

Sens de rotation des vents autour d'un anticyclone
($p_3 < p_2 < p_1$) dans l'hémisphère Nord

Figure 2

2 ■ Théorèmes de Bernoulli

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que le référentiel d'étude est galiléen et que la seule force $d\mathbf{F}/d\tau$ est le poids, avec un champ de pesanteur \mathbf{g} uniforme.

2.1. Cas d'un écoulement parfait, stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène

Examinons les simplifications de l'équation d'Euler (2) correspondant aux hypothèses faites :

$$\mu \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} \right) = - \mathbf{grad} p + \mathbf{f}.$$

L'écoulement est stationnaire donc $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$. Il est irrotationnel donc $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$. Dans le champ de pesanteur uniforme, la force volumique s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \mu \mathbf{g} = - \mu \mathbf{grad} (gz).$$

D'où, en divisant par μ :

$$\mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = - \frac{1}{\mu} \mathbf{grad} p - \mathbf{grad} (gz).$$

L'écoulement étant incompressible et homogène*, μ est une constante qui peut passer à l'intérieur du gradient. En regroupant tous les termes il vient :

$$\mathbf{grad} \left(\frac{p}{\mu} + gz + \frac{v^2}{2} \right) = \mathbf{0}.$$

Un champ scalaire dont le gradient est nul est indépendant du point M ; c'est une fonction $f(t)$ du temps uniquement ; comme l'écoulement est stationnaire, c'est une vraie constante C . Le théorème de Bernoulli affirme donc que :

$$\frac{p}{\mu} + gz + \frac{v^2}{2} = C \quad (4)$$

prend la même valeur constante dans tout le fluide. Le théorème de Bernoulli apparaît ainsi comme une intégrale première spatiale de l'équation d'Euler, valable dans tout le fluide. Il fournit aisément un renseignement sur les vitesses en deux points où la pression est connue (imposée par exemple par des conditions aux limites), ou bien il permet de déterminer le champ de pression $p(M)$ connaissant le champ des vitesses $\mathbf{v}(M)$.

Notons qu'en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dans le théorème de Bernoulli, nous retrouvons la condition d'équilibre d'un fluide incompressible et homogène vue en PCSI.

2.2. Cas d'un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène

Par rapport au paragraphe précédent, nous renonçons à l'hypothèse « irrotationnel ». La simplification de l'équation d'Euler devient ici :

$$\text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\text{grad} \left(\frac{\rho}{\mu} + gz + \frac{v^2}{2} \right).$$

Pour éliminer le terme $\text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$, multiplions scalairement l'équation par $d\mathbf{M}$ et intégrons le long d'une ligne de champ entre deux points A et B ; ceci impose qu'en tout point le vecteur $d\mathbf{M}$ est parallèle au champ des vitesses \mathbf{v} :

$$-\int_A^B (\text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{M} = \int_A^B d\mathbf{M} \cdot \text{grad} \left(\frac{\rho}{\mu} + gz + \frac{v^2}{2} \right).$$

Le terme sous l'intégrale de gauche est égal au produit mixte $(\text{rot } \mathbf{v}, \mathbf{v}, d\mathbf{M})$; il est nul puisque $d\mathbf{M}$ est parallèle à \mathbf{v} . Par définition du gradient, le terme sous l'intégrale de droite est la différentielle df de la fonction $f = \rho/\mu + gz + v^2/2$. Il reste donc :

$$0 = \int_A^B df = f(B) - f(A) = \frac{\rho_B}{\mu} + g z_B + \frac{v_B^2}{2} - \frac{\rho_A}{\mu} - g z_A - \frac{v_A^2}{2}.$$

Le théorème de Bernoulli affirme finalement que pour deux points A et B appartenant à une même ligne de courant on a :

$$\frac{\rho_B}{\mu} + g z_B + \frac{v_B^2}{2} = \frac{\rho_A}{\mu} + g z_A + \frac{v_A^2}{2} \quad (5)$$

Il apparaît ainsi comme une intégrale première spatiale de l'équation d'Euler, restreinte aux points appartenant à une même ligne de courant. Ainsi l'abandon de l'hypothèse « irrotationnel » restreint le théorème de Bernoulli aux points d'une même ligne de courant^{3, 4}.

3. L'hypothèse homogène est en réalité inutile dans ce paragraphe. En effet, l'écoulement étant incompressible, on a $D\mu/Dt = 0$; l'écoulement étant stationnaire, ceci se réduit à :

$$0 = \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mu = 0 + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mu \quad \text{soit} \quad d\mu = d\mathbf{M} \cdot \text{grad } \mu = 0$$

car $d\mathbf{M} \parallel \mathbf{v}$. Ainsi μ ne varie pas le long d'une ligne de courant.

4. Pour un écoulement parfait, stationnaire, mais compressible, il n'est pas possible d'explicitement l'intégrale $\int_A^B d\mathbf{M} \cdot \text{grad } \rho/\mu = \int_A^B d\rho/\mu$ de telle sorte que le théorème de Bernoulli ne prend pas la forme d'une intégrale première spatiale mais s'écrit :

$$\int_A^B \frac{d\rho}{\mu} + \frac{1}{2}v_B^2 + g z_B - \frac{1}{2}v_A^2 - g z_A = 0.$$

De ce fait, ce théorème qui est exclu du programme de la filière PC PC*, est d'un usage peu courant. L'application du premier principe de la thermodynamique dans un tube de courant élémentaire avec la méthode du § 9.2.4. conduit à la relation :

$$h_B - h_A + \frac{1}{2}v_B^2 + g z_B - \frac{1}{2}v_A^2 - g z_A = w' + q = 0$$

car ici $w' = 0$ et $q = 0$. Ce résultat est à la fois plus général (l'écoulement n'est pas nécessairement parfait) et plus opérationnel (la variation d'enthalpie massique s'exprime plus aisément que l'intégrale $\int_A^B d\rho/\mu$) que le théorème de Bernoulli des écoulements compressibles.

2.3. Généralisation aux écoulements parfaits, instationnaires, irrotationnels, incompressibles et homogènes*

En l'absence de l'hypothèse « stationnaire », le terme $\mu(\partial \mathbf{v} / \partial t)$ subsiste dans l'équation d'Euler qui s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = - \frac{1}{\mu} \mathbf{grad} p + \mathbf{g}.$$

L'écoulement étant irrotationnel, le terme contenant $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ s'annule. D'autre part, l'écoulement étant incompressible et homogène, μ est une constante qu'on peut rentrer dans le gradient. En outre, $\mathbf{g} = - \mathbf{grad} (gz)$. Enfin, si ϕ désigne le potentiel des vitesses, on a :

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi \quad \text{donc} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{grad} \phi) = \mathbf{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

puisque d'après le théorème de Schwartz les dérivées secondes mixtes mêlant une dérivée spatiale et une dérivée temporelle commutent. En substituant dans l'équation d'Euler, nous obtenons :

$$\mathbf{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = - \mathbf{grad} \left(\frac{p}{\mu} + gz \right)$$

ce que nous pouvons regrouper en un seul gradient :

$$\mathbf{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\mu} + gz \right) = \mathbf{0}.$$

Un champ scalaire dont le gradient est nul est indépendant du point M ; c'est une fonction $f(t)$ du temps uniquement. Nous obtenons donc l'intégrale première spatiale suivante, valable dans tout le fluide :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\mu} + gz = f(t) \quad (6)$$

qui généralise le théorème de Bernoulli.

3 ■ Quelques applications des théorèmes de Bernoulli

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que les conditions d'application du deuxième théorème de Bernoulli sont réunies : les écoulements sont parfaits, stationnaires, incompressibles et homogènes ; le référentiel d'étude est galiléen et le seul champ de force extérieur est le champ de pesanteur uniforme.

Dans les applications envisagées, le fluide est fréquemment l'air ; rappelons que l'hypothèse de l'écoulement incompressible est néanmoins convenable si l'ordre de grandeur des vitesses v est tel que $v^2/c^2 \ll 1$ où c est la célérité des ondes sonores⁵.

5. Avec $c \approx 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans l'air dans les conditions usuelles de température et de pression, la condition $v^2/c^2 \ll 1$ n'est pas très contraignante.

On dit que la prise de pression axiale est une prise de *pression statique* car la pression p_B qu'elle mesure dépend de la pression loin du tube de Pitot mais ne dépend pas de la vitesse loin du tube.

En rassemblant les expressions de p_A et p_B , nous obtenons :

$$p_A - p_B = \mu \frac{v_\infty^2}{2}.$$

Connaissant la masse volumique μ de l'air, la mesure de $p_A - p_B$ donne donc accès à la vitesse v_∞ . Numériquement dans l'air, avec une soufflerie où $v_\infty = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ on obtient $p_A - p_B \approx 10^3 \text{ Pa} = 0,01 \text{ bar}$ ce qui est aisé à mesurer.

3.3. Portance des avions

a) Étude quantitative d'une aile cylindrique

Nous reprenons le modèle étudié au § 14.3. (Fig. 6) : l'aile d'avion est un cylindre infini d'axe horizontal Oz et de rayon R , en mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse $U \mathbf{u}_x$. Loin de l'avion l'air est au repos. Nous étudions l'écoulement dans le référentiel de l'aile d'avion. Dans ce cas, loin de l'aile on a $\mathbf{v}(\infty) = -U \mathbf{u}_x$. Nous supposons que l'écoulement est *incompressible*⁹ et *irrotationnel*¹⁰. L'étude du § 14.3. fournit les composantes du champ des vitesses en coordonnées cylindriques :

$$v_r = -U \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \quad \text{et} \quad v_\theta = U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

ce qui conduit immédiatement à la valeur de la vitesse sur l'aile où $r = R$:

$$\mathbf{v} = 0 \mathbf{u}_r + 2U \sin \theta \mathbf{u}_\theta \quad \text{soit} \quad \|\mathbf{v}\| = 2U |\sin \theta|$$

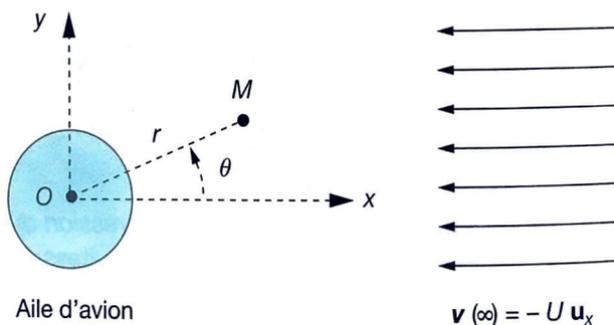


Figure 6

L'écoulement étant irrotationnel, nous pouvons utiliser le théorème de Bernoulli fort. En négligeant le poids¹¹ et en exprimant la constante à l'infini, nous obtenons la pression sur l'aile :

$$p(r = R, \theta) + \frac{1}{2} \mu v^2(r = R, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \mu v_\infty^2$$

soit

$$p(r = R, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \mu U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta).$$

9. Ce qui revient ici à supposer que l'avion est subsonique : $U \ll c$.

10. Cette hypothèse peut paraître arbitraire. En réalité Kelvin et Lagrange ont montré qu'un écoulement parfait dans le champ de pesanteur uniforme reste irrotationnel à tout instant s'il l'est à l'instant $t = 0$. Dans le cas de l'avion, l'air est au repos avant le décollage, et l'écoulement initial est donc irrotationnel. On s'attend donc à ce que l'écoulement soit irrotationnel ultérieurement.

11. Le lecteur pourra vérifier que le poids de l'air donne une résultante des forces de pression égale à la poussée d'Archimède, dont l'expérience montre qu'elle n'est pas responsable du fait que les avions volent.

L'aile est donc soumise à des forces de pression dF représentées sur la figure 7 en quatre points d'angles θ , $-\theta$, $\pi - \theta$ et $\pi + \theta$, ce qui fait apparaître sans calculs la nullité de la résultante de ces forces par compensation deux à deux. Ainsi dans le cadre du modèle adopté, l'aile d'avion ne subit aucune portance : ce résultat, non conforme à l'expérience, constitue le paradoxe de d'Alembert. On peut montrer - hélas - qu'il est valable quelle que soit la forme de la section de l'aile.

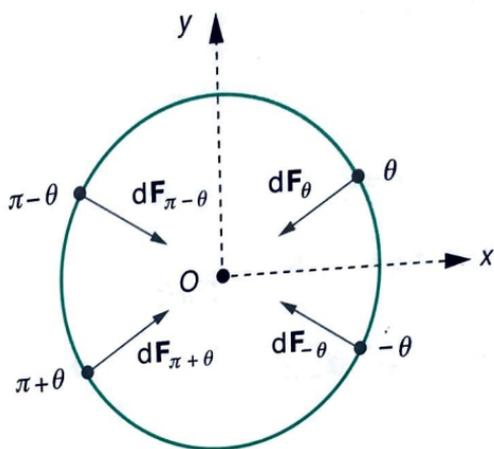


Figure 7

b) Étude qualitative sur une aile réelle

Nous aurions pu affirmer l'absence de portance rien qu'en remarquant que l'écoulement adopté dans le modèle est symétrique par rapport au plan horizontal $\theta=0$. Pour une aile réelle, l'écoulement est dissymétrique (Fig. 8) : les lignes de champ s'écartent au voisinage de B et se resserrent au voisinage de A, de telle sorte que :

$$v_B < v_\infty = U ; \quad v_A > v_\infty = U$$

et le théorème de Bernoulli assure que $p_B > p_A$. C'est donc la dissymétrie de l'écoulement autour de l'aile qui donne naissance à la portance. On peut noter que cette dissymétrie est équivalente au fait que la circulation de \mathbf{v} sur le contour limitant la section de l'aile orienté dans le sens trigonométrique autour de \mathbf{u}_z , est positive :

$$\oint_{(C)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} > 0$$

car la contribution positive du voisinage de A (où $\mathbf{v} \parallel d\mathbf{l}$) l'emporte sur la contribution négative du voisinage de B (où $\mathbf{v} \parallel -d\mathbf{l}$).

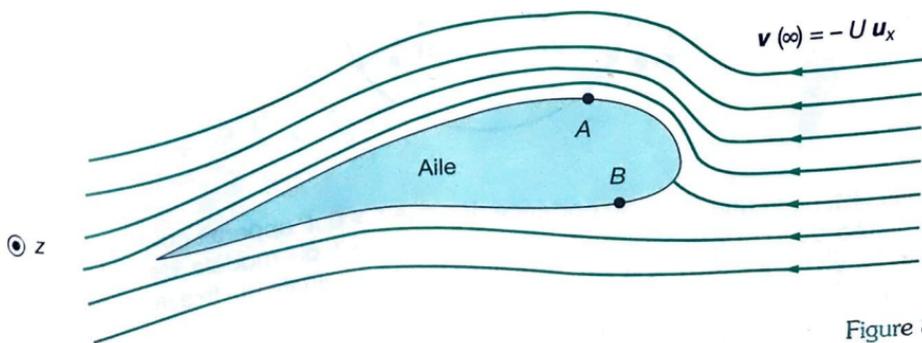


Figure 8

c) Nouvelle étude quantitative sur une aile cylindrique

Ceci donne l'idée d'utiliser l'écoulement modifié étudié dans la résolution type 14.B où on a superposé un vortex d'intensité Γ à l'écoulement du § 14.3. pour obtenir :

$$v_r = -U \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right); \quad v_\theta = U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

ce qui conduit immédiatement à la valeur de la vitesse sur l'aile où $r = R$:

$$\mathbf{v} = 0 \mathbf{u}_r + \left(2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right) \mathbf{u}_\theta$$

puis à la pression sur l'aile *via* le théorème de Bernoulli fort :

$$p(r = R, \theta) + \frac{1}{2} \mu \left(2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \mu v_\infty^2$$

$$p(r = R, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \mu \left(U^2 - 4U^2 \sin^2 \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2}\right) - \frac{\mu \Gamma U \sin \theta}{\pi R}$$

Nous avons déjà vu que les termes indépendants de θ et proportionnels à $\sin^2 \theta$ dans la pression donnent une contribution nulle à la résultante des forces de pression. Il reste donc :

$$\mathbf{F} = - \iint - \frac{\mu \Gamma U \sin \theta}{\pi R} dS \mathbf{u}_r = \iint \frac{\mu \Gamma U \sin \theta}{\pi R} dS \mathbf{u}_r$$

Une nouvelle figure (Fig. 9) avec les quatre points d'angles θ , $-\theta$, $\pi - \theta$ et $\pi + \theta$, fait apparaître sans calculs que \mathbf{F} est dirigée selon la verticale ascendante \mathbf{u}_y . On calcule alors F_y en projetant les forces élémentaires sur \mathbf{u}_y :

$$dF_y = \frac{\mu \Gamma U \sin \theta}{\pi R} dS \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_y = \frac{\mu \Gamma U \sin \theta}{\pi R} (R d\theta dz) \sin \theta = \frac{\mu \Gamma U}{\pi} \sin^2 \theta d\theta dz$$

$$F_y = \frac{\mu \Gamma U}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^L dz = \left(\frac{\mu \Gamma U L}{\pi}\right) \left(\frac{2\pi}{2}\right) \text{ soit } F_y = \mu \Gamma U L$$

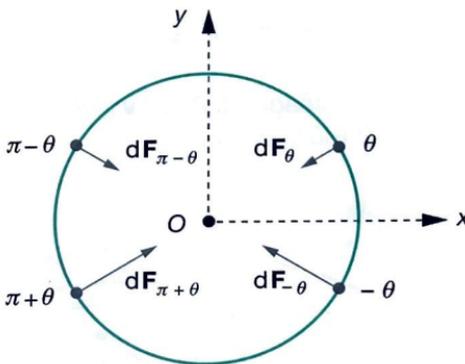


Figure 9

Nous obtenons une force de portance dès que $\Gamma > 0$. Γ apparaît comme une indéterminée du problème, due au caractère excessif du modèle de l'écoulement parfait : en pratique c'est la viscosité dans la couche limite qui fixe la valeur de Γ .

12. Pour un écoulement parfait, Kelvin et Lagrange ont montré qu'une circulation d'air autour de l'aile ne peut pas naître dans le cas d'un avion parti du repos car la circulation $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ sur toute courbe fermée se conserve en suivant au cours du temps les particules de fluide qui y sont situées. C'est donc bien la viscosité qui est responsable de la portance.

Cette valeur est proportionnelle à la vitesse de l'avion ce qui conduit à une portance de la forme $F = C_z \mu S V^2$. Le coefficient sans dimension C_z est appelé coefficient de portance ; il dépend cruciallement de la forme et de l'inclinaison de l'aile décrite par l'angle d'attaque α : C_z croît avec α jusqu'à un certain angle critique α au-delà duquel la portance s'effondre de telle sorte que l'avion décroche.

d) Effet Magnus

On peut stimuler les effets de la viscosité sur Γ en faisant tourner l'aile autour de son axe : c'est l'effet Magnus ¹³. L'effet Magnus joue un rôle essentiel dans les jeux de balles et de ballons où selon qu'une balle est coupée ou liftée, sa trajectoire est raccourcie ou prolongée (voir question 4. du « Faire le point »).