 du Semay

$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2$ donne $E \frac{dE}{dt} = \vec{p} \frac{d\vec{p}}{dt} c^2 = m\vec{v} \cdot \vec{f} c^2$. Avec $E = \gamma mc^2$ on obtient finalement $\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{f}$

$$\text{Ainsi } F = \left(\frac{dE/c}{d\tau}, \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right) = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \left(\frac{\gamma}{c} \vec{v} \cdot \vec{f}, \gamma \vec{f} \right)$$

La conservation de la pseudo-norme de la force donne alors le TEC ("de même qu'en classique le TEC se déduit du PFD, on n'a pas une quatrième équation juste parce qu'on est en relativité.")

Page 169 du Semay on parle de l'anisotropie que ça apporte : $\vec{F}_{||} = m\gamma^3 \vec{a}_{||}$ et $\vec{F}_{\perp} = m\gamma \vec{a}_{\perp}$. Je sais pas si ça vaut vraiment le coup d'en parler.

La première conséquence c'est que la somme des forces et l'accélération ne sont plus forcément colinéaires : $\vec{f} = m\gamma \vec{a} + m\vec{v} \frac{d\gamma}{dt}$

Transition : La limite des basses vitesses est donc validée expérimentalement, qu'en est-il de la limite haute ?

2.2 Vitesse maximale atteignable

Source : vidéo veritasium https://www.youtube.com/watch?v=EPsG8td7C5k&fbclid=IwAR11SIMu0xn-Huvj2SF1sb_tetTBvr_ASDRajltWIDycDvSKgmUPnf-2kdg

Expérience de Bertozzi.

$$\frac{d\gamma mv}{dt} = -eU$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma mc^2) = -K_{\text{ext}}$$

$$\frac{d}{dt}$$

Qui s'intègre facilement pour donner $\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -eUt$, qui s'inverse en

$$v = \frac{\left(\frac{eUt}{m}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{eUt}{mc}\right)^2}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c$$

Python On montre le graphe de $v(t)$ pour plusieurs tensions

Et si on essayait de contourner le problème? Faire tourner un objet à une vitesse angulaire ω puis allonger cet objet de sorte que $v = \omega R > c$. Pour faire ça on est obligé d'appliquer un couple : le moment d'inertie I augmente et $\omega = cte$.

Bon en fait c'est compliqué, je pense que le moment cinétique doit dans ce cas s'écrire $\vec{L} = \iiint \rho(M) d^3OM \vec{OM} \times \gamma(v(M)) \vec{v}(M)$
On peut aussi faire plus simple en considérant la mécanique du point, mais dans ce cas-là c'est exactement pareil que pour le PFD.

On a vu dans cet exemple qu'il est impossible de dépasser la vitesse de la lumière, mais il y a encore pire : s'en approcher coûte une énergie monumentale.

Pour passer d'une vitesse nulle à $c/2$ il faut apporter à l'électron une énergie $\Delta E = \gamma(v = c/2)mc^2 - mc^2 \simeq 0,15mc^2 \simeq 1,3 \times 10^{-14} \text{J}$ (attention on a négligé ici l'énergie perdue par rayonnement de l'électron : on n'oublie pas la LP30 "une charge accélérée rayonne")

Maintenant on veut passer de $v = c/2$ à $v = 0,9999c$ (ie 99,99% de la vitesse de la lumière) il faut un énergie $\Delta E = 5,7 \times 10^{-12} \text{J}$ soit plus de cent fois plus que de $v = 0$ à $v = c/2$. Et comme γ est infini pour $v = c$ on voit qu'il faudrait une énergie infinie pour qu'une particule de masse non nulle aille à la vitesse de la lumière.

Transition :

3 Applications

3.1 Synchrotron

Source :

•

Transition :

3.2 Oscillateur harmonique relativiste

Source : Semay ex 9.11 page 192

Le PFD à l'ordre 1 ça donne un OH, c'est donc intéressant de voir quelles sont les corrections qu'apportent la relativité au modèle harmonique.

Deux façons de faire, soit on fait le PFD relativiste $\frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dx}{dt} \right) = -\omega_0^2 x$

$$\frac{dE}{dt} =$$

$$\begin{aligned} -\omega_0^2 x &= \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dx}{dt} \right) \\ &= \gamma \ddot{x} + \frac{d\gamma}{dt} \dot{x} \\ &= \gamma \ddot{x} + \gamma^3 \frac{\dot{x} \ddot{x}}{c^2} \\ &= \ddot{x} \left[\gamma + \gamma^3 \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right] \\ &= \ddot{x} \gamma^3 \left[\gamma^{-2} + \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right] \\ &= \ddot{x} \gamma^3 \end{aligned}$$

Soit on utilise la conservation de l'énergie $E = \gamma mc^2 + \frac{1}{2} Kx^2$ et en dérivant ça par rapport au temps on obtient $\frac{dE}{dt} = 0 = m\dot{x} [\gamma^3 \ddot{x} + \omega_0^2 x]$

Je préfère la deuxième méthode car plus rapide et on fait un poil plus de physique que de calcul.

Physiquement, on obtient l'équation $m\gamma^3 \ddot{x} + Kx = 0$, l'inertie de l'objet doit prendre en compte un facteur correctif γ^3 , donc plus l'objet va vite plus il est inerte et plus c'est difficile de le faire accélérer davantage. C'est encore plus flagrant que dans l'expression de l'énergie cinétique puisqu'ici le facteur de Lorentz a un exposant 3. L'inertie de l'objet tend donc très vite vers l'infini quand sa vitesse tend vers c , on se doute bien qu'il sera difficile d'aller plus vite.

Python on résout numériquement l'équation différentielle et on montre le portrait de phase. Les conditions initiales sont de la forme $(x_0 = 0, \dot{x}_0 = \alpha c)$ avec α variant de 0,5 à 0,99

- On voit bien que la vitesse limite est c
- L'effet est faible pour des vitesses jusqu'à environ $c/2$
- On a un oscillateur non linéaire, il y a donc de l'enrichissement spectral, perte d'isochronisme
- lien avec "les non-linéarités empêchent les système de diverger" la relativité donnera toujours une limite maximale à ne pas dépasser

Conclusion

Ouvertures possibles :

Commentaires pendant la prépa aux oraux

- Le référentiel pour l'effet Compton : le choix du réf barycentrique est important quand on cherche l'énergie minimale pour créer des particules, ça simplifie bien l'étude avec $\sum \vec{p} = \vec{p}$. Là ce n'est pas le cas, donc on peut s'en sortir.

Questions

Quelles sont les conditions pour obtenir un quadrivecteur ?

Quelles transformations subissent les quadrivecteurs ?

Comment démontre-t-on que la masse du photon est nulle ? Expérimentalement, quelle est la borne supérieure de sa masse ?

Différences notables relativiste/classique ?

Pourquoi veut-on absolument garder la conservation de l'énergie et de l'impulsion pour un système isolé ? Les symétries de translation/renversement dans le temps et espace existent encore en relativité.

Comment peut-on, par changement de référentiel, passer d'un champ E à un champ B ?

Dans quels cas le fait que la masse dans un problème relativiste soit γm plutôt que m est important ?

Pourquoi dans le quadrivecteur impulsion il faut écrire E/c et pas juste E ? par raison d'homogénéité, pour garder l'invariance de l'écriture du quadrivecteur par changement d'unité.

Y a-t-il l'équivalent relativiste du théorème de l'énergie cinétique classique ? Que représente la première composante du 4-vecteur force ?

Comment définit-on le référentiel du centre de masse ? Est-il toujours définissable à partir du barycentre des masses d'un système ? Quel est l'intérêt du référentiel du centre de masse ? Que se passe-t-il dans le référentiel du centre de masse lorsque l'on est exactement à l'énergie seuil ?

Comment obtenir le 4-vecteur impulsion dans un référentiel inertiel connaissant celui dans un autre ?

Qu'en est-il du tenseur associé au champ électromagnétique ?

Lors d'une réaction chimique, justifier le signe de la variation de masse déduite théoriquement.

Définition du quadri vecteur vitesse ? Mathématique qu'est ce qu'un quadrivecteur ? un quadri vecteur est un vecteur qui se transforme par transformation de Lorentz.

Importance du temps propre dans l'expression de la force du minkovski ? le temps dépend du référentiel donc on utilise le temps propre.

Définir le quadri vecteur force ? C'est quoi le petit f ? Pourquoi utiliser la force newtonienne dans ce PFD qui est censé être dans le cadre de la RR ? L'idée de prendre la force newtonienne dans le PFD RR vient des forces de lorentz qui doivent être identique en RR et en classique, cf BFR, Langlois

Définition du référentiel du centre de masse ? En quoi ça résout de le problème de se placer dans le (RCM) ? Le (RCM) est vraiment le seul où on peut avoir tous les produits

de vitesse nul donc on peut avoir $\geq$, dans un autre référentiel on aurait juste $>$.

Montrer qu'une particule qui a une vitesse égale à c a une masse nulle en utilisant $v = \frac{pc^2}{E}$. Comment fait on en pratique un accélérateur non linéaire? Dessiner/expliciter un accélérateur cyclotron? (champ B + champs E qui s'inverse. un cyclotron qui s'adapte est un synchro cyclotron).

Quelle relation/théorème fait le lien entre symétrie et invariance. Théorème de Noether

La 3eme loi de Newton est elle conservée en relativiste? Non, car la force change par changement de ref

Peut on faire de la dynamique du solide relativiste? Qu'est ce qu'un solide?

Notion de covariance? Loi pas vraiment invariante, c'est une invariance en forme donc on dit plutôt covariance

Expliquer à un étudiant la différence entre la cinématique et la dynamique. Cinématique = étude des variables du mouvement. Dynamique = étude de la cause du mouvement

Redémontrer la relation : $\gamma = \frac{dt}{d\tau}$. Invariant relativiste : $ds^2 = dx^2 - c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2$ dans le référentiel propre. En divisant par $d\tau$ on obtient la relation.

Comment justifier que p est un quadrivecteur si v en est un? Où cela est-il posé dans la théorie? Il faut préciser que m est invariant. On a l'invariant relativiste, on sait que la norme relativiste est un invariant. Donc si on a montré que P se transforme comme un invariant alors $P^2 = m^2 c^2$ invariant et c^2 invariant donc m est invariant.

$E = \gamma mc^2$ invariant? L'énergie n'est pas un invariant, l'énergie au repos lui est bien un invariant. (si on fait un développement de Taylor de E , c'est l'ordre 0). Tous les ordres suivants représentent l'énergie cinétiques.

Pas conservation de la masse, nom des collisions? Cas de la combustion, mesurable? Collisions inélastique, pas mesurable dans le cas classique. Cependant, il faut bien préciser qu'il existe des exemples dans lesquels on peut mesurer que la masse n'est pas conservée (mais on n'est pas probablement plus dans les cas "classiques")

Théorème de l'énergie cinétique démontré? On différencie $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, $2E \frac{dE}{dt} = 2c^2 p \frac{dp}{dt}$, soit $\frac{dE}{dt} = c^2 / E \vec{p} \cdot \vec{f} = \frac{\gamma c^2 m}{E} \vec{v} \cdot \vec{f}$. Or $E = \gamma mc^2$, donc OK.

Loi de conservation = conséquence de loi fondamentale. Montrer que système isolé implique p constant? système isolé = $\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{0}$

Expression de la quadri-vitesse pour un photon? $E\gamma = pc$. On impose deux choses aux photons, la masse nulle et cette relation qui est la relation de Planck. Conséquence, pour un photon, son impulsion est $\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{u}$ et donc on trouve une norme du quadri-vecteur impulsion nulle pour le photon, cohérent avec la masse nulle.

Interprétation de la longueur d'onde Compton? C'est la longueur d'onde telle que l'énergie du photon incident est égale à l'énergie de repos de l'électron. On peut retrouver ce résultat avec la partie temporelle de la conservation du quadri-vecteur impulsion.

Comment peut on interpréter γv ? C'est la masse inertielle, elle augmente avec la vitesse. Plus on l'accélère, plus c'est dur de l'accélérer, et finalement on ne peut jamais atteindre la vitesse de la lumière. Attention, la masse inertielle dépend de la force que l'on considère

en relativité (pour un oscillateur harmonique la masse est en γ^3)
C'est quoi un pion ? Il est chargé ou pas ici ?