

Leçon n°8 : Collisions en relativité restreinte : Application à l'étude des noyaux et des particules élémentaires. (1^{er} CU)

Introduction

*1. Dynamique relativiste

- 1.1. Quadrivecteur énergie impulsion
- 1.2. Quadrivecteur force
- 1.3. Particule de masse nulle : Le photon
- 1.4. Le référentiel du centre de masse

2. Chocs élastiques

- 2.1. Définition et propriétés générales
- *2.2. Effet Compton
- 2.3. Choc élastique de deux particules identiques, l'une en mouvement, l'autre immobile

3. Chocs inélastiques

- 3.1. Définition et propriétés générales
- 3.2. Energie de seuil
- 3.3. Désintégration d'une particule instable
- 3.4. Etude des noyaux

Conclusion

Introduction

Nous commencerons par poser les bases de la dynamique relativiste en nous appuyant sur les résultats obtenus en cinématique relativiste, préalable indispensable à l'étude des collisions.

Nous appliquerons les lois de conservation à l'étude des chocs élastiques et inélastiques des particules élémentaires et noyaux atomiques. Nous verrons enfin quelles sont les modifications apportées par la relativité restreinte par rapport au traitement classique.

*1. Dynamique relativiste

1.1. Quadrivecteur énergie impulsion

En cinématique relativiste, nous savons que le quadrivecteur vitesse d'une particule en mouvement à la vitesse $\mathbf{v}$ par rapport à un référentiel galiléen R est :

$$V = \gamma(c, \mathbf{v}) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Si m est la masse de la particule (dans R pour le moment), le quadrivecteur énergie impulsion P est défini par :

$$P = mV = m\gamma(c, \mathbf{v}).$$

Lorsque la vitesse de la particule est faible devant c , nous pouvons développer γ à l'ordre le plus bas en v/c et il vient :

$$\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}.$$

Le quadrivecteur énergie impulsion s'écrit alors :

$$P = \left(\frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \right), m\mathbf{v} \right).$$

La première composante de P est un terme d'énergie divisé par c . En plus de l'énergie cinétique de la particule, $mv^2/2$, il apparaît une énergie au repos, mc^2 . Les trois autres composantes de P sont celles de l'impulsion de la particule, dans l'espace ordinaire à trois dimensions.

C'est pourquoi nous postulons dans le cas général (v pouvant être proche de c) :

$$P = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right),$$

où E est l'énergie relativiste de la particule dans R et $\mathbf{p}$ sa quantité de mouvement relativiste. Ceci est simplement une interprétation de l'expression du quadrivecteur énergie impulsion, dont nous comprenons au passage la dénomination. Les expressions de E et $\mathbf{p}$ sont :

$$\boxed{\begin{matrix} E = \gamma mc^2 \\ \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} \end{matrix}} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

L'expression de l'énergie relativiste E peut se mettre sous la forme :

$$E = mc^2 + (\gamma - 1)mc^2.$$

L'énergie cinétique relativiste de la particule est alors définie de façon naturelle par :

$$E_C = (\gamma - 1)mc^2.$$

Voyons maintenant quelles sont les expressions de l'énergie E' et de l'impulsion $\mathbf{p}'$ de la particule dans son référentiel propre R' défini à l'instant t dans R . Nous supposons que les axes Ox et Ox' de R et R' sont parallèles. Par définition d'un quadrivecteur les composantes de P se transforment suivant la transformation spéciale de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - vp_x) \\ p'_x &= \gamma(p_x - vE/c^2) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \end{aligned}$$

Mais dans R' , $p'_x = p'_y = p'_z = 0$ puisque la particule est au repos. Donc :

$$p_x = vE/c^2 \quad \text{et} \quad E' = \gamma \left(E - \frac{v^2}{c^2} E \right).$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{matrix} E' = mc^2 \\ \mathbf{p}' = \mathbf{0} \end{matrix}}$$

Ce résultat était évident à partir des expressions générales de E et $\mathbf{p}$ lorsque R est le référentiel propre, et $v = 0$.

La pseudo-norme du quadrivecteur énergie impulsion est :

$$P^2 = P_i P_i = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{\gamma^2 m^2 c^4}{c^2} - \gamma^2 m^2 v^2 = m^2 c^2.$$

La masse m de la particule ainsi que son énergie propre E' ou énergie de masse ne dépendent pas du référentiel d'étude. Ce sont des invariants relativistes.

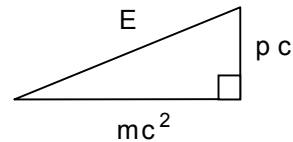
On donne la masse d'une particule en unité d'énergie divisée par c^2 ou en unité de masse atomique. Pour le proton, le neutron et l'électron.

	m_p	m_n	m_e
En MeV/c^2	938,28	939,57	0,5110
En u	1,007276	1,008665 u	$0,54858 \cdot 10^{-3}$

L'expression de la pseudo-norme du quadrivecteur énergie impulsion permet d'écrire la relation fondamentale de la dynamique :

$$\boxed{E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2},$$

que l'on représente graphiquement par un triangle rectangle :



Pour un système isolé de N particules il est possible de définir le quadrivecteur énergie impulsion de l'ensemble des particules par :

$$\boxed{P = \left(\frac{\sum_{i=1}^N E_i}{c}, \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \right)},$$

à condition qu'il n'existe aucune interaction entre ces particules. Dans le cas contraire, l'énergie E_i et l'impulsion $\mathbf{p}_i$ de la particule i ne seraient pas des constantes. Il faudrait alors sommer les énergies et les impulsions à un instant donné dans un référentiel galiléen R . Mais dans un autre référentiel galiléen R' , du fait de la non simultanéité des événements, les sommes ne seraient pas identiques.

1.2. Quadrivecteur force

Définissons le quadrivecteur force de la particule de masse m , dans un référentiel galiléen R par :

$$F = m \frac{dP}{dt'},$$

où dP est la variation élémentaire du quadrivecteur énergie impulsion pendant le temps propre dt' mesuré dans le référentiel propre de la particule. Le phénomène de dilatation du temps permet d'écrire :

$$F = \gamma \frac{dP}{dt} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

où t est le temps mesuré dans R . On en déduit :

$$F = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right).$$

Supposons que la vitesse v de la particule, dans R , soit faible devant c . À l'ordre le plus bas en v/c :

$$\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad \text{et} \quad E = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) mc^2,$$

puis :

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dv}{dt} v.$$

On voit que la dérivée de l'énergie par rapport au temps correspond à un terme de puissance. Les trois autres composantes de F sont celles de la force $\mathbf{f}$ multipliée par γ dans l'espace ordinaire à trois dimensions.

Dans le cadre général de la mécanique relativiste (v pouvant être proche de c), nous postulons que dans un référentiel galiléen R :

$$F = \gamma \left(\frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c}, \mathbf{f} \right)$$

avec :

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \frac{dE}{dt}.$$

Si la particule est isolée, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ entraîne la conservation du quadrivecteur énergie impulsion P . Pour un système de N particules isolées :

$$\sum_{i=1}^N E_i = \text{cte} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \text{cte}.$$

1.3. Le photon, particule de masse nulle

L'expérience d'Einstein sur l'effet photoélectrique a permis de montrer que le rayonnement monochromatique de fréquence ν est quantifié. Les particules élémentaires associées à cette quantification du champ électromagnétique sont les photons. Par ailleurs, d'après les lois de Maxwell, les ondes électromagnétiques se déplacent dans le vide à la vitesse de la lumière c . Ainsi, les photons ont une vitesse $v = c$ dans le vide. Dans ces conditions γ est infiniment grand et les composantes du quadrivecteur énergie impulsion du photon ne restent finies que si sa masse est nulle. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$E = pc.$$

Mais l'énergie E et l'impulsion p restent indéterminés par cette approche. Ce sont les travaux de Planck puis d'Einstein qui ont permis de définir l'énergie d'un photon par :

$$E = h\nu,$$

où ν est la fréquence du rayonnement électromagnétique et $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s la constante de Planck.

De ces deux dernières expressions de l'énergie on déduit la relation de De Broglie traduisant la dualité onde-corpuscule :

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

où $\lambda = c/\nu$ est la longueur d'onde du rayonnement. Cette relation établie pour le photon se généralise à toutes autres particules de masse non nulle.

Une autre façon d'écrire l'énergie et l'impulsion du photon est :

$$\boxed{E = \hbar \omega} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}},$$

où $\hbar = h/2\pi$ est la constante de Planck réduite, $\omega = 2\pi\nu$ la pulsation et $\mathbf{k}$ le vecteur d'onde de module $2\pi/\lambda$. Le quadrivecteur énergie impulsion se note :

$$P = \left(\frac{\hbar \omega}{c}, \hbar \mathbf{k} \right).$$

Sa pseudo-norme est :

$$P^2 = P_i P_i = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \hbar^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) = 0,$$

en accord avec le fait que la masse du photon est nulle.

1.4. Le référentiel du centre de masse

Considérons un système isolé de N particules indépendantes, en mouvement dans un référentiel galiléen R . Dans ce cas il est possible de définir la somme des énergies et la somme des impulsions des différentes particules dans R :

$$E = \sum_{i=1}^N E_i \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$$

et donc le quadrivecteur énergie impulsion du système.

Le référentiel du centre de masse de ce système est le référentiel R^* en translation par rapport à R , dans lequel l'impulsion du système est nulle :

$$\boxed{\mathbf{p}^* = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^* = \mathbf{0}}.$$

Le quadrivecteur énergie impulsion du système dans R^* s'écrit alors :

$$P^* = \left(\frac{E^*}{c}, \mathbf{0} \right),$$

où $E^* = \sum_{i=1}^N E_i^*$ est l'énergie du système dans R^* .

Rq : Le terme "centre de masse" peut prêter à confusion car des particules comme le photon n'ont pas de masse. Il est donc impossible de définir comme en mécanique classique, la position du centre de masse. Cette position sera définie par :

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N E_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^N E_i.$$

La transformation de Lorentz permet de passer de P à P^* . Appelons $\mathbf{u}$ la vitesse de R^* par rapport à R (parallèle à son axe Ox). Si $\mathbf{p}$ n'a qu'une composante suivant cet axe Ox , ce qui se produit effectivement dans les accélérateurs de particules, alors :

$$\begin{pmatrix} E^*/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta_u \gamma_u & 0 & 0 \\ -\beta_u \gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec :

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \text{et} \quad \beta_u = \frac{u}{c}.$$

On déduit la vitesse de R^* par rapport à R :

$$\mathbf{u} = \frac{c^2}{E} \mathbf{p},$$

qui est constante car E et $\mathbf{p}$ sont constants puisque le système est isolé. Le référentiel du centre de masse est donc galiléen.

On obtient également l'expression de l'énergie du système dans R^* :

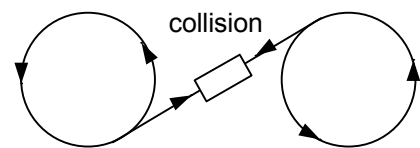
$$E^* = \frac{E}{\gamma_u}.$$

La valeur de cette énergie est inférieure à celle que l'on mesure dans R . On peut aussi écrire directement la pseudo-norme du quadrivecteur énergie impulsion du système :

$$\frac{E^*}{c^2} = \frac{E}{c^2} - \mathbf{p}^2.$$

On voit que l'énergie du système est minimum dans le référentiel du centre de masse.

Ceci a une application dans la collision de particules. Pour fournir le minimum d'énergie dans le référentiel du laboratoire R à deux particules entrant en collision, il faut s'arranger pour que R et R^* coïncident. Ceci est possible en utilisant des anneaux collisionneurs dont le principe est indiqué sur la figure. Dans ce cas les particules ont des vitesses opposées, et si $\mathbf{p} = \mathbf{u} = \mathbf{0}$ alors $E = E^*$.



2. Chocs élastiques

2.1. Définition et propriétés générales

Définition : Un choc entre particules est élastique si la nature et le nombre des particules avant la collision, sont conservés après la collision.

Considérons un système de N particules entrant en collision et supposons qu'avant et après la collision, les particules soient indépendantes les unes des autres. Elles suivent donc des trajectoires rectilignes à des vitesses uniformes. Pendant le choc, il y a interaction entre les particules et en toute rigueur il n'est pas possible de calculer la somme des énergies et des impulsions de ces particules. Nous allons alors supposer que la durée du choc est très courte, et que même si le quadrivecteur énergie impulsion n'est pas défini pendant ce temps, il se conserve avant et après le choc. Cela se traduit, dans un référentiel galiléen R , par :

$$P^{av} = P^{ap} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N (m_i c^2 + E_{Ci}^{av}) = \sum_{i=1}^N (m_i c^2 + E_{Ci}^{ap})$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^{av} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^{ap}$$

où E_{Ci} est l'énergie cinétique de la particule i . Nous en déduisons la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement du système :

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{i=1}^N E_{Ci}^{av} &= \sum_{i=1}^N E_{Ci}^{ap} \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^{av} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^{ap} \end{aligned}}$$

Rq : Très souvent, il est commode d'écrire la conservation du quadrivecteur énergie impulsion avant et après le choc, dans le référentiel du centre de masse R^* :

$$P^{*av} = P^{*ap},$$

car l'impulsion du système y est nulle.

*2.2. Effet Compton

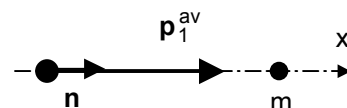
Nous voulons étudier la collision d'un photon de grande énergie et d'un électron immobile de masse m dans un référentiel galiléen R .

Dans l'expérience originale de Compton en 1922, les photons sont émis par un tube à rayons X, avec une longueur d'onde $\lambda = 0,71 \text{ \AA}$ correspondant à la raie K_α du molybdène. Ils possèdent donc une énergie $E = hc/\lambda = 17,5 \text{ keV}$. Ils entrent en collision avec les électrons de la couche externe des atomes d'une cible en graphite. Ceux-ci sont faiblement liés (quelques électrons-volt) et donc considérés comme libres. Compton détecta deux longueurs d'onde. La première, λ , correspondant au rayonnement incident, et la deuxième, λ' , supérieure à λ , dépendant de l'angle θ d'observation.

Déterminons λ' en fonction de l'angle de diffusion θ du photon après le choc.

▪ Avant le choc dans R

Si $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire porté par la direction du photon incident, et ν la fréquence de ce rayonnement, le quadrivecteur énergie impulsion du photon est :



$$\mathbf{P}_1^{av} = \left(\frac{E_1^{av}}{c}, \mathbf{p}_1^{av} \right) = \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c} \mathbf{n} \right),$$

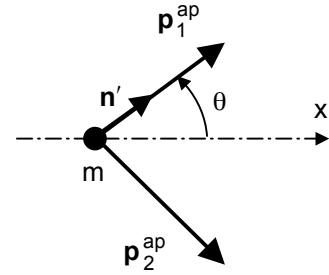
et celui de l'électron :

$$\mathbf{P}_2^{av} = \left(\frac{E_2^{av}}{c}, \mathbf{p}_2^{av} \right) = \left(\frac{mc^2}{c}, \mathbf{0} \right).$$

▪ Après le choc dans R

On note $\mathbf{n}'$ le vecteur unitaire porté par la direction du photon diffusé sous l'angle θ et ν' la fréquence associée à son rayonnement. Le quadrivecteur énergie impulsion de ce photon est :

$$\mathbf{P}_1^{ap} = \left(\frac{E_1^{ap}}{c}, \mathbf{p}_1^{ap} \right) = \left(\frac{h\nu'}{c}, \frac{h\nu'}{c} \mathbf{n}' \right),$$



et celui de l'électron :

$$\mathbf{P}_2^{ap} = \left(\frac{E_2^{ap}}{c}, \mathbf{p}_2^{ap} \right).$$

La conservation du quadrivecteur énergie impulsion du système, avant et après le choc, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2^{ap} &= \mathbf{p}_1^{av} - \mathbf{p}_1^{ap} & \Rightarrow & \mathbf{p}_2^{ap} c = h\nu \mathbf{n} - h\nu' \mathbf{n}' \\ E_2^{ap} &= E_1^{av} + E_2^{av} - E_1^{ap} & & E_2^{ap} = h(\nu - \nu') + mc^2 \end{aligned}$$

Et puisque $E_2^{ap2} = p_2^{ap2} c^2 + m^2 c^4$, on obtient :

$$\left[h(\nu - \nu') + mc^2 \right]^2 = h^2 (\nu \mathbf{n} - \nu' \mathbf{n}')^2 + m^2 c^4.$$

Mais $\nu = c/\lambda$. Après simplification il vient :

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)}.$$

La longueur $h/mc = 0,024 \text{ \AA}$ s'appelle la longueur d'onde Compton de l'électron. Le résultat du calcul en accord avec l'expérience, confirme que le photon possède une quantité de mouvement de module $h\nu/c$. Pour cette expérience, Compton obtint le prix Nobel en 1927.

2.3. Choc élastique de deux particules identiques, l'une en mouvement, l'autre immobile

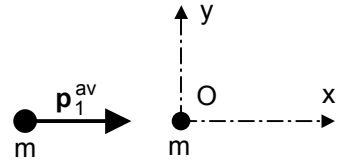
Considérons deux particules identiques de masse m , l'une en mouvement, l'autre au repos, entrant en collision. On note R le référentiel du laboratoire et R^* le référentiel du centre de masse. Nous voulons connaître dans R , la quantité de mouvement des deux particules après le choc, soit quatre composantes scalaires dans le plan formé par les directions des deux particules.

▪ Avant le choc dans R

La particule en mouvement possède une énergie E_1^{av} . Le module de son impulsion p_1^{av} est donné par la relation :

$$p_1^{av} c = \sqrt{E_1^{av2} - m^2 c^4}$$

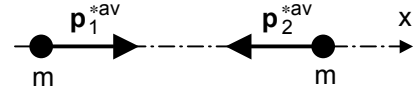
et sa direction est celle de l'axe Ox. La particule immobile se trouve à l'origine O du repère Oxy lié à R. Son énergie est $E_2^{av} = mc^2$ et son impulsion $\mathbf{p}_2^{av} = \mathbf{0}$. Le quadrivecteur énergie impulsion du système s'écrit :



$$P^{av} = \left(\frac{E^{av}}{c}, \mathbf{p}^{av} \right) = \left(\frac{E_1^{av} + mc^2}{c}, \mathbf{p}_1^{av} \right).$$

▪ Avant le choc dans R^*

A l'aide de la transformation de Lorentz, nous avons obtenu au paragraphe 1.4. l'expression de l'énergie du système dans R^* :



$$E^{*av} = \frac{E^{av}}{\gamma}, \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{cp_1^{av}}{E^{av}}.$$

On en déduit :

$$\beta = \frac{\sqrt{E_1^{av2} - m^2 c^4}}{E_1^{av} + mc^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\frac{E_1^{av} + mc^2}{2mc^2}},$$

puis :

$$E^{*av} = \sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}.$$

L'impulsion du système étant nulle dans R^* son quadrivecteur énergie impulsion s'écrit :

$$P^{*av} = \left(\frac{E^{*av}}{c}, \mathbf{p}^{*av} \right) = \left(\frac{\sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}}{c}, \mathbf{0} \right).$$

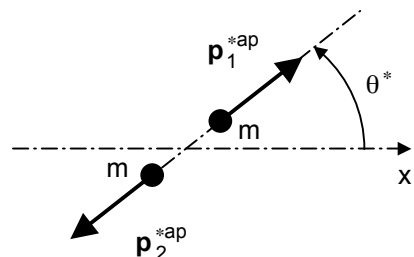
▪ Après le choc dans R^*

La conservation du quadrivecteur énergie impulsion avant et après le choc, $P^{*av} = P^{*ap}$ permet d'écrire :

$$P^{*ap} = \left(\frac{E^{*ap}}{c}, \mathbf{p}^{*ap} \right) = \left(\frac{\sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}}{c}, \mathbf{0} \right).$$

La conservation de l'impulsion fournit deux équations scalaires et la conservation de l'énergie une troisième équation :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^{*ap} + \mathbf{p}_2^{*ap} &= \mathbf{0} \\ E_1^{*ap} + E_2^{*ap} &= \sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}. \end{aligned}$$



Mais nous avons déjà noté que le problème comporte quatre inconnues. Donnons-nous alors un paramètre

supplémentaire ; l'angle d'éjection de la particule 1, dans R^* . Nous l'appelons θ^* . Puisque $\mathbf{p}_2^{*ap} = -\mathbf{p}_1^{*ap}$, l'angle d'éjection de la particule 2 est $\theta^* - \pi$. L'égalité $p_1^{*ap} = p_2^{*ap}$ implique :

$$E_1^{*ap2} = p_1^{*ap2} c^2 + m^2 c^4 = p_2^{*ap2} c^2 + m^2 c^4 = E_2^{*ap2},$$

et donc :

$$E_1^{*ap} = E_2^{*ap} = \sqrt{\frac{mc^2 (E_1^{av} + mc^2)}{2}}.$$

En utilisant la relation $p_1^{*ap} c = \sqrt{E_1^{*ap2} - m^2 c^4}$ il vient :

$$p_1^{*ap} = p_2^{*ap} = \sqrt{\frac{mc^2 (E_1^{av} - mc^2)}{2}}.$$

Les composantes du quadrivecteur énergie impulsion de chaque particule s'écrivent :

$$\begin{aligned} (P_1^{*ap})_i &= (E_1^{*ap}/c, p_1^{*ap} \cos \theta^*, p_1^{*ap} \sin \theta^*, 0) \\ (P_2^{*ap})_i &= (E_2^{*ap}/c, -p_2^{*ap} \cos \theta^*, -p_2^{*ap} \sin \theta^*, 0) \end{aligned}$$

■ Après le choc dans R

Pour obtenir les quadrivecteurs énergie impulsion des particules dans le référentiel du laboratoire, il suffit d'utiliser la transformation de Lorentz inverse, donnant les composantes de P_1^{ap} et P_2^{ap} en fonction de celles de P_1^{*ap} et P_2^{*ap} . Pour la première particule cette transformation s'écrit :

$$E_1^{ap} = \gamma (E_1^{*ap} + u p_{1x}^{*ap}) = \frac{E_1^{av} + mc^2}{2} + \frac{E_1^{av} - mc^2}{2} \cos \theta^*$$

$$p_{1x}^{ap} = \gamma \left(p_{1x}^{*ap} + \frac{u}{c^2} E_1^{*ap} \right) = \frac{1 + \cos \theta^*}{2c} \sqrt{E_1^{av2} - m^2 c^4}$$

$$p_{1y}^{ap} = p_{1y}^{*ap} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{mc^2 (E_1^{av} - mc^2)}{2}} \sin \theta^*$$

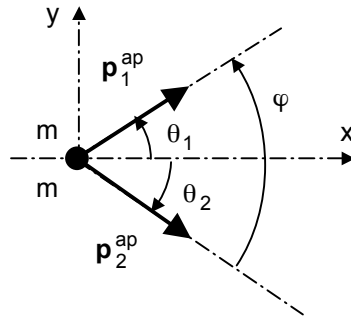
$$p_{1z}^{ap} = p_{1z}^{*ap} = 0$$

Le module de l'impulsion de la particule 1 est donné par la relation fondamentale de la dynamique :

$$p_1^{ap} = \frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{E_1^{av} + mc^2}{2} + \frac{E_1^{av} - mc^2}{2} \cos \theta^* \right)^2 - m^2 c^4}$$

et sa direction, par l'angle d'éjection θ_1 mesuré dans R et tel que :

$$\tan \theta_1 = \frac{p_{1y}^{ap}}{p_{1x}^{ap}} = \frac{\sin \theta^*}{1 + \cos \theta^*} \sqrt{\frac{2mc^2}{E_1^{av} + mc^2}}.$$



Pour la particule 2, le raisonnement est le même. En remplaçant θ^* par $\theta^* - \pi$ on obtient :

$$p_2^{ap} = \frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{E_1^{av} + mc^2}{2} - \frac{E_1^{av} - mc^2}{2} \cos \theta^* \right)^2 - m^2 c^4}$$

et :

$$\tan \theta_2 = \frac{p_{2y}^{ap}}{p_{2x}^{ap}} = \frac{-\sin \theta^*}{1 - \cos \theta^*} \sqrt{\frac{2mc^2}{E_1^{av} + mc^2}}.$$

L'angle d'éjection entre les deux particules est $\varphi = \theta_1 - \theta_2$. A l'aide de la relation :

$$\tan \varphi = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2},$$

il vient après calcul :

$$\tan \varphi = \frac{2\sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}}{(E_1^{av} - mc^2)\sin \theta^*}.$$

En relativité restreinte $0 < \varphi < \pi/2$ alors que, à la limite classique $v \ll c$, $E_1^{av} = mc^2$ et $\varphi = \pi/2$.

3. Chocs inélastiques

3.1. Définition et propriétés générales

Définition : Un choc entre particules est inélastique si la nature ou le nombre des particules avant la collision n'est pas conservé après la collision.

Considérons un système isolé de N particules de masse m_i , $1 \leq i \leq N$, pouvant entrer en collision. Après le choc, nous aurons un système de Q particules (avec à priori $Q \neq N$) de masse m_j , $1 \leq j \leq Q$. Si ces particules sont indépendantes les unes des autres, nous pouvons définir la somme des énergies et la somme des impulsions des particules, puis le quadrivecteur énergie impulsion du système avant et après le choc, dans un référentiel galiléen R , comme nous l'avons fait au paragraphe 2.. Le système étant isolé, ce quadrivecteur se conserve et nous pouvons écrire :

$$p^{av} = p^{ap} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N (m_i c^2 + E_{Ci}^{av}) = \sum_{j=1}^Q (m_j c^2 + E_{Cj}^{ap})$$

$$\sum_{i=1}^N p_i^{av} = \sum_{j=1}^Q p_j^{ap}$$

L'énergie cinétique du système n'est plus conservée puisque :

$$\sum_{i=1}^N m_i c^2 \neq \sum_{j=1}^Q m_j c^2 .$$

Appelons "défaut de masse" la quantité :

$$\Delta m = \sum_{j=1}^Q m_j - \sum_{i=1}^N m_i ,$$

et la variation d'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = \sum_{i=1}^N E_{Ci}^{av} - \sum_{j=1}^Q E_{Cj}^{ap} .$$

La loi de conservation de l'énergie relativiste s'écrit alors :

$$\boxed{\Delta E_C = \Delta m c^2} .$$

C'est la formule très célèbre qu'Einstein découvrit en 1905. Elle traduit l'équivalence entre la masse et l'énergie. Dans une réaction (collision ou désintégration), si la masse totale des particules formées augmente, l'énergie cinétique totale de ces particules diminue, et inversement. Il y a conversion de l'énergie de masse en énergie cinétique.

3.2. Energie de seuil

L'énergie minimum des particules émises après une collision, est la somme des énergies de masse de chacune de ces particules. L'énergie cinétique du système est alors nulle, ainsi que son impulsion. De ce fait, le référentiel d'étude est le référentiel du centre de masse.

Définition : L'énergie de seuil, de production de Q particules lors d'une collision inélastique, est l'énergie cinétique minimum des N particules incidentes, permettant de créer des particules au repos dans leur référentiel du centre de masse.

Calculons l'énergie cinétique minimum que doit posséder une particule de masse m_1 entrant en collision avec une particule immobile de masse m_2 , pour former Q particules de masse m_j . Pour cela écrivons l'invariance de la pseudo-norme du quadrvecteur énergie impulsion du système dans R et R^* , avant le choc :

$$p^{av2} = p^{*av2} .$$

Dans R^* , il y a conservation de ce quadrvecteur avant et après le choc, donc également conservation de sa pseudo-norme :

$$p^{*av2} = p^{*ap2} .$$

D'où :

$$p^{av2} = p^{*ap2} ,$$

relation qui s'écrit aussi :

$$E^{av2} - p^{av2} c^2 = E^{*ap2},$$

avec :

$$\begin{aligned} E^{av} &= E_1^{av} + m_2 c^2 \\ p^{av2} c^2 &= p_1^{av2} c^2 = E_1^{av2} - m_1^2 c^4. \\ E^{*ap} &= \sum_{j=1}^Q m_j c^2 \end{aligned}$$

En notant $E_1^{av} = (E_{C1}^{av})_{\min} + m_1 c^2$, on déduit l'énergie de seuil :

$$(E_{C1}^{av})_{\min} = \frac{\left(\sum_{j=1}^Q m_j c^2 \right)^2 - (m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2)^2}{2m_2 c^2}.$$

Applications

- Si $m_1 + m_2 \geq \sum_{j=1}^Q m_j$

Il n'y a pas d'énergie de seuil. La réaction est toujours possible. Les particules émises posséderont une énergie cinétique dans R^* . C'est le cas de la réaction proton-antiproton de même masse, $938,3 \text{ MeV}/c^2$, donnant naissance à un méson π^- et son antiparticule π^+ de même masse, égale à $139,6 \text{ MeV}/c^2$.

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^- + \pi^+.$$

- Si $m_1 + m_2 < \sum_{j=1}^Q m_j$

Il y a une énergie de seuil. C'est le cas de la réaction entre deux protons, l'un accéléré et l'autre immobile, permettant de créer une paire proton-antiproton suivant :

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}.$$

Toutes les particules ont la même masse $938,3 \text{ MeV}/c^2$. L'énergie de seuil ou énergie cinétique minimum du proton incident est :

$$(E_{C1}^{av})_{\min} = 6mc^2 = 5,63 \text{ GeV}.$$

L'énergie minimum totale du système avant la collision dans R est donc :

$$(E^{av})_{\min} = 8mc^2 = 7,51 \text{ GeV}.$$

On peut calculer sa valeur dans le référentiel du centre de masse R^* en utilisant les relations déjà rencontrées au paragraphe 2.3. :

$$E^{*av} = E^{av} / \gamma \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\frac{E_1^{av} + mc^2}{2mc^2}}.$$

On obtient $\gamma = 2$ et :

$$(E^{*av})_{\min} = 4mc^2 = 3,75 \text{ GeV}.$$

Dans les anneaux collisionneurs, il suffira d'apporter à chaque proton l'énergie cinétique mc^2 , soit au total $E_C^{av} = 2mc^2$. Cette valeur reste inférieure à $6mc^2$, énergie cinétique qu'il faut donner à un proton lorsque l'autre est fixe.

Si l'on veut obtenir des particules prévues par les théories, dévoilant la structure profonde de la matière, l'énergie de seuil des réactions mises en jeu devient considérable. Actuellement, la recherche du boson de Higgs dont la masse est estimée à environ $150 \text{ GeV}/c^2$ est de toute première importance, car cette particule (du nom de son inventeur) serait à l'origine de la masse des constituants de la matière. Elle a été aperçue au L.E.P. (Large Electron-Positon collider) de Genève en l'an 2000, pour une énergie de collision de 200 GeV dans R^* . Mais les données n'ont pas permis une interprétation statistique claire en faveur de son existence. Il faudra donc attendre la transformation du L.E.P. en L.H.C. (Large Hadron Collider) vers 2008 pour peut-être mettre en évidence expérimentalement cette particule.

3.3. Désintégration d'une particule instable

Considérons une particule instable de masse m , immobile dans le référentiel du laboratoire R . Elle peut se désintégrer spontanément et donner naissance à Q particules de masse m_j , dont le référentiel du centre de masse R^* s'identifie avec le référentiel du laboratoire R . Avant et après la désintégration, il y a conservation du quadrivecteur énergie impulsion :

$$P^{av} = P^{ap} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} mc^2 &= \sum_{j=1}^Q E_j^{ap} \\ \mathbf{0} &= \sum_{j=1}^Q \mathbf{p}_j^{ap} \end{aligned}$$

Si toutes les particules formées sont au repos dans R :

$$m = \sum_{j=1}^Q m_j.$$

La réaction est donc énergétiquement possible si :

$$\boxed{m \geq \sum_{j=1}^Q m_j} \quad \text{ou} \quad \boxed{\Delta m = \sum_{j=1}^Q m_j - m \leq 0}.$$

Dans le cas particulier où la désintégration d'une particule au repos dans R , donne naissance à deux autres particules, calculons leur énergie relativiste dans R . La conservation du quadrivecteur énergie impulsion s'écrit :

$$\begin{aligned} mc^2 &= E_1^{ap} + E_2^{ap} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{p}_1^{ap} + \mathbf{p}_2^{ap} \end{aligned}$$

La deuxième relation donne $p_1^{ap} = p_2^{ap}$, et la relation fondamentale de la dynamique :

$$E_1^{ap2} = p_1^{ap2} c^2 + m_1^2 c^4$$

$$E_2^{ap2} = p_2^{ap2} c^2 + m_2^2 c^4 .$$

Par soustraction :

$$E_1^{ap2} - E_2^{ap2} = (m_1^2 - m_2^2) c^4 ,$$

et en divisant par $mc^2 = E_1^{ap} + E_2^{ap}$ il vient :

$$E_1^{ap} - E_2^{ap} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{m} c^2 .$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} E_1^{ap} &= \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m} c^2 \\ E_2^{ap} &= \frac{m^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m} c^2 . \end{aligned}}$$

La diminution de la masse du système $|\Delta m| = m - m_1 - m_2$ libère l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} |\Delta m| c^2 &= mc^2 - m_1 c^2 - m_2 c^2 = E_1^{ap} + E_2^{ap} - m_1 c^2 - m_2 c^2 \\ &= E_{C1}^{ap} + E_{C2}^{ap} . \end{aligned}$$

Applications

- La désintégration du méson K^+ de masse $493,7 \text{ MeV}/c^2$ en méson π^+ et π^0 de masse $139,6 \text{ MeV}/c^2$:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

ou en méson π^- et π^+ de masse $139,6 \text{ MeV}/c^2$:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+$$

- La désintégration du neutron ($m_n = 939,6 \text{ MeV}/c^2$), en proton ($m_p = 938,3 \text{ MeV}/c^2$), électron ($m_e = 0,5110 \text{ MeV}/c^2$) et antineutrino électronique de masse considérée comme nulle :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e .$$

3.4. Etude des noyaux

Jusqu'à présent, nous avons étudié des systèmes constitués de particules indépendantes, ce qui nous a permis de définir un quadrivecteur énergie impulsion.

Considérons maintenant un système de particules en interaction. Nous pouvons définir la somme des énergies et la somme des impulsions des particules puis le quadrivecteur énergie impulsion du système s'il y a simultanéité des événements dans différents référentiels galiléens. Ceci est possible lorsque le système est concentré en un point de l'espace. Pratiquement, ces systèmes sont des atomes, des noyaux atomiques ou même des particules tel que le proton constitué de trois quarks, tous confinés dans un très petit volume d'espace.

Le quadrivecteur d'un tel système, constitué de N particules de masse m_i en interaction, s'écrit :

$$\mathbf{p}^{av} = \left(\frac{E^{av}}{c}, \mathbf{p}^{av} \right), \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} E^{av} &= \sum_{i=1}^N E_i^{av} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N E_{i,k}^{av}, \\ \mathbf{p}^{av} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^{av} \end{aligned},$$

où $E_{i,k}^{av}$ est l'énergie potentielle d'interaction entre la particule i et la particule k . La masse M du système est définie par la relation :

$$Mc^2 = \sqrt{E^{av2} - \mathbf{p}^{av2} c^2}.$$

Si dans une réaction, les N particules de ce système lié se libèrent et donnent naissance à Q particules indépendantes de masse m_j , la somme des énergies de masse de toutes les particules après la réaction est :

$$\sum_{j=1}^Q m_j c^2 = \sum_{j=1}^Q \sqrt{E_j^{ap2} - \mathbf{p}_j^{ap2} c^2}.$$

La masse M du système lié n'est pas égale a priori, à la somme des masses des particules après la réaction. Cela dépend de l'énergie potentielle d'interaction et de l'énergie cinétique des particules. Deux cas se présentent suivant que le défaut de masse :

$$\Delta m = \sum_{j=1}^Q m_j - M$$

est positif ou négatif.

Pour aller plus loin, concentrons-nous sur l'étude du noyau atomique. Rappelons que l'on note ${}^A_Z X$ un noyau formé de Z protons, A nucléons et $N = A - Z$ neutrons. Il est également appelé nucléide. La cohésion des nucléons est assurée par l'interaction forte attractive. Le rayon du noyau est de l'ordre du fermi ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$).

3.4.1. Noyaux stables

Un noyau est stable si :

$$\boxed{\Delta m > 0}.$$

On note m_p la masse du proton, m_n la masse du neutron et M la masse du noyau.

$$\Delta m = (A - Z)m_n + Zm_p - M.$$

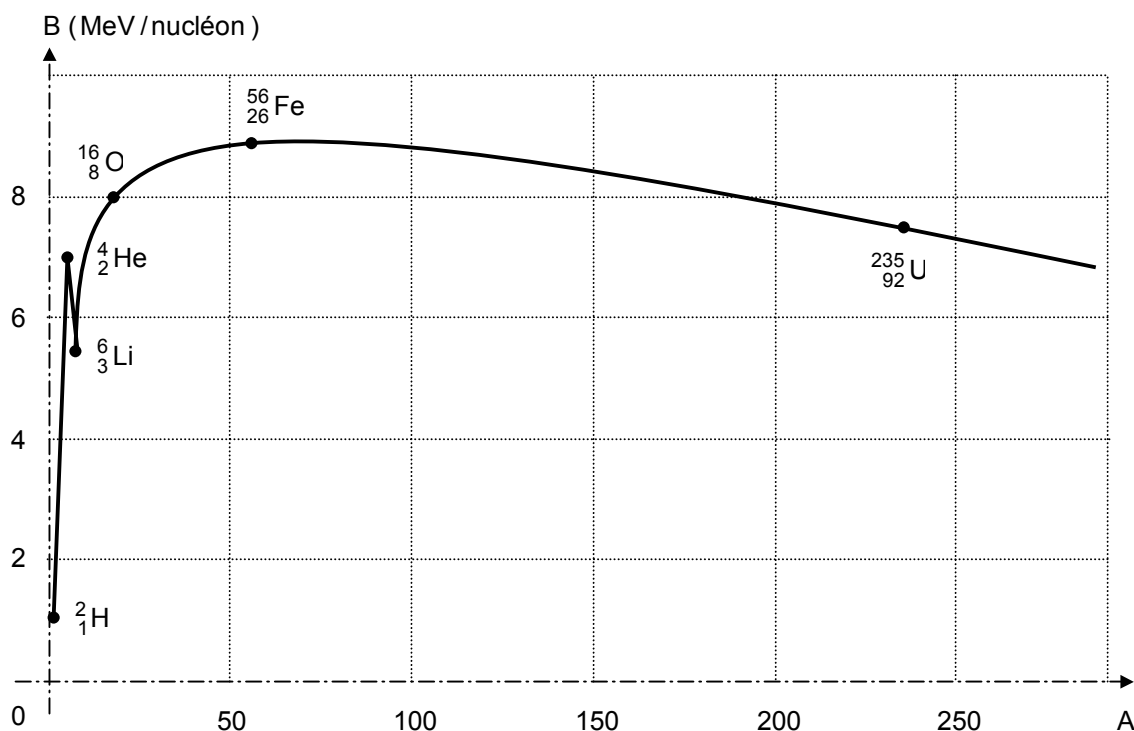
L'énergie minimum nécessaire à briser le noyau en ses différentes particules est l'énergie de liaison :

$$E_l = \Delta m c^2.$$

Elle ne donne pas d'énergie cinétique aux particules indépendantes ainsi libérées. On définit également l'énergie moyenne de liaison par nucléon :

$$B = \frac{E_l}{A}.$$

La courbe d'Aston représente B en fonction de A pour tous les noyaux. Le noyau ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ est le plus stable pour une énergie de liaison par nucléon de $8,8 \text{ MeV}$.



Courbe d'Aston

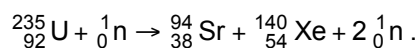
Applications

Il est alors possible d'obtenir de l'énergie à partir de réactions nucléaires formant des produits plus stables que les réactifs utilisés. L'énergie produite correspond à la perte de masse entre les nucléides produits et les nucléides réagissants initialement. D'après la courbe d'Aston, deux types de réactions sont possibles : la fission et la fusion nucléaire.

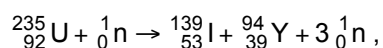
▪ Les réactions de fission nucléaire

Un neutron est capté par un noyau lourd pour former un noyau instable. Celui-ci se scinde et donne des noyaux plus légers et plus stables.

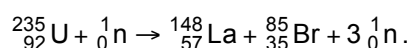
Par exemple, un noyau d'Uranium peut capter un neutron et produire du Strontium et du Xénon :



L'énergie de liaison par nucléon de l'Uranium est de 7,7 MeV. Si celles des produits formés sont proches du maximum, 8,8 MeV, alors l'énergie libérée est égale à la différence, environ 1 MeV/nucléon. Et au total pour 235 nucléons, la réaction fournit environ 235 MeV. Un calcul plus précis tenant compte de l'énergie de liaison exacte des nucléides formés (ou de façon équivalente, de leur masse) montre que cette réaction libère 187 MeV. Cette énergie est considérable. A titre de comparaison, 1 g d'Uranium dégage une énergie équivalente à la combustion de 1,8 t de pétrole. D'autres réactions sont possibles. Si les produits sont de l'Iode et de l'Yttrium :



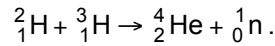
ou du Lanthane et du Brome :



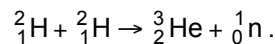
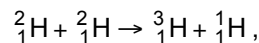
C'est ce type de réaction qui est mis en œuvre dans les centrales nucléaires et les bombes atomiques. Malheureusement, les produits de fission sont radioactifs et polluent.

▪ Les réactions de fusion nucléaire

Deux éléments légers fusionnent pour donner un élément plus lourd et plus stable. Par exemple, la fusion du deutérium et du tritium produit de l'hélium et un neutron :



L'énergie à fournir est environ de 2 MeV pour scinder ${}^2_1\text{H}$ en ses particules et de 9 MeV pour ${}^3_1\text{H}$, donc au total 11 MeV. L'énergie produite par la formation de ${}^4_2\text{He}$ à partir de ses particules élémentaires est de 28 MeV. La réaction libère la différence d'énergie, soit 17 MeV. Citons d'autres exemples :



Ce sont des réactions thermonucléaires qui se produisent à l'intérieur des étoiles. Elles sont aussi à l'origine de la bombe H. Mais actuellement, on ne sait pas les contrôler.

3.4.2. Noyaux instables

Un noyau est instable si :

$$\Delta m \leq 0.$$

Dans ce cas, le noyau se désintègre spontanément et libère une énergie :

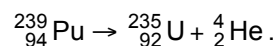
$$E = |\Delta m|c^2,$$

qui correspond à l'énergie cinétique des produits de fission et à l'énergie rayonnée ; c'est la radioactivité.

Application

Il existe trois types de radioactivité α , β et γ , correspondant à l'émission de particules α (noyau de ${}^4_2\text{He}$), de particules β (électrons e^- pour la radioactivité β^- et positons e^+ pour la radioactivité β^+) et de rayonnement γ accompagnant les deux précédentes.

Prenons l'exemple de la désintégration du Plutonium par radioactivité α :



Cette situation est analogue à la désintégration d'une particule traitée au paragraphe 3.3., les noyaux remplacent les particules. Les relations que nous avons obtenues permettent de calculer l'énergie cinétique des noyaux d'Uranium et d'Hélium. On identifie les masses atomiques à celles des noyaux, car la masse d'un électron est faible devant celle d'un nucléon, et avec les masses des noyaux :

$$M_{\text{Pu}} = 222,6771 \text{ GeV}/c^2$$

$$M_{\text{U}} = 218,9434 \text{ GeV}/c^2,$$

$$M_{\text{He}} = 4,0026 \text{ GeV}/c^2$$

les énergies relativistes des noyaux d'Uranium et d'Hélium sont :

$$E_U = \frac{M_{Pu}^2 + M_U^2 - M_{He}^2}{2M_{Pu}} c^2 = 218,9435 \text{ GeV}$$

$$E_{He} = \frac{M_{Pu}^2 + M_{He}^2 - M_U^2}{2M_{Pu}} c^2 = 3,7336 \text{ GeV}$$

On en déduit les énergies cinétiques :

$$E_{CU} = E_U - M_U c^2 = 0,0888 \text{ MeV}$$

$$E_{CHe} = E_{He} - M_{He} c^2 = 5,2206 \text{ MeV}$$

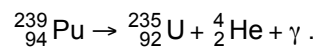
Elles sont très inférieures aux énergies de masse. L'approximation classique aurait donc suffi pour le calcul. Le noyau d'Hélium plus léger que le noyau d'Uranium est bien sur éjecté avec une vitesse plus grande. La somme de ces énergies est :

$$E_{CU} + E_{CHe} = 5,3094 \text{ MeV}.$$

Elle devrait correspondre à la perte de masse :

$$|\Delta m| = M_{Pu} - M_U - M_{He} = 5,3095 \text{ MeV} / c^2.$$

En réalité, l'énergie cinétique de la particule α est plus faible car l'Uranium est créé dans un état excité. Il revient à un niveau stable en émettant un rayonnement γ d'un ou plusieurs photons. La réaction s'écrit :



Conclusion

La conservation du quadrivecteur énergie impulsion exprime la conservation de l'énergie et la conservation de l'impulsion. L'énergie relativiste comprend un terme de masse, un terme cinétique et éventuellement un terme d'interaction potentielle pour un système lié. Sa conservation au cours d'une collision ou d'une réaction permet la création ou l'annihilation de particules massiques. La variation de l'énergie de masse est compensée par la variation d'énergie cinétique et potentielle du système. C'est l'équivalence masse-énergie, dont on peut tirer profit dans les centrales nucléaires.

Mais ces lois de conservation ne sont pas les seules. Il en existe d'autres telles que la conservation de la charge ou du nombre leptonique $L = \pm 1$ attribué aux leptons (fermions légers e^- et μ^-).

Bibliographie

C. Grossetête, *Relativité restreinte et structure atomique de la matière*, ellipses, 1985.

M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault, *Mécanique 1 et 2*, Dunod, 1994.

L. Landau, E. Lifchitz, *Physique théorique, Théorie des champs*, Mir Moscou, 1989.