Agrégation physique – ENS de Lyon – 2019-2020

27 juin 2020

LP09 - Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Gauthier Legrand et Francis Pagaud

27 juin 2020

Bibliographie

→ Hydrodynamique physique, 3e édition, **GHP**

→ Physique PC-PC*, **Olivier**

→ Hprépa Méca flu, **Brébec** (Ma préférence pour cette leçon)

→ Cours d'Ulm, http://ressources.agreg.phys.ens.fr/static/Cours-TD/Rabaud/NotesCours_Agreg2019.pdf

→ Physique expérimentale, **Jolidon**

→ https://www.hkdivedi.com/2018/12/bernoullis-equation-for-compressible.html

Pré-requis : Niveau L2

→ Viscosité

→ Equation de Navier-Stokes

→ Bilan d'énergie sur un système ouvert

→ Théorème de l'énergie cinétique

→ Electrostatique, développement multipolaire

Table des matières

calculer le Reynolds et Peclet autant que possible pour chaque exemple

Il faut essayer de caser des belles images de Album of fluids in motion, Van Dyke. De mémoire, les cellules de Hele-Shaw permettent de visualiser un écoulement parfait, faut trouver des photos/se renseigner. WIki en anglais dit que c'est équivalent à un écoulement potentiel irrotationnel.

L'hypothèse "écoulement incompressible" suffirait à Bernoulli selon Lauren Rose, car le long de la ligne de courant, ρ est constante. Sinon Pitot ça marche pas. Le fluide incompressible, ça marche tout le temps, en effet, mais l'écoulement incompressible est nécessaire pour les gaz. Le Guyon est pas clair là-dessus. Il faut se référer au Cap prépa paraît-il, ou au Sanz.

Reste à faire : Tester les expériences.

Commentaires du jury

2017 La multiplication des expériences illustrant le théorème de Bernoulli n'est pas souhaitable, surtout si celles-ci ne sont pas correctement explicitées.

2016 Les limites de ce modèle sont souvent méconnues.

2015 Le jury invite les candidats à réfléchir davantage à l'interprétation de la portance et de l'effet Magnus. Les exemples cités doivent être correctement traités, une présentation superficielle de ceux-ci n'étant pas satisfaisante.

Jusqu'en 2013 le titre était : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide ; validité. Relation de Bernoulli ; limites et applications

2011-2014 La notion de viscosité peut être supposée acquise.

2010 Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et de ses limites sans faire appel à la notion de viscosité que l'on pourra supposer connue. Les conditions aux limites imposées à un fluide s'écoulant autour d'un obstacle solide doivent être justifiées. L'interprétation énergétique de la relation de Bernoulli est très mal connue.

2005 La différence entre écoulement incompressible et fluide incompressible est souvent ignorée, de même qu'entre écoulement parfait et fluide parfait.

Introduction

-On a vu NS et le concept de viscosité. Mais dans bien des situations, la viscosité ne semble pas être déterminante (dans l'air notamment).

Problématique : Comment modéliser des écoulements à "viscosité négligeable" ? Quelles conséquences et quelles limites à ce modèle.

1 Ecoulement parfait et équation d'Euler

1.1 Le fluide parfait

Source : GHP p. 135

-Qu'est-ce qu'un **fluide parfait** ? Fluide incompressible, pas de dissipation (visqueuse ou thermique), donc $\eta = 0$, $\lambda = 0$.

N.S. devient modifiée :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right) = -\vec{\nabla}P + \vec{f}_{vol}$$

où les forces volumiques sont le poids, les forces de MHD, les réf non-galiléens...

De plus, le fluide est isentropique.

(J'ai pas de réf et le calcul n'est pas très intéressant)

Démo : La conservation de l'énergie donne :

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_Q - P\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + Q$$

avec $\vec{J}_Q$ le vecteur densité de flux thermique, Q le transfert thermique apporté aus système. Or, le premier est nul, le second est supposé nul. La conservation de la masse donne le dernier terme nul via d$e = Tds - Pdv = TdS + P\frac{d\rho}{\rho^2}$

Conséquence intéressante : L'équation est réversible. On fait passer $\vec{v}$ à $-\vec{v}$ et t)à $-t$.

Tout ça, c'est vrai pour l'hélium superfluide ! (Le GHP l'étudie en annexe, ch.7. Vidéo ?) Mais dans le cas général, si ça semble logique, est-ce que c'est vrai ?

1.2 L'écoulement parfait

Source : GHP p. 135, Hprépa p. 95

Ecoulement parfait : Ecoulement d'un fluide approximé parfait.

Adimensionnalisation de NS :

$$\begin{array}{ccc} \vec{r'} & \leftrightarrow & \vec{r}/L \\ \vec{v'} & \leftrightarrow & \vec{v}/U \\ t' & \leftrightarrow & t/(L/U) \\ p' & \leftrightarrow & (p-p_0)/(\rho U^2) \end{array}$$

Ainsi, on obtient

$$\rho\left(\frac{U^2}{L}\partial_{t'}\vec{v'}+\frac{U^2}{L}\left(\vec{v'}\cdot\vec{\nabla'}\right)\vec{v'}\right)=-\frac{\rho U^2}{L}\vec{\nabla}'p'+\rho\vec{g}+\eta\frac{U}{L^2}\Delta'\vec{v'}$$

En divisant par $\frac{\rho U^2}{L}$

$$\partial_{t'}\vec{v'}+\left(\vec{v'}\cdot\vec{\nabla'}\right)\vec{v'}=-\vec{\nabla}'p'+\vec{g'}+\frac{1}{Re}\Delta'\vec{v'}\ ;\ Re=\frac{\rho UL}{\eta}$$

Ainsi, si le nombre de Reynolds est très grand, ce terme dégage et on retrouve l'équation d'Euler ! Pas de viscosité. Mais attention, il faut que l'écoulement reste laminaire afin d'éviter un régime chaotique imprédictible.

-ODG sur la dissipation : Est-ce que la diffusion est bien négligeable ? Pour ça, prenons les temps caractéristiques de la diffusion de quantité de mouvement, de température et de convection : $\begin{cases}\tau_{\vec{p}}=\dfrac{L^2}{\nu}\\ \tau_{th}=\dfrac{L^2}{D}\\ \tau_{conv}=\dfrac{L}{U}\end{cases}$

Le raisonnement est valable si $\tau_{conv}\ll\tau_{\vec{p}},\tau_{th}$. Ce qui quantifie cela, ce sont des nombres adimensionnées :

- Péclet thermique $Pe_\theta=\dfrac{\tau_{th}}{\tau_{conv}}=\dfrac{LU}{D}$
- Reynolds $Re=\dfrac{\tau_{\vec{p}}}{\tau_{conv}}$

$\rightarrow$ Pour un jet d'eau à l'issue d'un robinet, $L\sim1$ cm et $U\sim1$ m/s, $D_{th}=10^{-7}$ m^2/s, on tombe sur des nombres adimensionnés de l'ordre de 10^4 à 10^7, tout va bien. Pour une voiture roulant à 100 km/h dans l'air, à $D_{th}=2\times10^{-5}$ m$^2\cdot$ s^{-1} tout va bien aussi.

Attention, tout ce qui est dit ici est vrai loin des parois bien sûr, on peut le mentionner sans creuser. **Autre subtilité :** Certaines géométries voient l'annulation du terme convectif (Poiseuille). On n'aura donc jamais de fluide parfait, quelque soit le Reynolds !

Bon, est-ce que cette équation d'Euler donne un système fermé ? Les inconnues sont la vitesse, la pression et la masse volumique, soit 5 inconnues. (Attention, on a conservation de la masse, mais pas forcément incompressibilité !)

Hypothèses	Nombre d'équations
Euler	3
Conservation de la masse	1
? ? Equation d'évolution du fluide ? ?	1

Cette nouvelle équation ne peut pas être une équation d'état, qui rajouterait l'inconnue $T(M,t)$. On peut alors choisir

— Incompressibilité du fluide, $\rho = cte$

— Hypothèse isentropique ou isothermique, ce qui revient à considérer le cas compressible. Relation liant ρ et P. (cf Hprépa)

La seconde possibilité c'est de la culture gé. En soi on a posé dès le début l'incompressibilité, pas la peine de faire genre il y a du suspense.

Maintenant si on veut résoudre un problème, nécessité de connaître les conditions limites. Avant, la vitesse tangentielle était nulle. Maintenant, non-pénétrabilité, on peut l'expliquer avec les mains. Se déduit de div$\vec{v} = 0$.

Parfait ! Attaquons-nous à un problème.

1.3 Exemple : la cuve en rotation

Source : Je l'ai trouvé dans le Landau méca flu, p. 25 si besoin.

Le problème est tout bidon, on peut le calculer soi-même avec Euler qu'on gagnerait du temps. Analyse des symétries, des invariances, on peut ke faire en cylindrique.

Penser à calculer le Péclet et le Reynolds pour vérifier qu'on est bien en parfait.

Ce serait cool de faire l'expérience ! `https://youtu.be/Zip9ft1PgV0`

N.B. : Ici aussi on a une limite de Euler. La rotation du fluide est permise par la viscosité, il faudra en reparler au moment de passer au grand III/

Une alternative est les vents géostrophiques, voir le Portelli ou le Olivier p. 462.

Transition : Une forte signification énergétique !

2 Théorème de Bernoulli

2.1 Etablissement de l'équation

Source : Olivier p. 464

On fait tout bien dans le Olivier pour trouver le théorème de Bernoulli. Mention des hypothèses, avec réf galiléen, axe ascendant vertical pour z, écoulement parfait/incompressible/permanent, penser au réf galiléen. Projection le long d'une ligne de champ... Utilisation de l'incompressibilité de l'écoulement pour gérer ρ sans encombre. On mentionne le cas irrotationnel (ne pas faire le calcul).

2.2 Bilan d'énergie

Source : Je pense que ça doit être bien fait dans le Sanz PC-PC*

-Définition d'un système ouvert (Σ) avec un écoulement parfait, stationnaire, incompressible, soumis à la gravité uniquement (sur slide ?). Il n'y a pas d'apport externe d'énergie. Il y a un système entrant à t et un système sortant à $t + dt$: le système (Σ^*) fermé. Par conséquent, le bilan en énergie cinétique est :

$$
\begin{aligned}
dE_c^* =& E_c^*(t+dt) - E_c^*(t) && (1)\\
=& \underbrace{\frac{\partial E_c}{\partial t}}_{\text{Stationnaire, nul}} + \frac{1}{2}\delta m v_S(t+dt)^2 - \frac{1}{2}\delta m v_E(t)^2 && (2)\\
=& \frac{1}{2}(v_S - v_E)^2 D_m dt && (3)\\
\frac{\mathrm{d}E_c^*}{\mathrm{d}t} =& \frac{1}{2}(v_S - v_E)^2 D_m = P_{int}^* + P_{ext}^* && (4)
\end{aligned}
$$

Tout ça vaut 0 (stationnaire). Pour la puissance extérieure, on a les travaux de pression et la force de pesanteur. On en déduit :

$$P_{int}^* = D_m\left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho}\right)$$

On retrouve le théorème de Bernoulli, cette quantité étant conservée le long d'une ligne de courant. Interprétation énergétique : le théorème de Bernoulli, c'est la conservation de l'énergie **mécanique** car pas de dissipation.

Le fait que la transformation soit isentropique, ça va influencer l'énergie interne u, ici elle sera donc conservée.

2.3 Application : l'effet Venturi

Source : Jolidon p. 410, Olivier p. 466 `https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli%27s_principle` (vidéo sympa). Le phénomène : `https://www.youtube.com/watch?v=BGEgtuMifro`

On pose le système, on calcule Péclet/Reynolds.

> Expérience, on constate la dépression, blabla. Tout est dans le Jolidon.
>
> Bien penser à vérifier les hypothèses de stationnarité, de fluide parfait (au moins le mentionner).
>
> Elle est pas si évidente à réaliser, je pense qu'il faut notamment éviter un différentiel de pression entre l'entrée et la sortie, sinon on a une baisse de la pression dans le fluide. Essayer avec un vase de Mariotte. Mais Vincent avait pas mal galéré dessus, faut pas y consacrer trop de sa préparation.

-Faire un ODG sur la vitesse, cf. Olivier. Donc c'est un théorème très puissant qui permet pleins de choses !

Transition : Dans cette expérience on voit quand même une perte de charge !

3 Limites illustrées par un exemple

But de cette partie : modéliser une aile d'avion.

3.1 Le paradoxe de d'Alembert

Source : Olivier p. 470

Présentation de l'objet d'étude avec un beau schéma. Ecoulement parfait (pas besoin de calculer Re ou Pe, on le suppose parfait), irrotationnel, stationnaire. Le poids est négligé.

L'écoulement est **potentiel** ! Déf. On a l'équation de Laplace et on peut en déduire les vitesses.

Obtention de la pression $p(r = R, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\sin(\theta)^2)$ via la vitesse et le théorème de Bernoulli, valable dans tout l'espace.

Il faut mettre des belles images sur slide.

Une première limite est le fait qu'on ne puisse pas décrire de manière satisfaisante les interactions entre un fluide parfait et une surface.

3.2 La portance et la couche limite

Source : GHP ch. 10 pour la couche limite, GHP p. 237 pour le dév multipolaire (dans "écoulements potentiels"). Pour Kutta, GHP p. 273.

Attention les forces sont données par unité de longueur du cylindre.

Ce paragraphe est super riche, on peut toujours en dire plus. C'est vraiment une partie intéressante, il faut y arriver et au moins parler de couche limite. **Il faut la réorganiser, le propos n'a pas de fil rouge.**

Introduction du terme de **circulation** dans le développement précédent : déf. On affiche les lignes de courant.

Belles images.

CUP FLYERS

-Donc on a une portance, mais elle est carrément ad hoc ! En fait si on introduit pas cela, le théorème de Kelvin (démo possible) nous dit qu'on n'aura jamais de portance (écoulement irrotationnel parfait), les avions ne pourraient jamais décoller (on a introduit une circulation, on appelle ça le théorème de Kutta-Joukowski, voir par ici. Si on prend un profil d'aile d'avion, on a besoin de cette circulation, sinon les lignes de courant suivraient la pointe de l'aile avec un rayon de courbure nul et une vitesse infinie. La force de portance donne $\vec{F_p} = \rho\vec{\Gamma}\times\vec{U}$. Pour les ailes d'avion, c'est le profil asymétrique qui crée la circulation). D'où est-ce qu'elle vient ?

Ca vient de la couche limite. Blabla.

Donc on a une couche limite infime qui présente de fortes discontinuités, et donc des conséquences importantes. Il y a toute une théorie qui est non-comprise par les écoulements parfaits. Les écoulements parfaits le sont loin de cette couche limite.

Dépendance en $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}_e}}$ de la couche limite peut se démontrer facilement.

Conclusion

On a vu toutes les hypothèses du fluide parfait, ses implications (énergétiques), sa polyvalence mais aussi ses limites.

Ouvertures possibles : Etude de la couche limite.

Commentaires pendant la prépa aux oraux

— Connaître la distinction écoulement parfait / fluide parfait. Idem avec incompressible, note dans le Hprépa Méca flu p. 40 : fluide incompressible = ρ homogène partout. Ecoulement incompressible : ρ homogène localement via $\dfrac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$.

— Etre au point sur description lagrangienne/eulerienne.

— Penser à la force de masse ajoutée (cf Garing 1001 questions)

— Limite de compressibilité : GHP p. 102

— Seconde viscosité : GHP p. 134

— On peut caser l'effet Coanda (Jolidon p. 418 ou Water Dancing Ball avec une cannette) car c'est assez hypnotisant, mais je trouve que le message pédagogique est pas forcément plus évident.

— Tout ce qu'on a fait c'est sur un fluide parfait incompressible. Le Hprépa fait également tout le raisonnement avec une autre relation (coeff de compressibilité). C'est plus tricky, ça change Bernoulli.

— A noter que passer de Euler à Bernoulli réduit le nombre d'équations, on passe à un modèle 1D où la vitesse connue est la vitesse moyennée sur une section. On compense cela par l'introduction de pression et vitesse connues à l'infini.

— Il faut essayer d'avoir de beaux jets parfaits si besoin.

Leçon de Fred :

— Attention à ne pas s'embrouiller sur fluide parfait/écoulement parfait, beaucoup d'erreurs. Le CAP Prépa est clair dessus apparemment. Pareil pour incompressible. On dit "écoulement incompressible" presque tout le temps par simplicité.

— Pitot en incompressible, c'est pas vérifié dans la vraie vie mais on l'applique quand même. Pour aller plus loin, on se met en compressible. **La démo est dans le Physique PC de Olivier.**

Questions

- Pourquoi ce profil d'aile d'avion ?
- Historique de l'établissement de ces relations ?
- Limite de l'hypothèse incompressible ? Existe-t-il d'autres descriptions que cela pour le fluide parfait ?
- C'est quoi la crise de traînée ?
- Que se passe-t-il si le fluide est compressible pour l'équation d'Euler ?
- Qu'est-ce qu'un fluide barotrope ?
- Bernoulli en réf galiléen ? Ca marche plus.
- Questions sur la superfluidité.
- Mention d'autres applications du théorème de Bernoulli ? Tube de Pitot, Toricelli, pompe à vide...
- Quelle influence de la viscosité sur Bernoulli ? Terme de perte de charge singulière/régulière.
- Ressaut hydraulique ?

Passage de Fred pendant les oraux blancs

- D'autres modèles que l'écoulement parfait ? Ecoulement visqueux, équation de Stokes. Est-ce qu'il y en a d'autres ? Qu'est-ce qu'on peut chercher ? Rendre l'équation linéaire.
- Définition de l'écoulement parfait ? Du fluide parfait ? Ca existe pas en réalité ? Les superfluides.
- D'autres forces volumiques ?
- Condition pour avoir l'écoulement parfait : loin des parois et haut Reynolds. Est-ce que du coup on a un fluide parfait ? Non. Du coup Fred rectifie sa définition de l'écoulement parfait.
- C'est quoi la pression dans un jet d'eau au contact de l'atmosphère ? On peut le retrouver avec Euler avec un jet vertical, en considérant des particules fluides soumises à l'accélération de la gravité uniquement, alors $\frac{Dv}{Dt} = g$, on en déduit $\vec{\text{grad}} P = \vec{0}$. A l'intérieur du jet c'est P_0.
- Tube de Pitot : Faire le calcul pour un avion qui vole à une vitesse U. Est-ce pertinent ? Quelles hypothèses ? Parfait, galiléen, écoulement incompressible et stationnaire, irrotationnel pour Pitot. Est-ce que les hypothèses de Bernoulli sont vérifiées ? (Je pense qu'il faut bien préciser que la pression à travers la couche limite est la même) Qu'en est-il de l'hypothèse écoulement incompressible ? $v \ll c$? Non.
- Généralisation de Bernoulli dans le cas compressible ? Voir le Olivier Physique PC.