

# LP08 - Notion de viscosité. Écoulements visqueux

Gauthier Legrand et Francis Pagaud

## Résumé

### Bibliographie

- Hydrodynamique, **Guyon, Hulin, Petit**
- Physique PC-PC\*, **Olivier, Tec Doc**
- Physique Tout-en-un pour la Licence, **Laurent Gautron**
- [http://www.daniel-huilier.fr/Enseignement/Notes\\_Cours/Viscosite/Viscosite\\_des\\_fluides2.pdf](http://www.daniel-huilier.fr/Enseignement/Notes_Cours/Viscosite/Viscosite_des_fluides2.pdf) modèle micro de la viscosité assez bien détaillé
- <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html> plein de vidéos
- [http://ressources.agreg.phys.ens.fr/static/Cours-TD/Rabaud/NotesCours\\_Agreg2019.pdf](http://ressources.agreg.phys.ens.fr/static/Cours-TD/Rabaud/NotesCours_Agreg2019.pdf) notes de cours d’Ulm
- Physical fluid dynamics, **D. J. Tritton** page 15 on y parle de la longueur d’établissement du régime Poiseuille
- [https://www.youtube.com/watch?v=GS\\_1-sEI\\_r8](https://www.youtube.com/watch?v=GS_1-sEI_r8)

### Pré-requis :

- Cinématique des fluides
- Fluides parfait et équation d’Euler
- Mécanique du point
- Diffusion

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Limites du fluide parfait : notion de viscosité</b>	<b>2</b>
1.1	Cadre d’étude de la viscosité . . . . .	2
1.2	Description microscopique . . . . .	3
1.3	Force macroscopique . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Conséquences énergétiques</b>	<b>4</b>
2.1	Dissipation énergétique . . . . .	4
2.2	Écoulement de Couette instationnaire . . . . .	4
2.3	Renversabilité de l’équation de Stokes . . . . .	5

<b>3</b>	<b>Nombre de Reynolds</b>	<b>5</b>
3.1	Un nombre pertinent	5
3.2	Régime visqueux $\mathcal{R}_e \ll 1$	5
3.3	Régime inertiel $\mathcal{R}_e \gg 1$	5

## Commentaires du jury

aze

## Introduction

Cette leçon s'inscrit après avoir vu les écoulements parfaits, c'est une progression historique puisque l'équation d'Euler date de 1753 alors que Navier décrit les fluides visqueux en 1822 puis Stokes en 1845 (regarder Olivier page 404 pour historique méca flu)

Lancé de magnus glider  
 Vidéo de viscosité en alternative : <https://www.youtube.com/watch?v=Y3y7ImjfUN4>

L'effet magnus ne peut pas s'expliquer sans la viscosité : le modèle du fluide parfait ne fonctionne pas bien ici, il nous manque un ingrédient.

Problématique : Comprendre l'impact de la viscosité sur les écoulements et comment le prendre en compte.

## 1 Limites du fluide parfait : notion de viscosité

### 1.1 Cadre d'étude de la viscosité

Olivier chapitre 15

Système : particule de fluide. Référentiel : galiléen. On se limite au cas des fluides newtoniens (à introduire plus tard) dans des écoulements incompressibles, température homogène.

- Conditions aux limites de la vitesse : c'est l'occasion de revenir sur l'effet Magnus avec une belle image (<http://aerodyne-cachan.blogspot.com/2016/03/leffet-magnus.html>) vidéo sympa sur ce site)
- la viscosité n'apparaît que si on observe un gradient de vitesse : le montrer avec le dispositif Couette. Elle donne alors un mouvement tangentiel : c'est différent de ce qui a déjà été vu en statique des fluides.
- On en tire la loi phénoménologique qui **définit** la viscosité dynamique  $d\mathbf{F}_{\text{sup} \rightarrow \text{inf}} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \mathbf{u}_x$ , à expliciter avec un beau schéma (définition du fluide newtonien avec l'hypothèse isotrope). A introduire comme pour la loi de Hooke : c'est phénoménologique.
- Donner l'unité de  $\eta$  et des ordg des viscosités (à un température donnée) et montrer les différents comportements sur <https://youtu.be/f6spBkVeQ4w?t=166> ou <https://www.youtube.com/watch?v=V5a4kP-5Jiw> (avec des huiles). Les variations avec T doivent être faites avec Python.

Intuitivement on comprend alors ce qu'est la viscosité, essayons de comprendre plus fondamentalement ce qu'il en est.

## 1.2 Description microscopique

Guyon Hulin Petit page 95

(F) Pas essentiel en fin de compte.

C'est le premier calcul de la leçon, il faut prendre son temps et le faire proprement.

- libre parcours moyen  $l$ , volume de fluide entre  $z + l$  et  $z - l$  de surface  $S$ . On fait un bilan de quantité de mouvement dans ce fluide, soumis à l'agitation thermique. On fait le bilan de particules puis le bilan de quantité de mouvement.
- On identifie cette variation de quantité de mouvement à une force, dont on déduit  $\eta = \frac{1}{3} mn\bar{u}l \propto \sqrt{T}$

- On a utilisé ici  $\bar{u} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$  (équipartition de l'énergie) et  $l = \frac{1}{\sqrt{2n\sigma_c}}$  **d'où ça vient ça ??? regarder épreuve A 2006 ou page 60 Pérez thermo**

Ce modèle permet déjà de faire sentir qu'on a une diffusion de quantité de mouvement.

On peut faire un calcul d'ODG de  $\eta$ , avec  $\sigma = 3 \times 10^{-19}$  (le Pérez pour l'ODG, choisi pour que ça marche bien),  $m = 0.029/(6.02 \times 10^{23})$  kg, on obtient la bonne valeur à  $T = 293$  K.

Parler (rapidement pour comparer) de la dépendance en température pour les phases condensées, de type Boltzmann :  $\eta(T) \propto e^{\frac{E_a}{k_B T}}$ , dans ce cas-là il faut savoir en parler (page 97 GHP)

Ces effets microscopiques ont un impact macroscopique.

## 1.3 Force macroscopique

Guyon Hulin Petit page 91 et Olivier page 436

(F) En faisant cette partie, je l'ai plus centrée sur "quelle est la force macro s'appliquant à cause de la viscosité", et on fait la résultante des forces pour trouver  $d\vec{F} = \eta \Delta \vec{v}$ .

On fait un PFD sur une particule fluide : on doit alors se placer en lagrangien. (c'est louche non ? Attention à la subtilité, donner les hypothèses de NS)

On obtient alors une équation de diffusion, c'est normal comme on l'a vu avec le modèle micro la viscosité diffuse la quantité de mouvement. La viscosité tend donc à homogénéiser la quantité de mouvement.

Pour généraliser la force dans sa forme globale j'aime bien dire "On peut généraliser dans les autres directions puisqu'il n'y pas de couplage. On voit apparaître un laplacien vecteur en Cartésiennes, ce résultat ne peut pas dépendre du système de coordonnées, on écrit donc la force avec un laplacien vecteur". On réécrit alors Navier-Stokes en prenant tout en compte. C'est une équation compliquée pour laquelle on aura souvent recours à des hypothèses simplificatrices.

Il faut bien faire attention à énoncer toutes les hypothèses pour écrire Naviers-Stokes (référentiel galiléen, écoulement incompressible, fluide newtonien isotrope) et ne pas oublier la conservation de la masse pour fermer le système d'équation. L'équation est non-linéaire !

Parler aussi de la continuité des contraintes à l'interface ( $\eta_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} = \eta_2 \frac{\partial v_2}{\partial z}$  vient d'un PFD fait à un volume à l'interface qui subit des forces surfaciques sachant que le volume tend vers 0 plus vite que la surface) : ça amènera probablement des questions

sur la pression de Laplace. **Transition** : On a réussi à dresser un portrait de la viscosité, voyons alors quel est son impact sur l'écoulement d'un fluide.

## 2 Conséquences énergétiques

### 2.1 Dissipation énergétique

(F) Ca peut dégager...

Apparamment (d'après le Jolidon) il y a des trucs à voir dans *Mécanique expérimentale des fluides 2 - Dynamiques des fluides réels, turbomachines.* de Raymond Comolet (Dunod 2006)

[https://femto-physique.fr/mecanique\\_des\\_fluides/fluides-visqueux.php](https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/fluides-visqueux.php)

des trucs pas mal sur ce site

Physique Tout-en-un pour la Licence page 136

Perte de charge dans un écoulement type Poiseuille

on peut l'expliquer en reprenant la démonstration du théorème de Bernoulli qui fait alors apparaître un terme de dissipation visqueuse. La démonstration se fait

- en faisant un bilan (c'est un peu long)
- en prenant Navier-Stokes et en regroupant les termes qui se mettent sous la forme d'un gradient. Il ne reste alors que le terme visqueux. On intègre cette équation en multipliant par  $d\vec{l}$ , ce qui donne alors une énergie volumique due à la dissipation visqueuse.

Il y a deux types de perte de charge, ici on ne regarde que la première :

- La perte de charge en ligne dite perte de charge régulière est due aux frottements le long du trajet
- La perte de charge singulière est due à la présence d'obstacles localisés tels que les coudes, les robinets

On voit que la perte est linéique, c'est normal elle a lieu sur la paroi.

**Bon bah en fait y a pas grand chose à dire sur la perte de charge**

**À tester pour voir sur le gradient de pression est bien différent du gradient de pression appliqué pour avoir l'écoulement**

Comment cette énergie est-elle dissipée ?

### 2.2 Écoulement de Couette instationnaire

Sinon on peut parler du temps d'établissement du régime de Couette quand on met subitement en mouvement la plaque, ça se résout plus facilement en obtenant la fonction erf. La discussion est sympa aussi vu que c'est la viscosité  $\tau = \frac{\delta^2}{\nu}$  donc plus c'est visqueux plus on transporte vite. Ça pourrait être bien qu'on monte l'expérience de Couette oscillant pour montrer la hausse de température, mais qu'on fasse les calculs et du python pour Couette transitoire. GHP page 204

- Schéma sur slide. Bien présenter le système, les invariances et symétries.
- Solution après régime transitoire :  $v_y(z, t) = V_0 e^{-ky} \cos(\omega t - ky)$  avec  $k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$
- Analogie à faire avec les ondes thermiques : c'est aussi de la diffusion.
- Faire l'expérience en live et essayer de mesurer un réchauffement
- Code Python

Ce genre de système est utilisé en tant que sismographe (voir GHP p 206)

## 2.3 Renversabilité de l'équation de Stokes

ça manque de référence

(F) Je ferais cette partie dans la sous-partie 3.2, où l'on parle du rhéomètre également.

On sort l'écoulement cylindrique de Couette et on montre la renversabilité, qui est à bien différencier de la réversibilité en thermo (parce que l'écoulement isentropique équivaut à fluide parfait). Pour parler de diffusion, on dit que l'exp doit être plus lente que  $\tau_{dyna} = \frac{L^2}{\nu}$  pour être bien dans le cas de Stokes (qq secondes), mais plus rapide que  $\tau_{diff} = \frac{r^2}{D}$ , on peut discuter cette vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=k7ZZtxdtmeQ>

Tout ceci semble alors contradictoire avec ce qu'on a vu : comment peut-on perdre de l'énergie s'il est possible de renverser l'équation ? Pour Couette c'est qu'on était pas en stationnaire, pour la perte de charge

Théorème de la coquille Saint-Jacques : Robot de Purcell (1977) : <https://www.youtube.com/watch?v=f-sIaYrH45U> (vidéo youtube) <https://smf.emath.fr/files/89-94.pdf> (pdf potable)

**Transition :** Le comportement d'un fluide est donc très différent de ce qui avait été vu pour les fluides parfaits. Comment peut-on alors savoir dans quel cadre situer l'étude ?

## 3 Nombre de Reynolds

### 3.1 Un nombre pertinent

- Présentation du Reynolds comme rapport de flux de quantités de mouvements (convectif vs diffusif)
- Adimensionnaliser Navier-Stokes pour montrer que c'est le seul paramètre important. Pour que l'invariance soit bonne il faut garder en tête que les CL doivent être les mêmes.
- Parler du rapport d'échelle et des maquettes en soufflerie
- Évoquer les théorèmes pi ?

### 3.2 Régime visqueux $\mathcal{R}_e \ll 1$

On retombe sur l'équation de Stokes

- Discussion sur la linéarité et ses conséquences (unicité et superposition)
- Profil de l'écoulement autour d'un obstacle

Rhéomètre géométrie couette : c'est principalement ce qu'on utilise pour mesurer des viscosités. On explique le fonctionnement (applique couple mesure déplacement ou inverse selon les modèles), ça permet notamment une étude fréquentielle de la viscosité.

### 3.3 Régime inertiel $\mathcal{R}_e \gg 1$

GHP chapitre 9 page 507 On retombe sur les fluides parfaits, mais ce n'est pas satisfaisant comme on l'a vu avec l'effet Magnus, on ne peut pas négliger la viscosité partout. On introduit alors la notion de couche limite.

**Profil de Blasius**

Avant de faire la conclusion on récapitule les deux régimes avec le graphe du coefficient de traînée en fonction du Reynolds

## Conclusion

### Commentaires pendant la prépa aux oraux

- Garder en tête l'effet de masse ajoutée
- Renversabilité de l'équation de Stokes et symétrie du profil des vitesses (ça pourrait être sympa de le caser mais c'est pas très grave sinon) voir Guyon Hulin Petit page 447.
- La longueur d'établissement du régime Poiseuille est due à la viscosité
- différence fluide incompressible vs écoulement incompressible (dérivée particulaire nulle vs  $\rho = \text{constante}$ )
- différence viscosimètre vs rhéomètre (mesure du module élastique?)
- pour les fluides non newtoniens on peut trouver le profil de vitesse en disant qu'il satisfait au minimum de dissipation (principe variationnel) voir Guyon Hulin Petit page 451
- Les fluides newtoniens ont des viscosité isotropes
- Si écoulement compressible, il faut rajouter une force de la forme  $(\zeta + \frac{1}{3}\eta)\text{grad}(\text{div } \vec{v})$
- Le Reynolds sépare fondamentalement les régimes visqueux et inertiel, et non pas laminaire et turbulent (un écoulement de Poiseuille oscillant peut être laminaire et inertiel).

## Questions

- Vous parlez d'irréversibilité, quelles en sont les causes?
- Qu'est-ce qu'un fluide newtonien? Donnez des exemples de fluide non newtoniens. Est-ce que vous pouvez décrire son comportement? Mathématiquement ça se traduit comment?
- Le dentifrice est-il non-newtonien, qu'est-ce qui le montre dans son comportement?
- Que devient l'équation que vous avez présentée (navier-stokes avec  $\text{div}(\mathbf{v})=0$ ) dans le cas compressible?
- Vous avez dit qu'expérimentalement on pouvait mesurer la vitesse d'un fluide dans un écoulement de Couette plan. Comment fait-on en pratique?
- Vous avez fait une analogie entre la conduction thermique et la viscosité, qui joue l'analogie de la loi de Fourier?
- Pour Reynolds, vous avez pris l'exemple du modèle d'avion et vous avez dit que c'est le seul nombre important pour mettre à l'échelle un écoulement?
- Pour le viscosimètre à bille, vous avez donné la force de Stokes, comment vous justifiez à un élève qu'elle est proportionnelle à la vitesse et non la vitesse au carré? Est-ce qu'il existe une formule universelle qui donne la force exercée par un fluide sur un solide? Parlez nous de la force de traînée. Comment varie le coefficient de traînée avec le Reynolds?
- Comment varie la viscosité en fonction de la température dans un fluide supercritique?
- Vous n'avez parlé que de viscosité de cisaillement, il y en a d'autres, effets?

- Comment définir la taille caractéristique d'un écoulement pour un industriel qui fait une étude avec un modèle réduit en soufflerie ?
- Comment jouer sur les paramètres du viscosimètre de Couette pour augmenter la sensibilité ?
- Si à haut  $Re$ , viscosité négligeable, comment expliquer à un élève l'origine de la traînée ? La traînée existe aussi pour un fluide parfait ? Il y a d'autres forces qui s'exercent sur une aile d'avion ? Et la portance existe aussi pour un fluide parfait ? Évolution du  $C_x$  en fonction du Reynolds ?
- Comment on définit un écoulement turbulent ?
- Pour modéliser un bateau, quel terme faut-il ajouter dans l'équation de Navier-Stokes ? Est-ce que ça crée un nouveau nombre caractéristique ou  $Re$  est suffisant ?
- Différence entre fluide incompressible et écoulement incompressible ?
- L'expression de la force visqueuse (en laplacien de la vitesse) est-elle toujours valable en écoulement incompressible ?
- Dans le modèle microscopique, qu'obtient-on si on s'intéresse aux composantes des quantités de mouvement perpendiculaires à l'interface ?
- Si  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{0}$  strictement, comme pour le Poiseuille, alors peut on dire que  $\mathcal{R}_e = 0$  ?
- Pourquoi parle t-on de viscosité dynamique ou cinématique ?
- Pourquoi des chercheurs utilisent des cellules de Helle-Shaw pour simuler un fluide de viscosité égale à 0 ?
- Hélium Superfluide. Est ce qu'il existe un fluide parfait ? Que se passe-t-il si l'on met ce fluide dans un cylindre et que l'on tourne le cylindre ?
- Pourquoi lors de l'expérience de l'écoulement de Couette vous n'avez pas obtenu un profil totalement linéaire ?
- Si dans l'écoulement de Poiseuille on a un fluide pesant, que se passe-t-il ?
- Soit un cycliste se déplaçant à 10 m/s dans l'air ou un nageur se déplaçant à 1m/s dans l'eau ; le Reynolds vaut  $10^6$  typiquement donc la viscosité peut être négligée ; pourquoi est-ce fatiguant ?
- Huiles de moteur ? Comment on fait pour avoir des viscosités différentes ?
- Comment est définie la viscosité précisément ? Comment tu l'introduirais simplement ? C'est une résistance à l'écoulement d'après le jury

#### Leçon de Colléaux le 4 mai 2020 via BBB

- Hypothèses pour l'écoulement de Couette plan ?
- Différence fluide incompressible versus écoulement incompressible ?
- À quoi correspond le signe dans  $dF = -\eta \frac{\partial v}{\partial z}$  ?
- Fluide avec des viscosités beaucoup plus grande ? C'est quoi la pois ?
- Quand on applique la force, c'est quoi le système ? *parler de particule fluide*
- Diffusion de quantité de mouvement = macroscopique ?
- Faire la démo de la viscosité d'un gaz (non faite par manque de temps)
- C'est quoi une vitesse lagrangienne ?
- Que se passe-t-il si l'écoulement n'est pas incompressible ?
- est-ce qu'on peut appliquer l'équation d'Euler pour un gaz ?
- C'est quoi le nombre de Reynolds Critique à partir duquel on voit apparaître les instabilités ?
- D'où vient l'équation de Stokes ?
- Calculer le profil de pression dans un écoulement de Couette plan. *alors là en fait il a confondu la pression dynamique et la pression au repos. Dans les équations il*

- a considéré  $g = 0$  en considérant la pression hydrostatique.*
- Est-ce que le sang c'est un fluide Newtonien ? *relation d'Einstein :  $\eta = \eta_0(1 + 2,5\phi)$  où  $\phi$  est la fraction volumique en particules (C'est un DL d'une loi exponentielle).*
  - Le sang est un fluide rhéofluidifiant : il va plus vite dans les petits capillaires
  - c'est quoi un fluide à seuil, rhéoépaississant, rhéofluidifiant
  - comment on mesure une viscosité ?
  - Couche limite ? Formule de l'épaisseur le Reynolds à trouver par analyse dimensionnelle à partir de l'équation de la diffusion  $\delta = \sqrt{\nu\tau}$  avec  $\tau \simeq \frac{L}{U}$  donc  $\delta = \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = L\sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}}$
  - différence trajectoire ligne de courant
  - attention à bien dire écoulement incompressible et pas fluide incompressible ! Sinon on ne peut pas appliquer ce qu'on fait pour des gaz...

## Passage Francis le 5/06

intro très bien

Pour l'introduction de  $\eta$  je pense qu'il faut dire que c'est comme la loi de Hooke pour les ressorts et que c'est phénoménologique

Le tableur pour la viscosité en fonction de la température c'est pas beau : en faire un graphe python

La vidéo pour montrer les différents comportements sort un peu de nulle part faudrait la mettre ailleurs

Le modèle micro c'est hyper long à mettre en place et c'est pas le truc le plus important donc je pense qu'il faut le dégager

- quels sont les différents types d'écoulement selon le nombre de Reynolds ?
  - Comment s'appelle la loi donnant la force en fonction du gradient de vitesse ? (loi de Newton)
  - À quelle époque Navier-Stokes ? Navier en 1845 et Stokes en 1849
  - Exemple de fluide très visqueux ? Date de mise en route de l'expérience de la goutte de poix
  - Dans quel genre de système on a toujours des écoulement visqueux ?
  - Où est-ce qu'il faut toujours prendre ne compte la viscosité, peu importe l'écoulement ?
  - détailler les termes de l'équation de Navier-Stokes
  - Le terme visqueux c'est un terme de quoi ? Diffusion
  - détailler le nombre de Reynolds
  - Fluides non newtoniens ? Exemples ?
  - viscosité du verre :  $\eta = 10^{20}$  Pa
  - odg temps de l'écoulement pour les vitraux ?
  - comment on mesure une viscosité ?
  - pour le modèle micro : comment on trouve  $\bar{u}$  et le  $l_{pm}$
- Quand on fait le plan détaillé il ne faut pas perdre du temps à expliciter les symétries : plutôt prendre le temps de décrire le système et donner les résultats
- Plus commenter les odg, c'est bien d'en avoir mais pour que ça vaille le coup faut les exploiter à fond
- Ça peut-être une bonne idée de ne pas parler du modèle micro