

LP00 – Titre

29 juin 2020

Laura Guislain & Pascal Wang

Niveau :

Commentaires du jury

Bibliographie

✍ *Le nom du livre, l'auteur*¹

→ Expliciter si besoin l'intérêt du livre dans la leçon et pour quelles parties il est utile.

Prérequis

➤ Cinématique relativiste

Expériences

☞ Biréfringence du quartz

Table des matières

1	De la dynamique classique à la dynamique relativiste	3
1.1	Quadrivecteur impulsion-énergie	3
1.2	Le cas du photon	4
1.3	Quadrivecteur force et lois fondamentales relativistes	5
2	Collisions	5
2.1	Collision élastique : l'effet Compton	6
2.2	Collision inélastique : énergie de seuil	6
3	Mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique	8
3.1	Dans un champ électrique constant	8
3.2	Dans un champ magnétique constant	9
3.3	Accélérateurs de particules	10

Préparation

Biblio : ma fiche, [le poly de Raymond est une bonne ressource en ligne](#), Langlois, Hladlik, Semay, BFR, Les accélérateurs de Particules, Daniel Boussand.

Préparation : bétonner les accélérateurs, on peut traduire les données de Bertozzi sur un graphe python fait maison si on se sent chaud.

Plan : En 30 min, on peut faire I/1)4-vecteur énergie impulsion 2) diffusion compton 3) énergie de seuil sur diapo si le temps le permet, mais vaut mieux parler d'accélérateurs ? II) 1) force, PFD 2) Bertozzi 3) accélérateurs circulaires

Présentation : Faire un des deux calculs en entier pour les collisions, être beaucoup plus rapide sur l'autre.

Questions : accélérateur, modèle standard, pion, un kaon, un méson et une particule λ_0 ?

Commentaire : Pour ce qui est de l'étude des collisions, ne pas hésiter à montrer des courbes expérimentales pour rappeler que ce que l'on expose a été ou est encore effectivement étudié dans des laboratoires de physique. On n'est pas obligé de faire tout le calcul de l'énergie de seuil de réaction, il est préférable d'insister sur les lois de conservation que l'on utilise, de faire un bilan inconnues/équation et de donner quelques résultats intermédiaires avant de discuter le résultat final.

Introduction

✎ BFR p252

Prérequis de cinématique relativiste Dans le cours précédent sur la cinématique relativiste, nous avons vu précédemment que la transformation de Lorentz était adaptée pour décrire le changement de référentiel galiléen en relativité restreinte. On a introduit la notion de quadrivecteur, qui est un objet invariant par transformation de Lorentz. On a vu des quadrivecteurs cinétiques comme le quadrivecteur vitesse et accélération.

Objectif Maintenant, on va essayer de prendre en compte les forces pour trouver les lois fondamentales de la dynamique relativiste, en particulier une nouvelle formulation :

- du principe fondamental de la dynamique invariant par transformée de Lorentz.
- théorème de l'énergie cinétique

Elles doivent satisfaire deux conditions :

- être invariantes par transformation de Lorentz, qui est une contrainte théorique des postulats de la RR
- redonner les lois de la mécanique classique dans le cas de particules animées de faible vitesse, qui est une contrainte expérimentale, pour retrouver les mesures effectuées à basse vitesse

On va voir comment intégrer la dimension temporelle.

Problématique Comment exprimer les lois fondamentales de la dynamique relativiste ? Quelles lois de conservations sont respectées ? Comment permettent-elles d'interpréter les collisions entre particules et le mouvement de particules chargées dans un champ électrique et magnétique ?

1 De la dynamique classique à la dynamique relativiste

1.1 Quadrivecteur impulsion-énergie

✎ Langlois p60

Homogénéité de l'espace temps En mécanique Newtonienne, on avait vu que pour un espace et un temps homogènes, les lois fondamentales de conservation de l'énergie et de l'impulsion sont vérifiées. En RR, l'espace-temps est homogène. En mécanique classique, on a vu que cela conduit à la conservation de l'énergie et l'impulsion. Quel sont donc l'énergie et l'impulsion qui sont conservées ?

4-vecteur impulsion On peut alors construire un quadrivecteur impulsion en multipliant le quadrivecteur vitesse par la masse m de la particule qui est un scalaire invariant par transformation de Lorentz. On obtient alors un autre quadri-vecteur (l'objet par excellence de la RR) *un quadrivecteur se transforme avec les transformations de Lorentz pour passer dans un autre référentiel* :

$$\tilde{P} = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) \quad (1)$$

Ici, on postule la forme de l'impulsion et l'énergie. On peut le démontrer en partant de l'action de la particule libre $\int_a^b ds$ et en utilisant le théorème de Noether.

Interprétation On reconnaît l'impulsion de la particule $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, corrigée d'un facteur γ par rapport au cas classique. A quoi correspond la composante temporelle de $\tilde{P}$? Dans la limite newtonienne $v \ll c$, on peut faire le développement limité :

$$\gamma mc = mc \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \simeq mc \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \quad (2)$$

En multipliant par c , on obtient :

$$\gamma mc^2 \simeq mc^2 + m \frac{v^2}{2} \quad (3)$$

On reconnaît l'énergie cinétique classique mv^2 de la particule, γmc^2 est donc homogène à une énergie et on admet que c'est l'énergie totale de la particule qu'on note E . On peut alors réécrire le quadrivecteur $\tilde{P}$:

$$\tilde{P} = (\vec{p}, E/c) \quad (4)$$

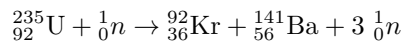
D'où son nom quadrivecteur énergie-impulsion.

Energie de repos L'autre terme de l'énergie est mc^2 , constante de v . Si les énergies sont toujours définies à une constante additive près en mécanique classique, il n'en est pas de même en relativité. On ne saurait en effet ajouter une constante arbitraire à la composante temporelle d'un 4-vecteur en conservant une forme correcte pour les lois de changement de référentiel. La constante additive qui, ci-dessus, représente l'énergie mécanique d'une particule au repos :

$$\mathcal{E}_0 = mc^2$$

doit donc avoir une signification physique. Si une masse au repos possède de l'énergie, cela indique qu'on peut, au moins sur un plan de pur bilan d'énergie, transformer une certaine quantité de masse en énergie ou une certaine quantité d'énergie en masse. Les applications les plus spectaculaires de ces conversions sont les créations et annihilations de particules élémentaires. Quand deux antiparticules s'annihilent en émettant de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique, on a une conversion totale d'une certaine quantité de masse en énergie. Le phénomène réciproque, la création d'une paire particule/antiparticule à partir d'un rayonnement suffisamment énergétique.

Energie de masse/repos, application à l'énergie nucléaire Pour des particules au repos ($\vec{p} = \vec{0}$), on a l'énergie au repos de la particule : $E_{\text{repos}} = mc^2$ qui est l'équivalence masse-énergie ! **ODG**: électron 511 keV, proton 938 MeV, neutron 940 MeV. On illustre la notion d'énergie de masse peut être illustrée, avec le défaut de masse des noyaux atomiques. Dans une réaction de fission d'uranium (induite par capture de neutron) :



ODG: 200 MeV par réaction. On récupère autant d'énergie avec 1 tonne de pétrole qu'avec 2g d'uranium. En effet, les réactions chimiques mettent en jeu des énergies de l'ordre du eV, d'où un facteur 10^6 . L'énergie de fission Q_f est libérée sous forme d'énergie cinétique pour les produits. Elle peut être récupérée sous forme de chaleur.

Pseudo-norme de $\tilde{P}$ $\ntriangleleft$ BFR p257

Ni l'impulsion ni l'énergie ne sont invariants par changement de référentiel. Mais la pseudo-norme de $\tilde{P}$ est invariante et vaut, en rappelant la convention de signature (+,-,-,-) pour la métrique :

$$\tilde{P}^2 = -\vec{p}^2 + E^2/c^2 = m^2(\gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2) = m^2 c^2 > 0 \quad (5)$$

C'est un quadri-vecteur de genre temps. On obtient alors une autre expression de l'énergie, c'est la célèbre formule d'Einstein. *On pourrait commenter le fait qu'on pourrait avoir des énergies négatives, qui correspondent aux anti-particules.* $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ **ODG**: au LHC, les protons peuvent être accéléré jusque 7 TeV dans le référentiel du laboratoire. *L'énergie totale de deux protons incidents sera ainsi de 14 TeV*

Energie cinétique Ainsi, de manière générale, on pose $T = mc^2(\gamma - 1)$, l'énergie cinétique de la particule et on retrouve : $E = T + E_{\text{repos}}$.

Non-conservation de la masse $\ntriangleleft$ BFR p262

En relativité restreinte, on n'a plus conservation de la masse, seulement conservation de l'énergie du fait de cette équivalence masse-énergie. Par exemple, combustion du dihydrogène : $\Delta E = -241 \text{ J mol}^{-1}$, donc $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = -2,68 \cdot 10^{-12} \text{ kg/mol}$. Soit pour une mole d'eau formée ($m=18\text{g}$), on a $\frac{\Delta m}{m} \simeq 10^{-10}$. Cette variation est trop faible pour être mesurée, c'est pourquoi en pratique on considère quand même la conservation de la masse comme vérifiée. *Si on veut aller plus vite, on dit qu'une réaction chimique met en jeu les électrons donc l'énergie typique est de l'ordre de l'eV, soit $m \sim 10^{-36} \text{ kg} \sim 10^{-9} m_{\text{atome}}$ donc on ne peut pas mesurer la différence avec les balances de laboratoire de chimie.*

1.2 Le cas du photon

Avec les résultats de mécanique quantique, on a $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = (h\nu)^2$ avec $p = h/\lambda$ donc le photon a une masse nulle ! **ODG**: Expérimentalement, la borne supérieure de sa masse est 10^{-54} kg . On peut quand même exprimer son quadri-vecteur impulsion $\tilde{P} = (\frac{E}{c}, \frac{E}{c} \vec{n})$, où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire dans la direction de propagation du photon. *Commenter la subtilité du passage à la limite $m \rightarrow 0$*

Bonus : masse de photons Deux photons peuvent-ils avoir une masse ? Oui, s'ils vont en sens opposé, le quadri-vecteur somme n'est pas de pseudo-norme nulle.

| Maintenant que l'on sait calculer un quadri-vecteur énergie-impulsion, intéressons-nous à la force.



1.3 Quadrivecteur force et lois fondamentales relativistes

⚡ Langlois et BFR p265

Définition de 4-vecteur force Par analogie avec la mécanique newtonienne $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$, on définit le quadrivecteur force $\tilde{F}$ tel que, dans un référentiel d'inertie R_0 , on a :

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tau} = \tilde{F} \quad (6)$$

On note que dans cette égalité, les grandeurs τ , $\tilde{P}$ sont invariants de Lorentz, ce qui est nécessaire à la formulation relativiste du PFD.

Expression des composantes de la 4-force On fait le lien avec la force tridimensionnelle $\vec{f}$ dans un référentiel inertiel quelconque R , définie par $\vec{f} \equiv d\vec{p}/dt$. *Pourquoi utiliser la force newtonienne dans ce PFD qui est censé être dans le cadre de la RR ? L'idée de faire apparaître la force newtonienne dans le PFD RR vient des forces de lorentz qui doivent être identique en RR et en classique.*

$$\tilde{F} = \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}, \frac{dE/c}{d\tau} \right) \quad (7)$$

$$= \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) \quad (8)$$

$$= \left(\gamma \vec{f}, \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt} \right) \quad (9)$$

Facteur de Lorentz instantané On note qu'ici, $\gamma(\vec{v})$ est le facteur de Lorentz instantané, qui dépend de la vitesse instantanée de la particule. En général, sa valeur varie au cours du temps, contrairement au facteur de Lorentz du boost de Lorentz qui dépend de la vitesse relative entre deux référentiels inertiels, vitesse nécessairement constante.

On différencie $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, $2E \frac{dE}{dt} = 2c^2 p \frac{dp}{dt}$ soit $\frac{dE}{dt} = \frac{c^2}{E} \vec{p} \cdot \vec{f} = \frac{\gamma c^2 m}{E} \vec{v} \cdot \vec{f}$. Or $E = \gamma m c^2$ On peut donc écrire :

$$\tilde{F} = \left(\gamma \vec{f}, \frac{\gamma}{c} \vec{f} \cdot \vec{v} \right) \quad (10)$$

Partie spatiale du PFD relativiste Ainsi, la partie spatiale du quadrivecteur force donne le PFD relativiste.

⚡ Hladik p139 : accélération et force pas forcément colinéaire.

Partie temporelle du PFD relativiste La partie temporelle le théorème de l'énergie cinétique relativiste.

Limite classique Dans le cas où $v \ll c$, $\gamma \rightarrow 1$ donc on retrouve le PFD et le TEC classiques.



On a effectué un développement formel par analogie avec la mécanique classique. Voyons si c'est confirmé par l'expérience. On commence par l'étude des chocs en relativité.

2 Collisions

⚡ Langlois

Collision On dit que deux particules entrent en collision lorsqu'elles subissent une variation de vitesse dans une zone quasi ponctuelle de l'espace et du temps. On distingue deux types de collisions :

- collision élastique si le nombre et la nature des particules sont conservés
- inélastique sinon

Hypothèse/conconservation Pendant la durée très brève d'un choc, le système pourra être considéré comme isolé. Donc conservation de l'énergie et de quantité de mouvement, comme en physique classique.

Bonus : limite de la conservation de l'impulsion Pour un ensemble de particules matérielles sans interaction, l'impulsion globale du système est simplement la somme des impulsions individuelles. Pour des particules en interaction (en particulier électromagnétique), la situation est moins simple. L'interaction, qui ne peut être instantanée, doit en effet être véhiculée par un champ. Ce champ, possédant une énergie, doit aussi posséder une quantité de mouvement et entrer dans le bilan de l'impulsion globale. L'analyse détaillée de la conservation de l'impulsion dans une telle situation

est alors difficile.

Bonus : impulsion, champ électromagnétique, renormalisation Si les particules sont chargées, un champ électromagnétique est associé à chaque particule avant et après la collision. Ce champ doit entrer en toute rigueur dans le bilan d'impulsion. En fait, quand on mesure la masse ou l'impulsion d'une particule chargée, on ne le fait jamais indépendamment du champ qui accompagne cette particule. La masse que nous mettons dans l'impulsion est donc une masse "habillée", qui englobe effectivement la contribution du champ à l'inertie de la particule. Nous n'aurons donc effectivement pas à tenir compte des champs des particules libres dans notre bilan d'impulsion. Notons qu'avec une particule chargée ponctuelle, la différence entre la masse "nue" et la masse "habillée" de la particule est évidemment infinie. Ce n'est qu'au prix d'un calcul complètement quantique mené avec les techniques de renormalisation qu'on peut définir proprement la masse "habillée" de la particule.

2.1 Collision élastique : l'effet Compton

⚡ Langlois p65

Mise en évidence expérimentale En 1923, Compton irradie du graphite avec des rayons X **ODG**: $\lambda \sim 7 \cdot 10^{-11} m$. Cela correspond à la collision élastique : **Montrer un schéma, pour définir l'angle θ**

$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^- \quad (11)$$

Avec un spectromètre, il observe deux raies spectrales : une correspondant à la longueur d'onde du rayonnement incident et l'autre dont l'écart à la première est fonction de l'angle de diffusion. L'électron emportant de l'énergie cinétique, le photon perd nécessairement de l'énergie : sa longueur d'onde augmente. Compton mesure $\lambda' - \lambda = 2.5(pm)(1 - \cos \theta)$.

Longueur d'onde Compton Comment trouver $\lambda_c = 2.5pm$. Dimensionnellement, la longueur d'onde Compton est la longueur d'onde qui correspond à l'énergie de masse de l'électron. $hc/\lambda_c = m_e c^2$ soit $\lambda_c = h/m_e c = 2.5pm$. C'est bien la longueur d'onde mesurée ! La "petite" valeur numérique de cette quantité fait que l'effet n'est notable que pour des photons incidents de courte longueur d'onde, c'est-à-dire de très haute énergie. Pour des photons visibles, par exemple, la modification de fréquence due au recul de l'électron est tout à fait négligeable. *La longueur d'onde de Compton peut être considérée comme une limitation fondamentale à la mesure de la position d'une particule, tenant compte de la mécanique quantique et de la relativité restreinte. Ceci dépend de la masse m de la particule. Pour voir cela, l'on peut mesurer la position d'une particule en envoyant de la lumière dessus - mais mesurer la position avec précision nécessite une lumière de courte longueur d'onde. La lumière avec une faible longueur d'onde est composée de photons d'énergie élevée. Si l'énergie de ces photons excède mc^2 , lorsque l'un d'eux percute la particule dont la position est connue, la collision peut dégager assez d'énergie pour créer une nouvelle particule du même type. Ceci rend discutable la question sur la position initiale de la particule. La longueur d'onde de Compton est la limite en dessous de laquelle la théorie quantique des champs - qui permet de décrire la création et l'annihilation de particules - devient importante.*

Calcul de la longueur d'onde du photon diffusé ⚡ Langlois p66, fiche manuscrite. Le formalisme relativiste permet de traiter de la même façon les particules massives et les particules de masse nulle puisqu'on a vu dans la première partie qu'on peut associer une quadri-impulsion, que la particule ait une masse ou non. Dans le référentiel du laboratoire, l'électron est initialement au repos. Sans restreindre la généralité, le photon de fréquence ν et d'énergie $h\nu$ est incident dans la direction de l'axe Ox . Après la collision, l'électron et le photon sont diffusés dans des directions qui dépendent des détails de l'interaction. Toujours sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que les trajectoires finales de l'électron et du photon sont dans le plan Oxy . L'objectif est de calculer l'énergie du photon en fonction de l'angle de diffusion.

Commentaires L'expérience de Compton constitue une vérification des relations relativistes.

↓ *Et les collisions inélastiques ?*

2.2 Collision inélastique : énergie de seuil

⚡ Langlois p73-75, BFR p277

Dans cette partie, il faut insister sur l'utilité du référentiel du centre de masse.

Non-conservation de la masse On insiste, la masse n'est pas conservée dans ces collisions.

Cas où la masse des particules finales est inférieure à la masse des particules initiales C'est le principe de la fission nucléaire, où la masse des particules finales est inférieure à la masse des particules initiales, ce qui signifie que le défaut de masse correspond à de l'énergie, en l'occurrence l'énergie de liaison des nucléons, suivant la relation $\Delta E = \Delta mc^2$ qui peut ensuite être récupérée et utilisée pour produire de l'énergie électrique (**ODG**: l'énergie de liaison moyenne rapportée à un nucléon est de l'ordre de 8MeV).

Cas où la masse des particules finales est inférieure à la masse des particules initiales Une interaction impliquant plusieurs particules initiales dont la somme des masses est *inférieure* à la somme des masses finales peut se produire, à condition de compenser le déficit de masse par un apport suffisant d'énergie cinétique, se traduisant par une vitesse relative entre particules initiales et finales.

Exemple : collision proton/proton On considère la création d'une paire proton/antiproton par collision de deux protons. la collision entre deux protons, observée dans les rayons cosmiques et reproduite au CERN. L'équation de la réaction s'écrit :

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$$

Critère de réaction et référentiel du centre de masse L'énergie minimale pour que cette réaction puisse se produire correspond à une situation où toutes les particules finales seraient au repos. Elle est donc définie dans un référentiel où la quantité de mouvement totale est nulle. Pour établir un critère de réaction, on se place donc dans le référentiel du centre de masse, noté $\mathcal{R}_{CM}$, qui est le référentiel galiléen pour lequel l'impulsion totale (initiale comme finale par conservation de l'impulsion) est nulle. *Ce n'est pas le barycentre des masses car le photon est de masse nulle mais d'impulsion non nulle!!!*. Ainsi dans $\mathcal{R}_{CM}$:

$$\vec{p}_{CM} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_f \vec{p}_f = \vec{0}$$

On note E_{CM} l'énergie des particules dans $\mathcal{R}_{CM}$. Elle est aussi conservée :

$$E_{CM} = \sum_i E_i = \sum_i \sqrt{m_i^2 c^4 + \vec{p}_i^2 c^2} = \sum_f E_f = \sum_f \sqrt{m_f^2 c^4 + \vec{p}_f^2 c^2}$$

Pour que la réaction puisse se produire, il faut que l'énergie cinétique des produits puisse être positive $T_f = E_{CM} - E_{masse,f} \geq 0$, *i.e.* l'énergie totale des produits soit supérieure à l'énergie au repos des produits. ceci se traduit donc par, m étant la masse d'un proton (et d'un anti-proton) :

$$E_{CM} \geq \sum_f m_f c^2 = 4mc^2 \quad (12)$$

L'intérêt du référentiel du centre de masse est que c'est le seul référentiel où toutes les particules finales peuvent avoir une vitesse nulle, puisque c'est le référentiel où l'impulsion totale est nulle. C'est donc important d'écrire le critère de réaction dans $\mathcal{R}_{CM}$. On généralise en remarquant que E_{CM}^2/c^2 est le carré scalaire s^2 de la quadri-impulsion totale, quantité conservée lors de la réaction et lors d'un changement de référentiel.

$$s^2 = \left(\sum_i \tilde{P}_i\right)^2 = \left(\sum_f \tilde{P}_f\right)^2 = E_{CM}^2/c^2 - \vec{p}_{CM}^2 = E_{CM}^2/c^2 \geq (4mc)^2 \quad (13)$$

Energie de seuil dans le référentiel barycentrique Dans $\mathcal{R}_{CM}$, l'énergie minimale est donc $4mc^2$ (les particules et les antiparticules ont même masse m). Dans ce référentiel, les deux protons incidents ont initialement des énergies égales et des quantités de mouvement opposées. L'énergie de chacun doit donc être $2mc^2$ et son énergie cinétique mc^2 . Le seuil de réaction, dans le référentiel barycentrique, est donc de mc^2 pour chaque particule résultat assez intuitif. Le problème est que l'énergie à fournir effectivement est celle définie dans le référentiel du laboratoire, qui ne coïncide pas nécessairement avec le référentiel du centre de masse. Ce n'est que dans le cas des anneaux de collision (LEP pour les collisions électron/électron, par exemple), que les deux projectiles sont de quantités de mouvement opposées et que le référentiel du laboratoire est aussi celui du centre de masse.

Bonus : calcul de l'énergie de seuil Dans beaucoup d'expériences, plus anciennes, un seul des protons est en mouvement (le projectile) et l'autre (la cible) est immobile. On peut estimer le seuil de réaction dans ce cas. On revient de le référentiel du laboratoire, $\mathcal{R}$, où on suppose qu'un des protons est immobile et que l'autre a une impulsion $\vec{p}$ et une énergie cinétique associée T . On peut donc écrire dans $\mathcal{R}$ le quadri-vecteur impulsion :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \frac{1}{c}(mc^2 + T + mc^2) \end{pmatrix} \quad (14)$$

m étant la masse d'un proton (et d'un anti-proton), T l'énergie cinétique du proton en mouvement.

On écrit le critère de réaction, en utilisant l'invariance de la pseudo-norme de la quadri-impulsion par le changement de référentiel :

$$s^2 = \frac{E_{CM}^2}{c^2} = -p^2 + \frac{1}{c^2}(mc^2 + T + mc^2)^2 \geq (4mc)^2 \quad (15)$$

D'où

$$-c^2p^2 + (mc^2 + T + mc^2)^2 \geq (4mc^2)^2 \quad (16)$$

i.e.

$$-c^2p^2 + (mc^2 + T)^2 + 2(mc^2 + T)mc^2 + m^2c^4 \geq (4mc^2)^2 \quad (17)$$

soit, en remarquant que l'énergie du proton incident en mouvement est $E_i = T + mc^2 = m^2c^4 + p^2c^2$:

$$-c^2p^2 + 2m^2c^4 + p^2c^2 + 2(mc^2 + T)mc^2 \geq (4m)^2c^4 \quad (18)$$

Donc

$$T \geq \frac{(4m)^2 - 4m^2}{2m}c^2 \quad (19)$$

Soit

$$T \geq 6mc^2 \quad (20)$$

AN Avec $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg et $c = 2.99 \text{ m s}^{-1}$, on obtient

$$T \geq 5.6 \text{ GeV} \quad (21)$$

Ceci ne signifie pas nécessairement que la réaction se produise effectivement. Des règles de sélection quantiques ou une section efficace insuffisante peuvent faire que les produits ne soient jamais observés.

Application découverte de l'antiproton en 1955 par Segrè et Chamberlain sur le synchrotron de 6 GeV à Berkeley.

Comparaison : cible fixe et double collision Pour une cible fixe, au lieu d'une énergie cinétique par particule de mc^2 pour le cas où les deux particules ont des vitesses opposés, on a besoin d'une énergie 6 fois plus grande. Avec une puissance donnée d'accélérateur, il est donc, de beaucoup, préférable de travailler avec des collisions entre deux particules en mouvement. Ceci explique que pratiquement toutes les grandes machines sont maintenant des anneaux de collision. Le prix à payer est que la densité du faisceau est très petite devant celle d'une cible solide : le taux de collisions est beaucoup moins grand que ce qu'on obtient en envoyant un faisceau unique sur une cible fixe.

Application (bis, bonus) Coupure GZK ⚡ Langlois

Il faut donc de atteindre de très grandes énergies pour obtenir des anti-protons par collisions. Ce type de bilans est très utile pour calculer des énergies de liaison, le poids de particules, etc. Comment atteindre une vitesse suffisante expérimentalement ?

3 Mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique

Précision du référentiel On considère une particule de masse m et de charge q d'abord dans un champ électrique constant $\vec{E}$ puis dans un champ magnétique constant $\vec{B}$.

Expression de la force de Lorentz On admet que la force tridimensionnelle de Lorentz est la même expression qu'en classique : $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Cela vient en fait de l'hypothèse de couplage minimal : le Lagrangien le plus simple est $L_{int} = -q \int A_\mu \dot{x}^\mu$.

3.1 Dans un champ électrique constant

⚡ Raymond, Hladik pp142-143

Problème La RR prédit que c est la vitesse limite de toute particule. Que se passe-t-il si on accélère une particule chargée dans un champ électrique uniforme ? Classiquement, la vitesse de la particule tend vers l'infini. Que dit la RR ? On applique le PFD à la particule dans le référentiel du laboratoire galiléen, où règne un champ électrique $\vec{E}$ uniforme :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} \quad (22)$$

Si l'axe Ox coïncide avec la direction de $\vec{\mathcal{E}}$ et on se place dans le cas où la vitesse initiale de la particule est nulle, on a la relation :

$$\frac{dp_x}{dt} = q\mathcal{E} \quad (23)$$

On obtient donc

$$p_x(t) = q\mathcal{E}t \quad (24)$$

Or, comme on l'a vu en début de cette leçon, $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ et $E = \gamma mc^2$ avec $E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$, donc $\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}}$, et alors :

$$v_x(t) = \frac{qc\mathcal{E}t}{\sqrt{m^2 c^2 + (q\mathcal{E}t)^2}} \quad (25)$$

Bonus : trajectoire horaire Nous poserons, pour alléger les notations, $V = qEt/m$ (notons que V serait la vitesse de la particule si nous ne tenions pas compte des corrections relativistes au mouvement). On déduit alors de ce qui précède :

$$\dot{x} = \frac{V}{\sqrt{1 + V^2/c^2}}$$

qui s'intègre aisément, en séparant les variations, et en reconnaissant une intégrale de la forme $\int u'/u^{1/2}$:

$$x = \frac{mc^2}{qE} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc} \right)^2} - 1 \right]$$

à condition de prendre $x = 0$ comme condition initiale. Pour des temps suffisamment petits, la vitesse de la particule est faible et on peut développer l'expression précédente au premier ordre en qEt/mc . On trouve alors

$$x = \frac{1}{2m} qEt^2$$

mouvement uniformément accéléré de la dynamique classique. Aux temps longs, en revanche, x tend simplement vers ct : la vitesse de la particule tend vers la vitesse de la lumière, comme nous pouvions nous y attendre.

Limite classique On retrouve $v_x(t) = \frac{q\mathcal{E}t}{m}$ qu'on obtient avec la mécanique newtonienne.

Vitesse limite On retrouve que c est une vitesse limite. On constate que plus la vitesse augmente plus le terme γm augmente, or ce terme représente l'inertie de la particule donc plus la vitesse augmente et plus l'inertie augmente et plus il est difficile d'accélérer la particule.

Vérification expérimentale de Bertozzi  wikipedia. [On montre un schéma et une figure sur diaporama.](#) Ceci fut vérifié expérimentalement par Bertozzi en 1964. Il accélère des électrons avec dont la tension varie de 0,5 à 15 Mégavolts, couplé à un tube à vide : les électrons sont accélérés par paquets dans l'accélérateur, en sortent, puis parcourent le tube à vide sur 8,4 m de long, avant de percuter une cible en aluminium. Un anneau étant placé à la sortie de l'accélérateur, c'est-à-dire à l'entrée du tube à vide, on peut mesurer la différence de temps entre certains électrons du paquet qui frappent l'anneau d'entrée et ceux du même paquet qui arrivent jusqu'à la cible. Connaissant la distance parcourue (8,4 m), on est capable de mesurer directement la vitesse v des électrons d'un même paquet par temps de vol. *Il a mesuré l'énergie cinétique des électrons par calorimétrie, en mesurant l'élévation de température du bloc en aluminium.* Il mesure qu'en augmentant, U , la vitesse dévie de la prédiction classique $v^2 \propto U$ et sature à c .

↓ *Mais pour atteindre le plus hautes énergies, il faudrait construire des accélérateurs plus grands... ce qui n'est pas évident. On passe donc aux accélérateurs non linéaires, et c'est là qu'on peut faire intervenir le champ magnétique.*

3.2 Dans un champ magnétique constant

 Hladik p144

$\vec{B}$ constant pour ne pas engendrer de champ $\vec{E}$ (Maxwell-Ampère).

Application du PFD

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (26)$$

La force magnétique étant orthogonale à la vitesse, le travail de la force est nul : la particule est donc déviée, mais pas ralentie : v est constante. Donc

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\omega_C}{B} \vec{v} \times \vec{B} \quad (27)$$

Comme en classique (prérequis), on obtient une trajectoire d'hélice circulaire, mais la pulsation cyclotron dépend de la vitesse $\omega_C = \frac{qB}{\gamma(v)m}$, et on retrouve bien qu'elle est indépendante de v dans le cas des faibles vitesses.

Terme d'inertie parallèle, transverse (bonus) Le terme d'inertie d'une accélération dans le sens de la vitesse est en $\gamma^3 m$ alors que celui d'une accélération orthogonale à la vitesse est en γm . Une accélération dans le sens de la vitesse n'est donc pas identique d'un point de vue dynamique à une accélération orthogonale à la vitesse.

3.3 Accélérateurs de particules

[prendre des schémas] ↗ Hladik pp144-145 et Wikipedia

Principe Le principe est d'accélérer avec un champ électrique et de guider avec un champ magnétique pour qu'il repasse plusieurs fois dans le champ électrique accélérateur.

Cyclotron : Le premier date de 1932. On applique un champ B uniforme avec un champ E inversé périodiquement (à fréquence fixe) pour accélérer lorsque l'électron passe dans la "coupure". La trajectoire de la particule décrit une "spirale" (demi-cercle+rectiligne dans la coupure) et sort à haute vitesse du cyclotron. Difficulté de synchronisation du champ E à haute vitesse et d'avoir B uniforme sur une grande région. **ODG**: A la sortie, 600 MeV.

Synchrocyclotron : Un synchrocyclotron est un cyclotron dont la fréquence du champ électrique est changée (progressivement diminuée) pour compenser le gain d'inertie des particules accélérées, pour qu'elle ne sorte pas de l'appareil et que leur vitesse peut mieux approcher la vitesse de la lumière. The acceleration of particles takes place as they enter or leave the dee. Le synchrocyclotron permet d'atteindre des énergies de l'ordre de centaines de MeV. Comme la tension requise est plus faible que pour le cyclotron, il n'y a pas besoin de petite fente entre les deux dees. On peut utiliser qu'un seul dunt "D" sur deux.

- *avantages* : The chief advantage of the synchrocyclotron is that there is no need to restrict the number of revolutions executed by the ion before its exit. As such, the potential difference supplied between the dees can be much smaller. The smaller potential difference needed across the gap has the following uses : there is no need for a narrow gap between the dees as in the case of conventional cyclotron, because strong electric fields for producing large acceleration are not required. Thus only one dee can be used instead of two, the other end of the oscillating voltage supply being connected to earth. The magnetic pole pieces can be brought closer, thus making it possible to increase greatly the magnetic flux density.
- *Disadvantages* As a result of the variation in the frequency of the oscillating voltage supply, only a very small fraction of the ions leaving the source are captured in phase-stable orbits of maximum radius and energy with the result that the output beam current has a low duty cycle, and the average beam current is only a small fraction of the instantaneous beam current. Thus the machine produces high energy ions, though with comparatively low intensity.

Cyclotrons isochrones The next development step of the cyclotron concept, the isochronous cyclotron, maintains a constant RF driving frequency and compensates for relativistic effects by increasing the magnetic field B with radius. Isochronous cyclotrons are capable of producing much greater beam current than synchrocyclotrons. As a result, isochronous cyclotrons became more popular in the research field.

Synchrotron : A synchrotron is a particular type of cyclic particle accelerator, descended from the cyclotron, in which the accelerating particle beam travels around a fixed closed-loop path. The magnetic field which bends the particle beam into its closed path increases with time during the accelerating process, being synchronized to the increasing kinetic energy of the particles. In a synchrotron, this adaptation is done by variation of the magnetic field strength in time, rather than in space. A key aspect of injection, however, is that the electrons are injected in discrete pulses so that the electrons exist inside the storage ring as bunches, typically one or two hundred bunches distributed around the whole ring. This is essential for an effective action of another synchrotron component, a radio-frequency generator/cavity, of which there could be several around the ring. The purpose of this device is to synchronously (hence the name synchrotron) feed energy to the electron bunches circulating in the ring to compensate for their energy losses during their emission of radiation. This current of electron bunches slowly decays with time due to collisions between the electrons and any molecules contained within the ring; even with ultra-high vacuum conditions (typically 10^{-10} mbar) in the storage ring, the storage beam typically needs to be regenerated about every 24 hours. Exemple : LHC de 27 km de circonférence pour atteindre des énergies dans le référentiel de centre de masse de 14TeV.

Ordres de grandeur des énergies atteignables :

- basses énergies : de 10 à 100 MeV ;
- moyenne énergies : de 100 à 1 000 MeV ;

- hautes énergies : plus de 1 GeV et au-delà du TeV au CERN

Conclusion

Dans cette leçon, on a établi l'expression combinée du principe fondamentale de la dynamique et du théorème de l'énergie cinétique à l'aide des quadrivecteurs force et énergie-impulsion. Nous avons pu vérifié que ces expressions sont un prolongement du cas classique où $v \ll c$.

Boson de Higgs Aujourd'hui ces accélérateurs de particules ont permis la découverte de nombreuses particules, la dernière étant le boson de Higgs en 2012, qui permet d'expliquer la brisure de l'interaction unifiée électrofaible en deux interactions par l'intermédiaire du mécanisme de Brout-Englert-Higgs-Hagen-Guralnik-Kibble et d'expliquer ainsi pourquoi certaines particules ont une masse et d'autres n'en ont pas. Le boson de Higgs, quantum du champ de Higgs, confère une masse non nulle aux bosons de jauge de l'interaction faible (bosons W et boson Z), leur conférant des propriétés différentes de celles du boson de l'interaction électromagnétique, le photon.

Ouverture : Dynamique des champs EM, formulation covariante des équations de Maxwell.

Compléments/Questions

Effet Cherenkov L'effet Vavilov-Tcherenkov est un phénomène similaire à une onde de choc, produisant un flash de lumière lorsqu'une particule chargée se déplace dans un milieu diélectrique avec une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière dans ce milieu (la vitesse de la lumière dans le vide étant toujours supérieure à celle de la particule). C'est notamment cet effet qui provoque la luminosité bleutée de l'eau entourant le cœur d'un réacteur nucléaire.

Applications : On utilise l'effet Cherenkov pour déterminer la vitesse des particules qui le produisent en mesurant l'angle du cône et connaissant l'indice du milieu dans lequel ils voyagent. Cette technique est très efficace pour détecter les neutrinos dont les interactions avec la matière produisent les électrons susceptibles de produire la radiation Cherenkov. L'étude de cet effet a fallu le prix Nobel à Cherenkov, Tamm et Frank en 1958.

Les astronautes des missions Apollo s'étaient tous plaints de phosphènes lors de leurs missions. On découvrit que ces troubles visuels lumineux étaient dus à l'effet Tcherenkov de particules du vent solaire traversant le liquide des globes oculaires des astronautes.

Lien entre antiparticules et relativité ? Une version relativiste de l'équation de Schrödinger (pour les particules de spin nul) est l'équation de Klein Gordon, dont la relation de dispersion est $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$. Cette équation permet des solutions (spectre) à énergie négatives, qui peuvent être interprétées comme des antiparticules.

When quantum mechanics is extended to form quantum field theories the meaning becomes even more clear, because the "destruction" operators for each particle are also the creation operators for the anti-particles.

Thermodynamique relativiste Voir diu ? L'entropie est un invariant relativiste : il s'exprime comme le logarithme d'un nombre entier : le nombre de configurations (intuitif que c'est invariant). Argument d'analyse : $\exp(S)$ ne peut varier que par paliers entier et les transformations de la RR sont continues, pas possible de changer $\exp\{S\}$ donc S . Mais la température et le transfert thermique dépendent du référentiel (facteur γ).

Questions

- Montrer que le carré minkowskien du quadri-vecteur vitesse est constant.
- Comment fixer E et p pour un photon ? Il faut la mécanique ondulatoire/MQ. A partir de sa fréquence et $E = h\nu$.
- La force est un invariant galiléen ? Oui, mais que la 4-force.
- La force est un invariant Lorentzien ? La quadrivecteur oui, mais pas le vecteur force.
- Que deviennent les 3 lois de Newton en relativité ? Dans le référentiel de A, la partie spatiale de la 4-force est $\gamma \vec{f}$. Mais pour calculer la 4-force dans le référentiel de B, il faut faire changer de signe β et coupler la partie temps donc la partie spatiale de la 4-force sera différente de l'opposé.
- Comment montrer que le E défini est l'énergie du système ? Partie temporelle du PFD est un bilan de puissance.
- Comment on trouve l'expression de la 4-force de Lorentz ? Retracer les étapes. On doit retrouver la force de Lorentz à basse vitesse.
- Quelles sont les conditions pour obtenir un quadrivecteur ? Doit se transformer d'un référentiel R à un autre R' par une transformation de Lorentz. Son carré Minkowski est conservé.

- Qu'est-ce qu'un scalaire ? Grandeur conservée lors d'un changement de référentiel. s^2, τ par ex.
- Comment démontre-t-on que la masse du photon est nulle ? Expérimentalement, quelle est la borne supérieure de sa masse ? Voir la démo dans le Langlois. $10^{-54} kg$.
- Deux photons peuvent-ils avoir une masse ? Oui, s'ils vont en sens opposé, le quadrivecteur somme n'est pas de pseudo-norme nulle (cf. fiche).
- Pourquoi veut-on absolument garder la conservation de l'énergie et de l'impulsion pour un système isolé ? Symétries de translation/renversement dans le temps et espace existent encore en relativité. Théorème de Noether.
- Comment peut-on, par changement de référentiel, passer d'un champ E à un champ B ?
- Dans quels cas le fait que la masse dans un problème relativiste soit γm plutôt que m est important ? Si la particule accélère son "inertie" relativiste augmente c'est plus dur de l'accélérer donc cela borne sa vitesse.
- C'est quoi un pion ? Quelle charge ?
- Pourquoi se placer dans le référentiel du centre de masse ? L'énergie minimale est obtenue avec le cas énergie cinétique nulle dans le réf du centre de masse. C'est le seul référentiel où la borne est atteignable.
- Un proton relativiste cela existe ?
- Quasi-particules relativistes en matière condensée et le graphène ? (Bonus)
- Puis pourquoi j'avais dit que des GeV constituaient une énergie importante et comment l'expliquer à des élèves. Pourquoi dans le quadrivecteur impulsion il faut écrire E/c et pas juste E : par raison d'homogénéité, pour garder l'invariance de l'écriture du quadrivecteur par changement d'unité.
- Energie des particules dans les accélérateur ? 7 TeV au max.
- Synchrotron, cyclotron, synchrocyclotron ?
- Est-ce que thermodynamique et RR sont compatibles ? Voir le Diu.
- Définition du quadri vecteur vitesse ? Mathématique qu'est ce qu'un quadrivecteur ? UN quadri vecteur est un vecteur qui se transforme par transformation de Lorentz.
- Importance du temps propre dans l'expression de la force du minkovski ? Le temps dépend du référentiel donc on utilise le temps propre, scalaire invariant par transf. de Lorentz.
- Définir le quadri vecteur force ? C'est quoi le petit f ? Pourquoi utiliser la force newtonienne dans ce PFD qui est censé être dans le cadre de la RR ? (L'idée de prendre la force newtonienne dans le PFD RR vient des forces de lorentz qui doivent être identique en RR et en classique, cf BFR, Langlois)
- Définition du référentiel du centre de masse ? En quoi ça résout de le problème de se placer dans le (R CM) ? Pourquoi on la borne inférieure $\geq$. (Le (R CM) est vraiment le seul où on peut avoir tous les produits de vitesse nul donc on peut avoir $\geq$, dans un autre référentiel on aurait juste " $>$ ")
- Montrer qu'une particule qui a une vitesse égale à c a une masse nulle.
- Comment fait on en pratique un accélérateur non linéaire ? Dessiner/expliquer un accélérateur cyclotron ? (champ B + champs E qui s'inverse) (un cyclotron qui s'adapte est un synchro cyclotron).
- Autre collisionneur ? (synchrotron)
- Quelle relation/théorème fait le lien entre symétrie et invariance. (Théorème de Noether)
- La 3eme loi de Newton est elle conservée en relativiste ? (Non, car la force change par changement de ref) !
- Peut on faire de la dynamique du solide relativiste ? Qu'est ce qu'un solide ? Comment définit-on le référentiel du centre de masse ? Est-il toujours définissable à partir du barycentre des masses d'un système ?
- Quel est l'intérêt du référentiel du centre de masse ?
- Que se passe-t-il dans le référentiel du centre de masse lorsque l'on est exactement à l'énergie seuil ?
- Comment obtenir le 4-vecteur impulsion dans un référentiel inertiel connaissant celui dans un autre ? Qu'en est-il du tenseur associé au champ électromagnétique ?

- Lors d'une réaction chimique, justifier le signe de la variation de masse déduite théoriquement.
- **Oscillateur harmonique relativiste ?** Une des conséquences de la relativité dans ce modèle est que l'oscillateur devient non-isochrone : sa période acquiert des corrections relativistes par rapport à la période propre qui dépendent de l'amplitude du mouvement.
- Différence entre le seuil dans une collision sur cible fixe et le même seuil dans une collision symétrique.
- Pourquoi on gagne à remplacer l'hydrogène de la cible par un noyau plus lourd ? E_{seuil} diminue ?
- Qu'est-ce qu'un pion, un kaon, un méson et une particule λ_0 ?
- La notion de ressort, contact, solide en relativité restreinte n'ont plus de sens car ils impliquent des interactions instantanées. On peut formuler une hydrodynamique relativiste, au prix de grands efforts.
- Vous avez identifié/construit les quantités dynamiques en examinant la limite classique, comment sait-on si ce sont vraiment les bonnes quantités ; en particulier que répondriez-vous à un élève qui vous pose cette question ? Il faut comparer à l'expérience.
- Questions sur les technologies des accélérateurs.
- Comment peut-on, par changement de référentiel, passer d'un champ E à un champ B ?
- Est-ce que c'est facile de faire de la thermodynamique relativiste ? On n'a plus une distribution de Boltzmann, mais une modifiée ?
- Pourquoi c'est important d'accélérer des particules à très grande énergie, lien avec le principe d'indétermination de Heisenberg ?
- Signification physique de la longueur d'onde Compton ? La longueur d'onde de Compton peut être considérée comme une limitation fondamentale à la mesure de la position d'une particule, tenant compte de la mécanique quantique et de la relativité restreinte.  wikipedia.

Commentaires

- Bertozzi ? C'est bien de résoudre un PFD.
- Pour le photon, donner la version ondulatoire de son 4-impulsion et faire le lien avec l'effet Compton.
- On peut faire le problème de Kepler et la précession du périhélie. Pour mercure c'est un effet de RG.