

LP00 – Titre

29 juin 2020

Laura Guislain & Pascal Wang

Niveau :

Commentaires du jury

Bibliographie

✦ *Le nom du livre, l'auteur*¹

→ Expliciter si besoin l'intérêt du livre dans la leçon et pour quelles parties il est utile.

Prérequis

➤ prérequis

Expériences

☞ Biréfringence du quartz

Table des matières

1	Notion de tension de surface	4
1.1	Description mécanique	4
1.2	Origine microscopique	4
1.3	Description thermodynamique de la tension de surface	5
1.4	Quand prendre en compte la tension de surface ?	6
2	Interfaces à l'équilibre	7
2.1	Loi de Young-Dupré	7
2.2	Loi de Laplace	8
2.3	Application : la loi de Jurin	10
3	Interfaces et stabilité	11
3.1	Nucléation homogène	11
3.2	Instabilité de Rayleigh-plateau	12
4	Ondes gravito-capillaires	12
4.1	Relation de dispersion	13
5	Capillarité	17
5.1	Tension superficielle	17
5.1.1	Constats expérimentaux	17
5.1.2	Origine microscopique	18
5.1.3	Définitions	18
5.1.4	ODG et dépendances	18
5.1.5	Quand prendre en compte la tension de surface ?	18
5.1.6	Aspects microscopiques	18
5.1.7	Dans la nature	18
5.2	Interface entre deux fluides	18
5.2.1	Loi de Laplace	18
5.2.2	Applications	18
5.3	Interface triple et mouillage	19
5.3.1	Généralités	19
5.3.2	Loi de Young-Dupré	19
5.3.3	Milieu poreux	19
5.3.4	Loi de Darcy	19
5.3.5	Mouillages spéciaux	19
5.3.6	Effet Marangoni	19
5.4	Mesure de tension de surface	20
5.4.1	Tensiométrie par arrachement	20

5.4.2	Tensiométrie par analyse de forme	20
5.4.3	Incertitudes	20
5.5	Compétition gravité-pesanteur	20
5.5.1	Forme du ménisque	20
5.5.2	Ascension capillaire	20
5.6	Tensioactifs	21
5.7	Instabilités	21
5.7.1	Instabilité de Rayleigh-Taylor	21
5.7.2	Instabilité de Rayleigh-Plateau	21
5.7.3	Instabilité de Saffman-Taylor	21
5.7.4	Instabilité de Kevin Helmholtz	21
5.7.5	Instabilité de Faraday	22
5.7.6	Culture	22
5.7.7	Ondes gravito-capillaires	22
5.7.8	Approximation de lubrification	22

Préparation

Biblio : le polydon <https://arxiv.org/pdf/1510.05508.pdf>,

Préparation : Voir lidon en parallèle pour les démo.

Plan : Young-Dupré est fastidieux (avec les forces c'est plus rapide), finalement on vira la loi de Jurin. Pour 30 min, je suggère I/ garder tel quel II/ 1) Young Dupré 2) Loi de Laplace. III/ 1) Rayleigh-Plateau si on a le temps, sinon directement faire 2) ondes gravito-capillaires, avec lequel on a beeeaucoup matière à temporiser.

Questions : méthodes de mesure de tension de surfaces, difficultés (pureté et température), savon, micelles et formes, paramètre d'étalement, chambre à brouillard, instabilités, loi Washburn, ondes gravito-capillaire,

Prérequis

Statique des Fluides, thermodynamique

Biblio

- <https://arxiv.org/pdf/1510.05508.pdf> Cours de Pierre Lidon.
- Gouttes, bulles, perles et ondes, De Gennes, Brochart Wyatt, Quéré
- Thermodynamique, DGLR. Nucléation.
- Mécanique des fluides, Landau
- Hydrodynamique physique, Guyon, Hulin, Petit. Pour la dynamique
- BUP 851, Gheusi. Energie > force ?
- Vidéo de la bulle qui se vide dans l'autre, au cas où https://www.youtube.com/watch?v=ZsihLmIm024&feature=emb_title

Introduction

Au cours des dernières leçons sur la mécanique des fluides, nous avons vu comment décrire un écoulement à l'aide de quelques propriétés des fluides, tels que leur masse volumique ou leur viscosité. On a vu les conditions aux limites avec des interfaces solides, selon si l'écoulement est parfait ou visqueux. Cependant, l'interface entre des fluides comme l'eau et l'air ont des particularités qu'on va étudier.

Définition : capillarité La capillarité est le phénomène d'interaction qui se produit aux interfaces entre deux liquides non miscibles, entre un liquide et l'air ou entre un liquide et une surface.

Trombone/punaise qui flotte

On montre la vidéo : https://youtu.be/82ANES4V_sI?t=33. Le trombone coule lorsqu'on la fait tomber brusquement. C'est ce qu'on attend : la densité de l'aluminium est **ODG**: $d = 2.7$. En procédant délicatement, on voit qu'on peut la faire flotter. Contrairement aux bateaux qui flottent grâce à la poussée d'Archimède, ici, la poussée d'Archimède qui a tendance à faire couler la punaise. On conclut qu'il est possible que le fluide exerce une force vers le haut. **Sur la vidéo, on voit que la surface est déformée lorsqu'on fait bouger la punaise.** Ce phénomène met en jeu de petits objets : les petits insectes comme la gerris, **montrer une photo**, ne coulent pas.

Objectif Décrire ce phénomène macroscopiquement, interpréter microscopiquement, applications.

1 Notion de tension de surface

1.1 Description mécanique

Films de savon percés

On montre la vidéo <https://youtu.be/DZ0B5GVAXJg?t=71>, **en faisant un schéma**. On pose un barreau sur un cadre rectangulaire rempli d'un film de savon. On perce d'un côté, le film de savon de l'autre côté "tire" le barreau. La surface tend à se rétracter.

Mise en évidence d'une force Cette expérience met en évidence la force qu'exerce le film de savon sur son propre contour : il tire chaque portion élémentaire de la barre, qui se déplace. Le cadre rectangulaire ne se déforme pas sensiblement car à cause de sa rigidité. *Si on montre l'expérience avec le fil, on peut dire qu'à l'équilibre, la tension du fil compense exactement la force exercée par la membrane.*

Tension de surface C'est la force qui "tend à faire rétracter l'interface", ramenée à une unité de longueur du fil que nous appellerons tension superficielle.

Définition mécanique La tension superficielle est une force linéique, contenue dans le plan de l'interface et dirigée vers le liquide, qui s'exerce dans la direction orthogonale au bord de l'interface. **On fait un schéma du cadre rectangulaire.** $dF = \gamma dL$, γ en N/m, qui dépend de la nature des deux interfaces. Dans l'exemple du barreau, il y a deux interfaces savon/air à prendre en compte.

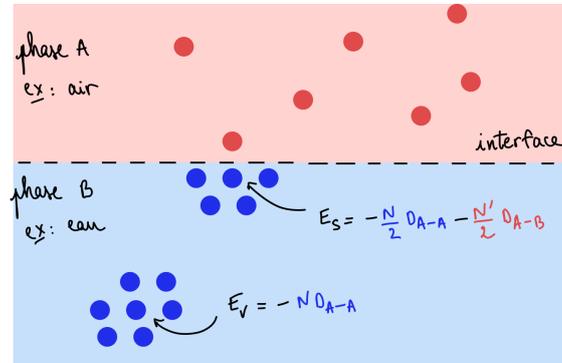
Retour sur le trombone et ordre de grandeur Un fil métallique de rayon r et de densité ρ a donc une masse linéique $\pi r^2 \rho$. Son poids linéique peut donc être compensé par la tension de surface si : $\gamma > g \pi \rho r^2$. **On fait un schéma avec les forces indiquées en flèches.** Il pourra donc flotter tant que son rayon est plus petit que le rayon critique $r_c = \sqrt{\gamma/g\pi\rho}$. Pour de l'eau et un métal, on trouve $r_c \sim 1\text{mm}$ ce qui est cohérent avec ce qu'on a vu.

1.2 Origine microscopique

Défaut d'interaction stabilisantes Considérons deux phases homogènes A et B séparées par une interface. **On fait un schéma.** Dans une phase homogène, les interactions entre les différentes molécules (forces de Van der Waals, interactions hydrogène, liaisons ioniques, métalliques...) assurent la cohésion de la matière. Une molécule au milieu de cette phase est en interaction avec des molécules voisines dans toutes les directions de l'espace. Par exemple, dans la phase A, l'énergie d'interaction d'une molécule en volume est $\sim ND_{A-A}$ où N est le nombre de voisins moyens avec qui la molécule interagit et $D_{A-A} < 0$ (**ODG**: eV, ou dizaine de kJ/mol) est l'énergie d'interaction stabilisante. En revanche, pour une molécule A située à l'interface de cette phase A avec l'autre phase B, l'énergie d'interaction est

$\sim N/2D_{A-A} + N'/2D_{A-B}$. Si $ND_{A-A} < N'D_{A-B}$, soit parce que N' est petit (interface liquide-vapeur), soit parce que $D_{A-A} < D_{A-B}$ (interface liquide-liquide), l'énergie de la molécule à l'interface est plus importante que celle en volume, ainsi la présence de l'interface a un coût énergétique. Dans le cas contraire, $D_{A-A} > D_{A-B}$, il est avantageux énergétiquement de rapprocher A et B : les deux phases sont miscibles.

Conséquence de la minimisation de l'interface A l'équilibre en contact avec un thermostat et un réservoir de pression, le système tend à minimiser son énergie libre. On vient de voir qu'une interface est énergétiquement défavorable. Cela explique bien la force macroscopique observée précédemment, qui tendait à réduire l'aire de l'interface.



↓ Cette interprétation énergétique microscopique permet une définition alternative de la tension de surface.

1.3 Description thermodynamique de la tension de surface

Définition thermodynamique En première approximation, le défaut énergétique est proportionnel au nombre de molécules à l'interface donc à son aire. On propose une autre définition de la tension de surface avec l'énergie interne et tout autre potentiel thermodynamique avec les bonnes variables fixées tel que :

$$\gamma = \left(\frac{\partial U}{\partial A} \right)_{V,S,n} = \left(\frac{\partial G}{\partial A} \right)_{T,P,n}. \quad (1)$$

Ainsi, lorsque l'aire A devient une variable thermodynamique pertinente du problème *si la forme est imposée*, A et V sont liés. Mais si la forme n'est pas imposée, A et V sont des variables indépendantes.

$$dU = -PdV + TdS + \mu dn + \gamma dA \quad (2)$$

$$dG = VdP - SdT + \mu dn + \gamma dA \quad (3)$$

On interprète alors γ comme une énergie par unité de surface.

Lien avec la définition macroscopique Pour étirer une interface entre deux fluides, il faut exercer une force sur son contour qui compense celle qui tend à la faire se rétracter, et donc fournir un travail. On peut alors associer le travail, $\delta W_{rev} = \gamma dA$ travail à fournir pour agrandir l'interface.

Conclusion

La tension de surface est issue de défauts d'interactions stabilisantes pour les molécules de l'interface. On peut la décrire comme une force linéique ou une énergie surfacique, On peut adopter les deux points de vue.

↓ Maintenant qu'on a défini la tension de surface, on va donner des ordres de grandeur et voir dans quelles situations on doit la prendre en compte.



1.4 Quand prendre en compte la tension de surface ?

Estimation En terme d'ordre de grandeur, considérons une interface liquide-vapeur où la vapeur est l'air et notons a la taille d'une molécule et U l'énergie de cohésion par molécule. Amener la molécule à l'interface augmente la surface de celle-ci de a^2 et diminue l'énergie de cohésion du système de $U/2$. on a donc

$$\gamma_{LV} \sim \frac{U}{2a^2}$$

. Pour estimer l'énergie de cohésion, on peut dire qu'à l'ébullition, la cohésion compense l'agitation thermique tel que $U \sim k_B T_{éb}$. Finalement, on a une estimation pour la tension de surface de l'ordre de :

$$\gamma_{LV} = \frac{k_B T_{éb}}{2a^2}. \quad (4)$$

Pour l'eau, on prend $a \sim 2\text{Å}$ et $T_{éb} \sim 400\text{K}$. On trouve que $\gamma_{LV} \sim 75\text{mN.m}^{-1}$, pour une valeur tabulée à 20°C de $\gamma_{LV,tab} = 72,25\text{mN.m}^{-1}$. On trouve donc ici une très bonne estimation de la tension de surface de l'eau, mais ceci est à prendre avec des pincettes. *Par ailleurs, la dépendance en température de la tension superficielle n'apparaît pas dans ce modèle simpliste.*

Ordres de grandeur \blacktriangleleft GBPO p.13, Wikipedia [On projette des ordres de grandeur](#)

Liquide	Tension de surface avec l'air à 20°C (mN/m)	Nature des liaisons
Huile	20	interaction de Van der Waals
Eau	72,25	liaison hydrogène
Sels fondus	120	liaison ionique
Mercure, étain liquide	400	liaison métallique

On peut interpréter ces ordres avec la nature des interactions intermoléculaires. L'eau forme des liaisons hydrogène intermoléculaires qui augmentent sa tension de surface, contrairement à l'huile.

Bonus : fluide anisotrope Nous ne nous intéresserons dans ce cours qu'au cas d'interfaces avec un fluide isotrope. Pour des solides ou des cristaux liquides, par exemple, la tension de surface dépend de l'orientation de l'interface par rapport aux axes des phases considérées (tenseur).

Dépendance en température et composition La tension de surface dépend de la température, les composés de l'interface, les phases des composés et les possibles impuretés dans chaque phase *les impuretés baissent souvent la tension de surface, sauf le sel à cause des interactions ioniques*. La tension de surface a tendance à diminuer lorsque la température augmente (la vapeur et le liquide se ressemblent plus à haute température, ou encore les interactions de VdW en $1/T$ sont moins fortes, $\gamma = 0$ au point critique, où il n'y a qu'une seule phase) et lorsqu'il y a présence d'impuretés.

Compétition surface-volume Si les termes de surface dominant par rapport aux termes de volume, c'est qu'on est à petite échelle : milieux poreux et capillaires, ou qu'il y a beaucoup d'interfaces : émulsions et mousses.

Compétition avec la gravité La gravité est une force de volume, de force volumique caractéristique $f_v \sim \rho g$. La tension de surface est une force linéique $f_l \sim \gamma$. On peut former une longueur caractéristique : la longueur capillaire

$$l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$$

. En présence de gravité, la capillarité domine à $l \ll l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$. **ODG:** pour l'eau dans les cntp, $l_c = 2.7\text{mm}$. Ainsi,

La tension de surface domine à petite échelle. La contribution de l'énergie de pesanteur est négligeable tant que le nombre de Bond $Bo = (R/l_c)^2 \ll 1$: c.

La longueur capillaire est du même ordre de grandeur pour différents fluides alors que la tension de surface ne l'est pas.

2 Interfaces à l'équilibre

2.1 Loi de Young-Dupré

Problème On montre une photo de goutte/une manip. Le mouillage est l'étude de l'étalement d'un liquide déposé sur un substrat, solide ou liquide. Cet étalement donne lieu à une ligne de contact entre trois phases : le liquide déposé, le substrat, et le gaz environnant. Cette ligne est appelée ligne triple. L'angle θ_E entre les interfaces liquide-gaz et solide-liquide au niveau de la ligne triple est appelé angle de contact. Le mouillage résulte de la compétition entre les affinités relatives des trois phases les unes pour les autres, décrites par les 3 tensions de surface : liquide-vapeur γ_{LV} , solide-liquide γ_{SL} et solide-vapeur γ_{SV} .

Paramètre d'étalement On appelle paramètre d'étalement S la différence d'énergie surfacique entre le substrat sec et le substrat mouillé :

$$S = E_{\text{sec}} - E_{\text{mouillé}} = \gamma_{SG} - (\gamma_{SL} + \gamma_{LV})$$

- Si $S > 0$, l'énergie surfacique est abaissée en recouvrant le substrat avec le liquide : le liquide s'étale complètement en un film, dont l'épaisseur nanométrique résulte de la compétition entre la capillarité et les forces d'interaction à l'échelle moléculaire. On parle de mouillage total. Exemple : huile/verre/air.
- Si $S < 0$, le liquide ne s'étale pas entièrement mais forme un angle de contact θ_E avec le substrat. On est dans une situation de mouillage partiel. On distingue alors un liquide plutôt mouillant pour lequel $\theta_E \leq \pi/2$, et un liquide plutôt non mouillant, pour lequel $\theta_E \geq \pi/2$. Exemple : eau/air/verre, eau/air/lotus.

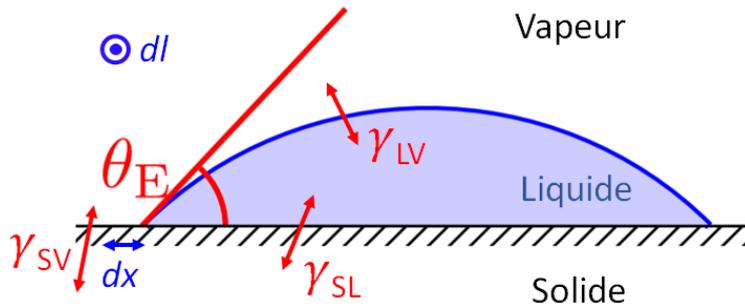


FIGURE 1 – Schéma de l'interface triple entre un solide, un liquide et un gaz et les tensions de surface correspondantes.

Approche énergétique L'approche avec les forces est délicate pédagogiquement (i) c'est quoi comme système la ligne triple ? A l'échelle moléculaire, pas sûr que les 3 interfaces soient voisines (ii) La composante verticale tire le substrat vers le haut. L'étalement de la goutte d'une distance dx dans le plan du schéma et d'une distance dl dans le plan orthogonal au schéma introduit une variation de surface différente pour chaque interface. Regardons cela suivant la direction x .

- Pour l'interface solide-liquide, $dA = dxdl$ (la surface de contact entre le solide et le liquide augmente quand la goutte s'étale).
- Pour l'interface solide-vapeur, $dA = -dxdl$ (la surface de contact entre le solide et le gaz diminue quand la goutte s'étale).
- Pour l'interface liquide-vapeur, $dA = \cos(\theta_E)dxdl$ (la surface de contact entre le liquide et le gaz augmente quand la goutte s'étale).

D'un point de vue énergétique, on en déduit :

$$\begin{aligned} dE &= \gamma_{SL}dxdl - \gamma_{SV}dxdl + \gamma_{LV}\cos(\theta_E)dxdl \\ &\stackrel{!}{=} 0 \text{ à l'équilibre.} \\ \Rightarrow \cos(\theta_E) &= \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LV}} : \text{loi de Young-Dupré.} \end{aligned} \quad (5)$$

On peut distinguer plusieurs cas en fonction de la valeur du numérateur.

- Si $\gamma_{SV} > \gamma_{SL}$, $\theta_E < \frac{\pi}{2}$: le liquide est qualifié de mouillant, c'est-à-dire qu'il va avoir tendance à bien s'étaler. C'est le cas de la majorité des liquides de la vie courante.

- Si $\gamma_{SV} < \gamma_{SL}$, $\theta_E > \frac{\pi}{2}$: le liquide est qualifié de non mouillant, c'est-à-dire qu'il va avoir tendance à ne pas s'étaler. C'est le cas du mercure, ou des surfaces hydrophobes fluorés, type téflon.

Ordre de grandeur Il faut montrer une photo et donner des ordres de grandeur, montrer des surfaces hydrophiles/phobes.

Application Expérimentalement, cette relation permet, ayant mesuré deux des tensions superficielles et l'angle de contact, d'obtenir la troisième tension de surface. C'est une méthode commode pour obtenir les tensions de surface avec les phases solides car elles sont souvent très faibles et par conséquent difficiles à mesurer directement.

Forme de la goutte en fonction de la taille On montre le schéma de De Gennes, on essaie de trouver de vraies images de gouttes. L'angle de contact ne dépend pas de la taille de la goutte. La forme dépend de la taille : les petites gouttes, de rayon $r \leq l_c$ ont une forme de calotte sphérique. Les grosses gouttes $r \geq l_c$ sont aplaties en forme de cylindre, dont le bord a dimension $\sim l_c$. On représente souvent les gouttes en forme de larmes. C'est peut-être dû à l'hystérésis de mouillage, qui donne un angle différent à l'avant et l'arrière. De plus, la friction avec le support peut donner une forme profilée pendant la dynamique. Cependant, une goutte de pluie qui tombe n'a pas la forme de larme : http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/JEMcDonald/mcdonald_jm_11_478_54.pdf, mais plutôt un front plat, dû au frottement avec l'air.

Limites de la loi de Young-Dupré

- rugosités (défauts physiques) et impurétés (défauts chimiques) modifient la loi
- non unicité de l'angle de contact à cause de l'hystérésis induite par l'ancrage de la ligne triple sur les défauts. L'angle d'avancée et l'angle de réculée sont différents
- la déformation du substrat sous les formes capillaires peut changer la loi de Young-Dupré. L'échelle de déformation est la longueur élasto(capillaire $\delta \sim \gamma/E$ avec E le module de Young du matériau. C'est la composante verticale de la force s'exerçant sur la ligne triple.

En mesurant l'angle de contact et en connaissant deux des trois tensions de surface, il est théoriquement possible de remonter à la dernière tension de surface inconnue avec la loi de Young-Dupré. Cependant, les difficultés expérimentales nous poussent à considérer un autre système pour mesurer les tensions de surface, à savoir un capillaire plongé dans un liquide.

2.2 Loi de Laplace

Problème On montre une bulle. La bulle est très sphérique. On peut montrer que la sphère minimise la surface donc l'énergie à volume constant : c'est le théorème isopérimétrique. Cependant, la bulle a tendance à encore s'effondrer sur elle-même. Pour qu'elle soit à l'équilibre, il faut qu'il existe une surpression interne qui compense la tension de surface. C'est ce qu'on va étudier.

Argument dimensionnel On va prévoir qualitativement ce résultat en écrivant que les forces de pression, qui tendent à agrandir la bulle de l'intérieur, compensent les forces superficielles qui tendent à rétracter l'interface. Ces forces sont respectivement homogènes à $\Delta P r^2$ et γr soit $\Delta P \sim 1/r$. On va le vérifier rigoureusement.

Système et conditions thermodynamiques Le système considéré est une { bulle sphérique + gaz à l'intérieur }, de rayon R , à la température T et à la pression P . Elle est en contact avec un deuxième fluide qui est considéré comme un thermostat à la température T_0 et un pressio-stat à la pression P_0 . Il n'y a pas transfert de matière. Le système est considéré comme fermé : cela suppose soit que l'interface ne laisse pas passer les molécules. Cela revient à supposer que l'échelle de temps sur laquelle les équilibres mécaniques et thermiques s'établissent est petite devant celle de l'équilibre osmotique, ce qui très est raisonnable pour l'équilibre, mécanique et tout juste pour l'équilibre thermique rapide car le coefficient de diffusion thermique de l'eau a à peine un ordre de grandeur de plus que le coefficient d'autodiffusion.

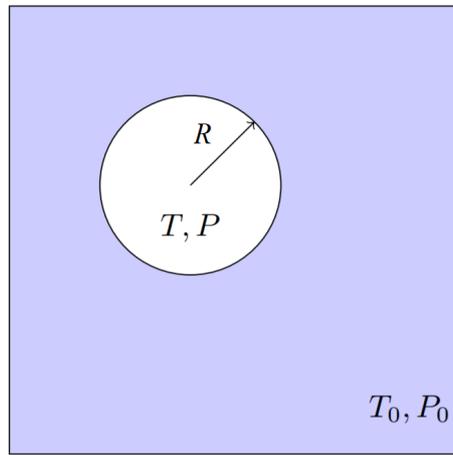


FIGURE 2 – Une bulle sphérique de rayon R à la température T et la pression P est en équilibre avec un fluide de température T_0 et pression P_0 constantes.

Recherche de l'équilibre Puisque le deuxième fluide est à température et pression constantes, on minimise le potentiel thermodynamique G^* par rapport à ses variables naturelles (S, V, A).

$$G^* = U - T_0 S + P_0 V, \quad (6)$$

où U est l'énergie interne de la bulle. La différentielle de G^* s'écrit comme :

$$\begin{aligned} dG^* &= dU - T_0 dS + P_0 dV \\ &= -PdV + TdS + \gamma_{LV} dA - T_0 dS + P_0 dV \text{ en introduisant le terme de la tension de surface.} \\ &= -(P - P_0)dV + (T - T_0)dS + \gamma_{LV} dA \end{aligned} \quad (7)$$

Pour une goutte sphérique, les variables V et A ne sont pas indépendantes. On les exprime en fonction du rayon R :

$$dG^* = (T - T_0)dS + (8\pi\gamma_{LV}R - 4\pi R^2(P - P_0))dR. \quad (8)$$

À l'équilibre, $G^* = G$ et est minimal : sa différentielle est nulle. Si on introduit cette condition dans l'équation précédente, on trouve deux conditions d'équilibre :

$$\begin{aligned} T &= T_0 \quad : \text{équilibre thermique.} \\ P &= P_0 + \frac{2\gamma_{LV}}{R} \quad : \text{équilibre mécanique.} \end{aligned} \quad (9)$$

La deuxième condition constitue la **loi de Laplace**. La pression à l'intérieur de la bulle est supérieure à celle à l'extérieur pour s'opposer à la minimisation de la surface imposée par la tension de surface. La pression est inversement proportionnelle au rayon de la bulle.

Ordres de grandeur

- goutte d'aérosol : $r = 1\mu\text{m}$: $\Delta P = 10^5\text{Pa} = 1\text{ bar}$. La pression est double dans la goutte comparé à l'atmosphère.
- bulle de taille macroscopique : $r = 1\text{cm}$: $\Delta P = 10^1\text{Pa} = 0.1\text{mbar}$. C'est peut devant la pression atmosphérique.

Mûrissement d'Oswald

Présentation On montre la vidéo [:https://youtu.be/ZsihLmIm024?t=21](https://youtu.be/ZsihLmIm024?t=21). Avec un robinet à trois entrées et un poire à pipeter, on crée deux bulles de rayons différents sur les deux entrées. On ouvre la valve pour relier l'air entre les deux bulles. La surpression est plus élevée dans la bulle de petit rayon, d'après la loi de Laplace. La petite bulle va alors se vider dans la grande bulle. C'est ce que l'on appelle le mûrissement d'Oswald.

Implications Le mûrissement d'Ostwald, contribue au vieillissement des mousses et des émulsions : on observe une augmentation de la taille moyenne des bulles ou des gouttelettes au cours du temps. Limiter le mûrissement est un enjeu dans les industries pharmaceutique, cosmétique, agroalimentaire, etc. qui emploient de tels systèmes. *Une émulsion est un mélange hétérogène de deux substances liquides non miscibles, l'une étant dispersée sous forme de petites gouttelettes dans l'autre.* Une solution est de faire en sorte que la tension de surface $\gamma(R)$ diminue avec R ,

à l'aide de tensioactifs. Il y a une vidéo super sur la page Wikipedia anglaise : https://en.wikipedia.org/wiki/Ostwald_ripening.

Généralisation de la loi de Laplace La loi de Laplace est par ailleurs généralisable à une interface de forme quelconque. Si jamais on regarde l'interface présentée Figure 3, on peut définir les rayons de courbure R_1 et R_2 de l'interface comme les rayons des cercles tangents à l'interface dans des plans orthogonaux l'un à l'autre. Il est important de préciser que R_1 et R_2 sont deux grandeurs algébriques : positives si on regarde du côté du fluide.

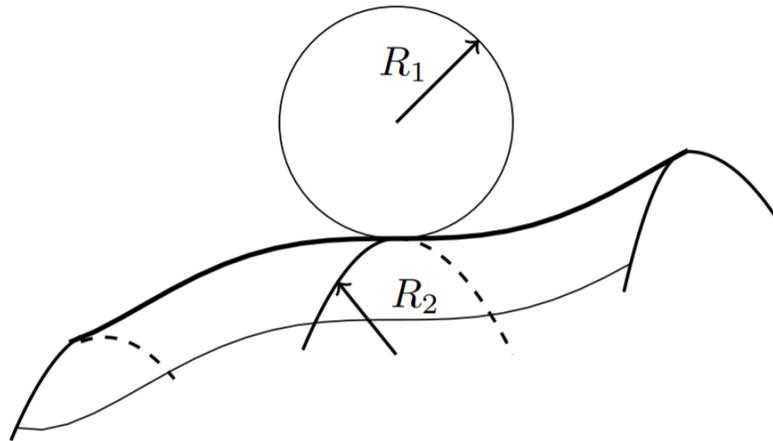


FIGURE 3 – Les deux rayons de courbure R_1 et R_2 caractérisent l'interface dans deux plans orthogonaux l'un à l'autre.

La loi de Laplace se réécrit alors comme :

$$P = P_0 + \gamma_{LV} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (10)$$

Cas limites On peut considérer deux cas limites assez intéressants :

- Pour $R_1 = R_2 = R$, on retrouve la loi de Laplace pour une sphère.
- Pour $R_1, R_2 \rightarrow +\infty$, $P = P_0$: il n'y a pas de discontinuité de pression pour une interface plane.



On va appliquer les deux résultats précédents à l'ascension capillaire (on fait la preuve avec les pressions)

2.3 Application : la loi de Jurin

Sur les photos, on voit un ménisque. Pour expliquer l'angle de contact, il faut avoir fait la loi de Young-Dupré. Sinon, on dit qu'on l'explique plus tard. Si on veut le faire avec les pressions, il faut la loi de Young-Dupré. Si on le fait avec les énergies, c'est un peu redondant.

Loi de Jurin

Présentation On montre la vidéo : <https://youtu.be/SkVwNXWAgHo?t=430>. On plonge des tubes de diamètre différents dans l'eau colorée. On préfère souvent l'éthanol à l'eau car c'est plus facile d'avoir de l'éthanol pur que de l'eau pure, qui solvate bien les impuretés. On constate que l'eau monte, à des hauteurs plus grandes pour les tubes étroits. En connaissant la masse volumique, ρ , on peut remonter à γ_{LV} .

Bonus : précaution expérimentale Pour mesurer γ_{LV} , il faut un liquide pur et mesurer la température de la pièce.

Système et problème On représente un capillaire Figure 4. Lorsqu'un capillaire de rayon r plonge dans un liquide, celui-ci monte dans le capillaire jusqu'à une certaine hauteur h . Comment déterminer h ?

Hypothèses On suppose que le liquide dans le capillaire est en contact avec un deuxième fluide qui se comporte comme un thermostat à la température T_0 et un pressostat à la pression P_0 . On suppose également que l'équilibre thermique est réalisé, et on néglige le poids du ménisque, il faut $r < l_c$, ce qui est la définition d'un tube capillaire. De plus on néglige la variation de niveau du réservoir. h désigne la hauteur au niveau du bas du ménisque.

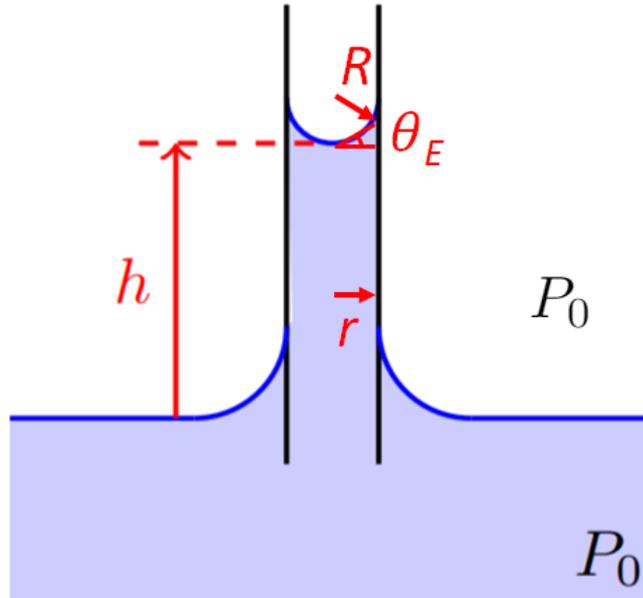


FIGURE 4 – Le fluide monte dans le capillaire de rayon r d'une hauteur h . On note R les rayons de courbure pour l'interface liquide-vapeur. Le fluide est en équilibre avec un fluide de température T_0 et P_0 constantes.

Approche énergétique/ou avec les pressions? ↗ voir les compléments ou P.Lidon. On précise que h est la hauteur comptée jusqu'au bas du ménisque.

Interprétation avec la longueur capillaire On voit les effets de la tension de surface à petite échelle. C'est dans les fins capillaires que cela monte le plus haut. **ODG:** On fait une application numérique. Pour le mercure le ménisque est inversé et la hauteur est négative!

Applications C'est ce phénomène qui est responsable de l'affleurement des sources en montagne (cool), ou du fait qu'une manche qui trempe dans de la soupe ou un pantalon dans une flaque d'eau deviennent mouillés (pas cool). Le fait qu'une éponge s'imbibe facilement.

↓ On va l'appliquer pour la nucléation!

3 Interfaces et stabilité

3.1 Nucléation homogène

↗ cf. fiche + Diu.

C'est probablement trop long...

Chambre à brouillard, chambre à bulles [photo/vidéo!] La plupart des chambres à brouillard utilisaient de l'éthanol : $\rho = 789 \text{ kg/m}^3$, $M = 46 \text{ g/mol}$, $T_{\text{cond}}(P_0 = 1\text{bar}) = 78 \text{ C}$. A $T_0 = -50 \text{ C}$, $\gamma = 30 \text{ mN/m}$. On obtient : $r_c = 3\text{nm}$. Avec un seuil aussi bas, on comprend aisément que les chambres à brouillard fonctionnent. D'autre part : $\Delta\Omega^* 20 \text{ eV/particule}$. Un muon cosmique d'énergie 1 GeV fournit largement assez d'énergie pour amorcer la nucléation lors de son passage. *Pourquoi les bulles formées disparaissent ? Les bulles n'ont pas de rayon stable. Une fois formées, elles peuvent se résorber ou transformer toute la phase.*

Complément comme la neige, qui ne peut se former dans l'atmosphère que s'il existe des sites de nucléation permettant aux cristaux de germer. Par ailleurs, on peut se demander s'il est possible d'observer un retard au niveau d'une transition "dans les deux sens", autrement dit : puisqu'on observe de l'eau liquide sous 0 degrés, est-il possible de préserver un glaçon au dessus de 0 degrés ? Eh bien non, et la réponse est une fois de plus : à cause de la tension de surface ! Car pour l'eau comme pour la plupart des liquides : $\gamma_{SG} > \gamma_{SL}$ (à cause du nombre de voisins), c'est-à-dire que l'interface glace/air est plus énergétique que l'interface glace/eau. L'eau est plus mouillante que l'air pour le substrat glace. Le seul moyen d'observer un glaçon au dessus de 0 degrés est de l'emballer dans un matériau de faible tension de surface, qui soit plus mouillant que l'eau. Sur ce principe, certaines huiles sont utilisées comme anti-salissure ou anti-graffiti car elles permettent d'abaisser l'énergie de surface des murs, et de les rendre moins "demandeurs" d'impuretés.

3.2 Instabilité de Rayleigh-plateau

↪ GBPO p.108 ou Lidon p.34

Présentation de l'instabilité RP Un jet de liquide peut se déstabiliser pour former des gouttelettes : on peut l'observer sur le jet d'un robinet, s'il est assez long et à débit suffisamment faible, ou encore avec les perles de rosée sur les toiles d'araignées. Faisons une analyse qualitative du système permettant d'expliquer cette instabilité.

Influence de la gravité Assurons-nous que la pesanteur n'intervient pas dans le problème en estimant le nombre de Bond. La contribution de l'énergie de pesanteur est négligeable tant que $Bo = (R/\ell_c)^2 \ll 1$. C'est très correct pour la formation de perles de rosées ou pour de fins filets d'eau.

Analyse qualitative On considère un cylindre de fluide de rayon r et de longueur L . Si on découpe ce cylindre en N gouttes de même rayon R , la conservation du volume nous dit que :

$$\pi r^2 L = N \times \frac{4}{3} \pi R^3 \Leftrightarrow N = \frac{\pi r^2 L}{\frac{4}{3} \pi R^3}. \quad (11)$$

Si on regarde maintenant le rapport des surfaces des deux configurations, on trouve :

$$\frac{S_{gouttes}}{S_{cylindre}} = \frac{N \times 4\pi R^2}{2\pi r L} = \frac{3r}{2R} \text{ en remplaçant } N \text{ par sa valeur.} \quad (12)$$

On voit alors que si $R > \frac{3r}{2}$, $S_{gouttes} < S_{cylindre}$: il est alors plus intéressant pour le système de se morceler en une multitude de gouttelettes pour minimiser sa surface et donc l'interaction avec l'extérieur via la tension de surface. L'instabilité de Rayleigh-Plateau a bien une origine capillaire.

Bonus : analyse dynamique ↪ Polydon. Il faudrait considérer des ondulations de vecteur d'onde k et regarder lequel a le taux de croissance de l'instabilité la plus grande pour déterminer la taille typique des gouttes. *Il faut regarder à quel point le gradient de pression dû aux forces de Laplace déstabilise rapidement le jet. On peut se placer dans l'approximation de lubrification. Lorsqu'un liquide est fortement confiné entre deux surfaces, c'est-à-dire que l'épaisseur de liquide est très faible devant les dimensions transversales des parois confinantes, il est possible de simplifier fortement l'équation de Navier-Stokes qui gouverne son écoulement : c'est l'approximation de lubrification, qui permet en particulier de décrire l'écoulement du liquide dans les contacts lubrifiés. Lorsque $e \ll L$ (où e est l'épaisseur moyenne entre les parois, et L est la dimension transversale caractéristique des parois), alors :*

- la composante de la vitesse parallèle aux parois est très grande devant la composante perpendiculaire, que l'on peut négliger
- la vitesse varie essentiellement dans la direction perpendiculaire aux parois : on peut donc négliger les dérivées de la vitesse par rapport aux coordonnées parallèles aux parois devant les dérivées par rapport à la coordonnée perpendiculaire
- on peut considérer que la pression est constante dans la direction perpendiculaire aux parois.

Un aspect essentiel de cette approximation est que l'on peut négliger le terme inertiel non-linéaire et retrouver l'équation de Stokes, lorsque $Re \ll (L/e)$ beaucoup moins restrictive que la condition habituelle $Re \ll 1$ dès lors que L est très grand devant e

4 Ondes gravito-capillaires

Ondes gravito-capillaires

Présentation On s'intéresse dans ce paragraphe aux ondes à la surface d'un fluide au repos, couplant la déformation de la surface au champ de vitesse du fluide. Ces ondes sont aisément observables : vagues, rides engendrées par le vent ou par la chute d'un objet, etc. On montre la vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=dsrUxhaaWks>. En jetant un caillou dans l'eau, on observe après quelques instants l'existence de deux séries d'ondes, l'une étant plus rapide et à des longueurs d'ondes plus courtes.

- des petites longueurs d'onde d'environ 1 mm, qui se propagent vite, à 70 cm/s environ.
- des grandes longueurs d'onde d'environ 2 cm, qui se propagent moins vite, à 20 cm/s environ.

L'objet de cette partie est de comprendre ces deux phénomènes.

Phénomènes en compétition Qualitativement, trois phénomènes sont en compétition : l'inertie du fluide tend à le faire persévérer dans son mouvement, alors que la pesanteur et la tension superficielle tendent respectivement à abaisser le centre de gravité du fluide et à en lisser la surface.

4.1 Relation de dispersion

Hypothèses Si on fait l'approche analyse dimensionnelle, ne pas donner toutes les hypothèses d'un coup.

- écoulement parfait, équation d'Euler : on néglige la dissipation par viscosité, valable sur un temps $\tau \ll \lambda^2/\nu$. En terme de longueur, la longueur d'atténuation typique en régime capillaire est 30cm et de 1 km dans le régime gravitaire. *Munis des vitesses de phase approximatives, on peut évaluer les distances typiques d'atténuations dans les deux régimes. Dans le régime capillaire, on trouve $L^* \sim (\rho\gamma\lambda^3)^{1/2}/\eta$. Pour $\lambda = 1\text{mm}$ par exemple, on obtient $L^* \simeq 30\text{cm}$. Dans le régime gravitaire, $L^* \sim \rho g^{1/2}\lambda^{5/2}/\eta$ et les longueurs d'atténuation deviennent rapidement très élevées (quelques kilomètres pour $\lambda \sim 1\text{m}$). Les vagues en mer correspondent à ce second régime.*
- écoulement incompressible, irrotationnel : potentiel
- faibles perturbation : on néglige l'accélération convective dans l'équation d'Euler (ou de façon équivalente, le terme d'énergie cinétique dans l'équation de Bernoulli) devant le terme d'inertionnarité. Il faut donc avoir $v_0 \ll c = \omega/k$.
- faible perturbation : l'amplitude de la déformation de l'interface doit être suffisamment lisse pour que l'on puisse assimiler la normale à la surface libre à la verticale : il faut pour cela $\partial_x z_0 \ll 1$
- faible perturbation : l'amplitude de la déformation de l'interface doit être suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que les conditions aux limites sont prises en $z = h$: il faut donc $|z_0 - h| \ll h$.
- eau profonde $kh \gg 1$ Dans ce cas, la relation de dispersion ne dépend pas de h . Dans le cas opposé, celui des marées pour lequel on a $\lambda \sim 5000\text{km} \gg h \sim 4\text{km}$ et $v_\phi = \sqrt{gh}$, ce qui justifie que l'océan ne constitue pas un milieu dispersif pour les ondes de marée. Par ailleurs cette expression de la vitesse de phase en eau peu profonde explique des phénomènes simples qui méritent d'être mentionnés en passant, comme le déferlement des vagues, ou le fait que lorsque une longue vague arrive près de la plage celle-ci se raidit et s'aligne avec la plage

Analyse dimensionnelle, version express De façon générale, les divers paramètres intervenant dans le problème sont la masse volumique ρ , l'intensité de la pesanteur g , la tension de surface γ , l'épaisseur de fluide h , la pulsation de l'onde ω , son nombre d'onde k , et l'amplitude de la perturbation de la surface libre ζ_0 . Nous disposons donc de sept paramètres pour trois dimensions indépendantes. Dans l'hypothèse des petites perturbations, ζ_0 n'intervient pas. Dans le cadre des eaux profondes, H n'intervient pas. On a 5 inconnues pour 3 dimensions donc le théorème de Vaschy-Buckingham implique alors que le problème est déterminé par deux nombres sans dimensions qu'on choisit comme

$$\tilde{K} = k\ell_c, \quad \text{et} \quad \tilde{\Omega} = \omega/\sqrt{kg}$$

A l'ordre le plus bas, les comportements limites de la fonction $\tilde{\Omega}(\tilde{K})$ sont :

$$\text{pour } \tilde{K} \ll 1, \tilde{\Omega} = f(\tilde{K}) \sim 1 \text{ et pour } \tilde{K} \gg 1, \tilde{\Omega} = f(\tilde{K}) \sim \tilde{K}$$

Bonus : Analyse dimensionnelle : paramètres pertinents, théorème Pi ∇ suivre Lidon. **Polydon** On utilise le théorème II (prérequis). De façon générale, les divers paramètres intervenant dans le problème sont la masse volumique ρ , l'intensité de la pesanteur g , la tension de surface γ , l'épaisseur de fluide h , la pulsation de l'onde ω , son nombre d'onde k , et l'amplitude de la perturbation de la surface libre ζ_0 . Nous disposons donc de sept paramètres pour

trois dimensions indépendantes. Le théorème de Vaschy-Buckingham implique alors que le problème est déterminé par quatre nombres sans dimension que nous choisissons comme

$$\tilde{K} = k\ell_c, \quad \tilde{H} = kh, \quad \tilde{Z} = k\zeta_0 \quad \text{et} \quad \tilde{\Omega} = \omega/\sqrt{kg}$$

Nous pouvons donc seulement affirmer que la relation de dispersion se met sous la forme

$$\tilde{\Omega} = f(\tilde{K}, \tilde{H}, \tilde{Z})$$

- Cas purement gravitationnel : Si l'on considère la situation $\tilde{K} \ll 1$, c'est la gravité qui domine la capillarité. On doit donc équilibrer l'inertie du fluide avec la pesanteur : $\partial_t \vec{v} \sim \vec{g}$. En ordre de grandeur on obtient $\omega^2 \sim kg$
- Cas purement capillaire : Si l'on considère la situation $\tilde{K} \gg 1$, c'est la capillarité qui domine la gravité. On doit donc équilibrer l'inertie du fluide avec le gradient de pression capillaire à l'interface : $\partial_t \vec{v} \sim \vec{\nabla} P/\rho$. En ordre de grandeur, $\|\vec{\nabla} P\| \sim k\Delta P \sim k \times (\gamma k)$ donc $\omega^2 \sim \gamma k^3/\rho$

L'analyse dimensionnelle ne permet pas de prédire le comportement général de f , il se trouve que c'est la somme des deux cas limites, ce qui n'est pas aberrant puisque les effets liés à la gravité et ceux liés à la capillarité apparaissent comme une somme dans l'équation de propagation.

Bonus : Cadre : régime d'eaux profondes, petites amplitudes Considérons alors le cas d'eaux profondes, soit $\tilde{H} \gg 1$, et d'une onde de faible amplitude, soit $\tilde{Z} \ll 1$. Supposons ainsi que dans ce régime, f ne dépend plus que de \tilde{K} . Cela correspond au cas d'une auto-similarité de première espèce, que nous supposons adaptée. Si cette hypothèse impliquait des résultats en désaccord avec l'expérience, il faudrait rechercher $f(\tilde{K}, \tilde{H}, \tilde{Z})$ sous la forme $\tilde{H}^\alpha \tilde{Z}^\beta \psi(\tilde{K} \tilde{H}^{-\gamma} \tilde{Z}^{-\delta})$. Notons néanmoins que f doit être indépendante de \tilde{Z} puisque l'on effectue une analyse linéaire, où l'amplitude de l'onde est infinitésimale.

Bonus : Comportements asymptotiques Tout d'abord, notons qu'il ne reste pour décrire le mouvement du fluide qu'une échelle de temps $1/\omega$ et une échelle de longueur $1/k$ pertinentes, la longueur capillaire étant une caractéristique statique du fluide. Dès lors, la vitesse d'une particule de fluide a pour ordre de grandeur $v_0 = \omega/k$, la vitesse de phase de l'onde de surface. Nous pouvons alors obtenir les comportements asymptotiques de f avec \tilde{K} . C'est là que tout peut sembler un peu fumeux, dans la mesure où les forces que l'on tente d'équilibrer agissent dans des directions orthogonales. Mais ce que l'on prend pour de la magie n'est que la puissance de l'analyse dimensionnelle : essayer de distinguer deux directions reviendrait à ajouter une longueur dans le problème. A l'ordre le plus bas, les comportements limites de la fonction f sont :

$$\text{pour } \tilde{K} \ll 1, \tilde{\Omega} = f(\tilde{K}) \sim 1 \text{ et pour } \tilde{K} \gg 1, \tilde{\Omega} = f(\tilde{K}) \sim \tilde{K}$$

- Cas purement gravitationnel : Si l'on considère la situation $\tilde{K} \ll 1$, c'est la gravité qui domine la capillarité. On doit donc équilibrer l'inertie du fluide avec la pesanteur : $\partial_t \vec{v} \sim \vec{g}$. En ordre de grandeur on obtient $\omega^2 \sim kg$
- Cas purement capillaire : Si l'on considère la situation $\tilde{K} \gg 1$, c'est la capillarité qui domine la gravité. On doit donc équilibrer l'inertie du fluide avec le gradient de pression capillaire à l'interface : $\partial_t \vec{v} \sim \vec{\nabla} P/\rho$. En ordre de grandeur, $\|\vec{\nabla} P\| \sim k\Delta P \sim k \times (\gamma k)$ donc $\omega^2 \sim \gamma k^3/\rho$

L'analyse dimensionnelle ne permet pas de prédire le comportement général de f , il se trouve que c'est la somme des deux cas limites, ce qui n'est pas aberrant puisque les effets liés à la gravité et ceux liés à la capillarité apparaissent comme une somme dans l'équation de propagation.

Relation de dispersion On donne la relation de dispersion et son allure.

$$\omega^2 = gk(1 + k^2\ell_c^2) \tanh(kh) \quad \text{et} \quad c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}(1 + k^2\ell_c^2) \tanh(kh)}$$

Commençons par discuter de la relation de dispersion. Divers régimes peuvent être distingués :

- selon la valeur de kh : si $\lambda \gg h$, on est dans le régime d'eaux peu profondes et $\tanh(kh) \sim kh$, alors que si $\lambda \ll h$, on est dans le régime d'eaux profondes et $\tanh(kh) \sim 1$. La tangente hyperbolique variant cependant assez lentement loin de 0, l'hypothèse d'eaux profondes est assez peu restrictive et reste valable dans de nombreux cas. Nous nous y plaçons pour la suite.
- selon la valeur de $k\ell_c$: si $\lambda \ll \ell_c$, la capillarité domine et on a $\omega^2 \simeq gk^3\ell_c^2$ et $c \simeq \sqrt{gk}\ell_c$ alors que si $\lambda \gg \ell_c$ la gravité domine et on a $\omega^2 \simeq gk$ et $c \simeq \sqrt{g/k}$

Interprétation des observations Dans l’expérience du caillou tombant dans un lac, le caillou crée une impulsion qui excite toutes les fréquences. La série d’ondes rapides de courte longueur correspond aux ondes capillaires, alors que la série d’ondes lentes et de grande longueur d’onde correspond aux ondes gravitaires. On remarque en outre que la vitesse des ondes passe par un minimum non nul c_{\min} pour $k\ell_c = 1$. Il s’agit de la vitesse relative minimale à laquelle un obstacle doit se déplacer par rapport au fluide environnant pour laisser un sillage stationnaire, en forme de V comme celui que l’on peut observer derrière un canard ou un bateau. Si l’obstacle se déplace à une vitesse inférieure à $c_{\min} = 23\text{cm/s}$ à température ambiante, la perturbation restera localisée autour de lui. L’émission d’un sillage dissipe de l’énergie, intervenant dans les problèmes de résistance à la progression en surface d’un fluide (on parle de résistance de vague). *Ce type de critère se retrouve dans de multiples domaines, dès qu’une relation de dispersion présente une vitesse minimale non-nulle : critère de Landau pour la superfluidité, amortissement Landau dans les plasmas, rayonnement Cherenkov.*

Régime gravitaire $v_g \sim v_\phi/2$: c’est l’ingrédient pour l’angle de Kelvin des bateaux. Wake pattern from ships often fall into this category. The single waves seem to roll faster than the “plow” or “fan” that follows the boat. As a result, the single waves roll in a way past the “fan” and disappear soon afterwards.

Régime capillaire $v_g \sim (3/2)v_\phi$ In this case, the group velocity is actually greater than the phase velocity (corresponding to anomalous dispersion). In this case, individual waves seems to appear from nothing at the front of the group of waves, and then move “backwards” through the group and disappear. However, relative to the water, the single waves will always propagate away from the source that created the waves (as long as we do not have reflection), but the illusion of walking backwards is because the group velocity is even greater than the phase velocity

Limite La limite se situe à $\lambda \sim \ell_c$ la longueur capillaire. La relation de dispersion $v_\phi(\omega)$ possède un minimum à 23 cm/s. *C’est la vitesse minimale qu’un objet doit avoir pour laisser un sillage stationnaire. Former un sillage dissipe de l’énergie, c’est la résistance de vague. Les trajectoires des particules de fluide sont elliptiques.*

Bonus : trajectoire des particules de fluide Dans le cas des eaux profondes, et loin du fond, les trajectoires deviennent circulaires. On aurait pu le prédire par analyse dimensionnelle, puisque nous avons vu que dans le régime d’eaux profondes, les directions verticale et horizontale doivent être traitées de façon équivalente.

Complément : houle *Lorsque la houle déferle sur la plage, il s’agit d’un changement de régime (eaux profondes à eaux peu profondes) des ondes de surface.*

Complément : sillage des bateaux $\not\Leftarrow$ Physics of Waves, Arnt Inge Vistnes, chap 8.4.4 [image](#), [Talk Marc Rabaud](#), [Article Marc Rabaud](#), [Construction géométrique du sillage \(APJ\)](#), [encore plus clair pour la construction géométrique](#)

Observation : l’angle du sillage est souvent de 19 degrés, indépendamment de la taille ou de la vitesse du mobile. Pour les bateaux, on est dans le régime gravitaire : l’ingrédient clef est $v_g \sim v_\phi/2$. Comme le cône de Mach, lorsque $v > v_\phi$, il y a un cône d’accumulation des vagues dont l’angle dépend de la vitesse du mobile : $v_\phi = v_0 \sin \theta$. Mais l’angle qu’on voit est celui de la vitesse de groupe, obtenu par construction géométrique (quand on trace le cône de Mach on retient le point milieu, ce qui fait un nouveau cône : celui qu’on voit). Comme le milieu est dispersif, à chaque longueur d’onde est associée un cône, dont l’angle varie. L’angle présente un maximum à un certain angle donné constant : c’est l’angle dominant qu’on observe, en supposant que toutes les longueurs d’ondes sont excitées. C’était la théorie de Kelvin. En fait, l’angle devient plus étroit quand la vitesse augmente (dépendance en le nombre de Froude), comme le cône de Mach. En disant que le bateau ne peut émettre des longueurs d’ondes plus grandes que sa taille, on retrouve le cône de Mach aux grandes vitesses.

Pour expliquer les arcs aux centre dans la trajectoire du bateau, on considère les ondes de vitesse de phase au voisinage de $v_\phi = U$ la vitesse du bateau (paquet d’onde quasi-monochromatique), qui sont les seules qui donnent un motif stationnaire dans le référentiel du bateau. Ainsi, lorsque le bateau passe au point M, il excite un onde sphérique dont le front progresse à même vitesse que le bateau. Comme $v_g \sim v_\phi/2$, à distance $2L$ de M, le paquet d’onde excité se trouve à distance L de M. On en déduit la règle : à distance L du bateau, le rayon de courbure du motif est L .

Complément : atténuation des ondes gravito-capillaire La viscosité atténue les ondes gravito-capillaires. En fait, une petite tension de surface augmente l’atténuation (même si la tension de surface tend à lisser l’interface). En effet, la longueur caractéristique d’atténuation est $L = v_g \tau$ et $\tau = \lambda^2/\nu$ où ν est la viscosité cinématique. Or v_g diminue avec la tension de surface γ .

Conclusion

Nous avons donc réussi à comprendre pourquoi notre trombone initial flottait, et que la longueur capillaire était la grandeur naturelle pour discriminer à quelle échelle les effets capillaires ne seront plus négligeables, mais qui explique

aussi la taille des gouttes de pluie ou de rosée.

Industriellement, la tension de surface présente un grand intérêt économique : par exemple un fabricant de parebrise ou de poêles va chercher à minimiser le mouillage (par exemple en s'inspirant de la nature : feuilles de nénuphar qui présentent des microstructures), ou à l'opposé, un fabricant de peinture qui va vouloir que sa peinture s'étale le plus possible.

Ouverture : méthodes de mesure, s'inspirer des compléments.

Compléments/Questions

Passage

Plan

Questions

- Pourquoi la longueur capillaire est du même ordre de grandeur pour différents fluides alors que la tension de surface ne l'est pas ? Comment vous pourriez l'expliquer avec les mains à des élèves ?
- Pourquoi le savon diminue la tension de surface de l'eau ?
- Effet marangoni ? Larmes sur le vin ?
- Evolution de la tension de surface avec la température de γ ? C'est décroissant, par exemple les interactions de VdW décroissent avec augmentation de la température. La cohésion A-A diminue, γ diminue (chauffer homogénéise en physique statistique).
- Autres démonstrations de la loi de Laplace ? On calcule $\gamma d\vec{l}$ sur une interface courbée, en faisant de la géométrie.
- Pour la bulle de savon, il y a deux interfaces, ie $\Delta P = 4\gamma/R$, il faut le préciser.
- Effet des feuilles de Lotus : effet superhydrophobie causé par une rugosité nanométrique.
- Pour la loi de Jurin, pourquoi de l'éthanol et pas de l'eau ? Impuretés dans l'eau plus que dans l'éthanol, et elles changent beaucoup la tension de surface, et rendent les manip sont reproductibles. Même de l'eau distillées c'est pas ouf.
- Pourquoi faire la mesure en bas du ménisque ? Quand on fait la démonstration, on prend le rayon de courbure en bas du ménisque.
- Composante verticale dans le démo de Young Dupré ? Déformation du substrat.
- Autres méthodes de mesures de tension de surface ?
- Sens physique de la longueur capillaire ?
- Ce qui fait flotter un navire c'est la tension de surface ? Non les longueurs sont plus grandes que la longueur capillaire. C'est la poussée d'Archimède, force volumique.
- Qu'est-ce que l'effet Marangoni ? *Gradient de tension de surface imposé par exemple par la température dans le cas de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.*
- Quelle est l'évolution de la tension de surface avec la température ? *Globalement, la tension de surface diminue avec la température.*
- Retour sur l'expérience d'Oswald qui n'a pas marché. Certainement à cause d'un tube bouché. Mouais... De toute façon elle marche une fois sur deux cette manip'.
- Pourquoi prend-on la température d'ébullition dans la définition microscopique de la tension de surface ? *C'est le moment où l'énergie de cohésion **compense** l'énergie d'agitation thermique.*
- Pourquoi avoir choisi de calculer un ordre de grandeur de la tension de surface ? Je ne vois pas l'intérêt de cette question ... Moi non plus Vincent.
- Les valeurs de tension de surface tabulées sont-elles empiriques ou théoriques ? *Empiriques.*

- Où interviennent les liaisons H ? *Pour l'eau, on a quelques dizaines de $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Elles expliquent la valeur élevée de la tension de surface. Dans le cas du mercure, c'est la liaison métallique qui explique la valeur élevée de la tension de surface de l'ordre de $500\text{mN}\cdot\text{m}^{-1}$.*
- Pourquoi avoir choisi le potentiel G^* ? Est-ce le plus pratique ? *Expérimentalement, c'est le plus pratique. C'est d'ailleurs LE potentiel du chimiste car il va permettre de définir G à P et T constantes.*
- Autre démo de la loi de Laplace ? *Avec le travail des forces de pression.*
- Pourquoi ne gardons-nous que deux rayons de courbure dans Laplace, pourquoi n'y en a-t-il pas une infinité ? *Deux rayons perpendiculaires suffisent à définir l'enveloppe 3D.*
- Est-ce que pour la bulle on a toujours $\frac{2\gamma}{R}$? *Piège classique : c'est $\frac{4\gamma}{R}$ car il y a deux interfaces.*
- Connaissez-vous l'effet Lotus ? *Dsl, je n'en suis qu'au niveau 1 en yoga...*
- Pourquoi avoir pris l'éthanol et pas de l'eau pour Jurin ? *Car Francis nous l'a dit. Non, ce n'est pas la bonne réponse. Car il est très difficile d'avoir de l'eau pure, sans impureté. Avec l'éthanol en revanche, les impuretés sont beaucoup moins présentes. Et on rappelle que le pK_a d'un alcool est de 16-18, mais ça n'a aucun rapport avec la leçon.*
- Autre démo pour Young-Dupré ? *Avec les forces. Mais comment justifier le bilan des forces verticales ? Il y a une contrainte de déformation. Le support est censé s'élever. L'ordre de grandeur de cette déformation utilise le module d'Young : on trouve expérimentalement 1Å.*
- Que se passe-t-il pour une grosse goutte ? *La gravité déforme la forme.*
- Où mesure-t-on la hauteur dans la loi de Jurin ? En haut ou en bas du ménisque ? *En bas, car c'est là qu'on fait la relation de pression hydrostatique.*
- Connaissez-vous des méthodes de mesure de la tension superficielle ? *Balance d'arrachement. D'autres ? Goutte pendante. D'autres ? Stalagmométrie. D'autres ? (STOP!!!!)*
- Rappelez les hypothèses pour Bernoulli. *Cf la magnifique leçon LP 09, exécuté par mon prodigieux binôme. 20/20, 3T Télérama.*
- Pour le gerris du début ... Y a-t-il une force à ne pas oublier ? *Eh oui, Archi n'est jamais loin. Ouais, mais il m'emmerde avec son bain moi.*
- Connaissez-vous d'autres instabilités où interviennent la tension de surface ? *Rayleigh-Plateau, Rayleigh-Taylor, Rayleigh+insérerlenomrandomdunscientifique russe...*

Commentaires

- Marquer au tableau angle de contact.

5 Capillarité

5.1 Tension superficielle

5.1.1 Constats expérimentaux

Lorsqu'on perce une film de liquide supporté par un cadre rectangulaire traversé par un fil à coudre, le fil s'étire pour minimiser l'aire du film liquide.

Les surfaces fluides comme la surface de l'eau ont une bulle sont de surfaces lisses et régulières jusqu'à l'échelle moléculaire.

En l'absence d'autres forces, une bulle est sphérique.

Conclusion : l'air des interfaces entre plusieurs phases tend à être minimisée. En termes énergétiques, l'interface a un coût.

5.1.2 Origine microscopique

L'environnement des molécules à la surface est différent des molécules en volume (schéma de Jérémy). Une molécule en volume est entourée de voisins attracteurs alors qu'une molécule à la surface a un nombre réduit de tels voisins. La présence de l'interface a donc un coût énergétique.

Si une molécule en surface a une énergie plus grande que celle en volume, par exemple si les interactions A-B sont plus faibles que les interactions A-A (Van der Waals, liaisons hydrogène, métalliques...), alors l'existence de l'interface induit un coût énergétique. Dans le cas contraire, les fluides sont miscibles.

5.1.3 Définitions

En terme de travail, $\delta W_{rev} = \gamma dA$ travail à fournir pour agrandir l'interface. Energie par unité de surface.

Définition équivalente en termes de force linéique. La force capillaire est parallèle à l'interface. (schéma de l'expérience du cadre).

5.1.4 ODG et dépendances

En négligeant la cohésion du gaz, on peut estimer γ_{LV} en équilibrant l'énergie thermique à l'ébullition et l'énergie de surface pour une molécule : $\gamma_{LV} = k_B T_{eb}/a^2$ où a taille d'une molécule. **ODG:** Pour l'eau, $a = 2\text{Å}$, $T_{eb} = 373K$ donne $\gamma_{LV} = 0.1mN/m$ comparé à la valeur tabulée à 20 degrés $\gamma_{LV} = 72.75mN/m$.

La tension dépend de la nature des phases, la nature des liaisons de cohésion au sein de la phase, de la température (généralement $\gamma(T)$ décroissant), la présence d'impuretés.

Tension de surface non isotropes pour les cristaux liquides.

ODG: huile, éthanol (interactions de Van der Waals) $\gamma \sim 20mN/m$, eau (liaison hydrogène) $\gamma \sim 70mN/m$, sels fondus (liaisons ioniques) $\gamma \sim 120mN/m$, mercure/étain liquide $\gamma \sim 500mN/m$.

5.1.5 Quand prendre en compte la tension de surface ?

La tension de surface domine à petite échelle. En présence de gravité, $l \ll l_c = \sqrt{\rho g/h}$

Si les termes de surface dominant par rapport aux termes de volume, c'est qu'on est à petite échelle : milieux poreux et capillaires.

Beaucoup d'interfaces : émulsions et mousses.

5.1.6 Aspects microscopiques

Profil d'interface avec l'approche de Ginzburg-Landau. $F[\rho(\vec{r})] = \int C/2(\rho - \rho_l)^2(\rho - \rho_v)^2 + b/2|\vec{\nabla}\rho|^2$. Terme de démixtion et terme de pénalisation. On obtient le profil de l'interface en résolvant l'équation d'Euler-Lagrange correspondante, qui possède une intégrale première, en multipliant par $d\rho/dz$. En 1D, profil en tangente hyperbolique.

5.1.7 Dans la nature

Pluie. Imprimante à jet d'encre. Monde des bactéries. Crevette pistolet : chasser avec des bulles de cavitation.

5.2 Interface entre deux fluides

5.2.1 Loi de Laplace

On suppose qu'il n'y a pas de transfert de matière (par diffusion) à travers la bulle. C'est justifié car la relaxation vers l'équilibre mécanique est plus rapide que la diffusion. Démonstration avec G^* ou géométriquement.

Applications. Le rayon de courbure est algébrique. Les deux rayons de courbures sont pris orthogonaux. Attention, pour une bulle il y a deux interfaces. Pour une interface plane $R = \infty$. **ODG:** bulle de savon $r = 1cm$, $\Delta P = 0.1mbar$, goutte d'aérosol $r = 1\mu m$, $\Delta P = 1bar$.

Murissement d'Ostwald : vieillissement des mousses et des émulsions, les grosses bulles se vident dans les petites. Enjeux pharmaceutiques, cosmétiques, agroalimentaires.

5.2.2 Applications

La tension de surface est responsable des phénomènes de métastabilité. Pour la transition liquide-vapeur, surchauffe (accidents avec le microonde, en sortant l'eau du microonde elle se met à bouillir), surcondensation. Applications aux chambres à brouillard et chambres à bulles pour la détection de particules : la perturbation engendrée par le passage d'une particule provoque des nucléations. Pour la transition liquide-solide : surfusion (eau plus froide que 0 degrés). Mais un solide métastable dans le domaine du liquide est plus difficile.

5.3 Interface triple et mouillage

5.3.1 Généralités

Applications : industrie automobile (vitres), pétrolière (mouillage des roches poreuses, récupération du pétrole), industrie cosmétique, chimique (peintures, encres, colorants).

Paramètre d'étalement : $S = \gamma_{SV} - \gamma_{SL} - \gamma_{LV} = \gamma_{LV}(\cos \theta_E - 1)$. $S > 0$ mouillage total. $S < 0$ mouillage partiel.

ODG: $\gamma_{SV} = 10^3 \text{ mN/m}$. La plupart des milieux mouillent facilement.

Angle de contact. L'angle de contact n'est défini que pour un mouillage partiel.

5.3.2 Loi de Young-Dupré

Loi de Young Dupré : $\cos(\theta_E) = (\gamma_{SV} - \gamma_{SL})/\gamma_{LV}$. La composante verticale est équilibrée par la déformation du support. La goutte tire sur le support.

Limitations : rugosités (défauts physiques) et impuretés (défauts chimiques) non unicité de l'angle de contact à cause de l'hystérésis induite par l'ancrage de la ligne triple. Angle d'avancée et angle de réculée. Accrochage ou évitement des défauts du substrat. La déformation du substrat peut changer la loi de Young-Dupré.

5.3.3 Milieu poreux

Milieu poreux entouré d'une phase gazeuse. Il peut être favorable de former une phase liquide entre les pores si le liquide est plutôt mouillant. Il est possible d'avoir une phase condensée liquide à des pressions inférieures à la pression de vapeur saturante, lorsque $\gamma_{SV} > \gamma_{SL}$. C'est la **condensation capillaire**. Pour aller plus loin : formation de la condensation par le modèle de Cohan. Analogie : abaissement du point de fusion pour les gouttes dans les pores, équation de Gibbs-Thompson (cours M1).

La condensation capillaire crée une force attractive entre les pores ou entre les grains de sable d'un milieu granulaire, ce sont les ponts capillaires. D'où la cohésion des châteaux de sable. En approximant le pont comme un parallélépipède $dW = (\gamma_{SV} - \gamma_{SL})4\pi r dr$ car il y a deux surfaces.

5.3.4 Loi de Darcy

Loi de Darcy. Ecoulement de Poiseuille : $D = \Delta P/R_h$ la résistance hydrodynamique. Pour des canaux parallèles, les résistances s'associent en parallèle. Généralisation locale. $\vec{v} = -k/\eta \vec{\nabla} P$, k perméabilité du milieu, homogène à une surface, lié aux caractéristiques géométriquement du milieu. Loi de transport linéaire.

Lien avec la récupération du pétrole, qui se trouve dans des roches poreuses. Trois étapes : (i) on creuse, le pétrole jaillit spontanément sous l'effet de la pression, on récupère 10% (ii) on injecte de l'eau sous pression. Moins visqueuse que le pétrole, instabilité de Saffmann-Taylor, l'eau n'arrive pas déloger tout le pétrole, on récupère 30%. (iii) On injecte un fluide aussi visqueux que le pétrole, avec une petite tension de surface, pour essayer de récupérer le reste.

5.3.5 Mouillages spéciaux

Pour prendre en compte les rugosités ou impuretés chimiques.

Modèle de **Wenzel**. Rugosité de la surface $r > 1$ ($r=1$ pour une surface lisse) : rapport se la surface totale sur la surface projetée. En faisant le raisonnement énergétique $dE = (\gamma_{SL} - \gamma_{SV})dA_{SL} + \gamma_{LV}dA_{LV} = (\gamma_{SL} - \gamma_{SV})2\pi r dx + \gamma_{LV}(2\pi x \cos \theta^* dx)$ d'où $\cos \theta^* = r \cos \theta$. Les rugosités amplifient le caractère mouillant ou le caractère non-mouillant. Il amplifie l'hydrophilie ou l'hydrophobie.

Modèle de **Cassie-Baxter** pour les hétérogénéités chimique. Des espèces 1 et 2 occupent des fractions de surface $f_1 + f_2 = 1$. Alors $dE = f_1((\gamma_{SL,1} - \gamma_{SV,1})dA_{SL} + \gamma_{LV}dA_{LV}) + f_2((\gamma_{SL,2} - \gamma_{SV,2})dA_{SL} + \gamma_{LV}dA_{LV}) = (f_1(\gamma_{SL,1} - \gamma_{SV,1}) + f_2(\gamma_{SL,2} - \gamma_{SV,2}))2\pi x dx + \gamma_{LV}(2\pi x \cos \theta^* dx)$ $\cos \theta^* = f_1 \cos \theta_1 + f_2 \cos \theta_2$.

5.3.6 Effet Marangoni

L'effet Marangoni se produit en présence d'un gradient de tension de surface qui induit un gradient de pression de Laplace, ce qui induit un écoulement.

Le gradient de tension de surface peut être induit par un gradient de température : effet thermocapillaire. Par exemple, un fluide chauffé par le bas et sa surface haute est libre : on observe l'apparition de cellules de convection s'organisant sur un réseau hexagonal : c'est l'instabilité de Bénard-Marangoni.

Un film de surfactant (huile, savon) a une certaine élasticité : if surface concentrations are not homogeneously dispersed at the surface, Marangoni forces will tend to re-homogenize the surface concentration.

Le gradient de tension de surface peut être induit par des tensioactifs répartis de façon inhomogène. Cela explique les larmes de vin : l'alcool a une tension de surface moins élevée que l'eau. "Where the surface of the wine meets the side of the glass, capillary action makes the liquid climb the side of the glass. As it does so, both alcohol and

water evaporate from the rising film, but the alcohol evaporates faster, due to its higher vapor pressure. The resulting decrease in the concentration of alcohol causes the surface tension of the liquid to increase, and this causes more liquid to be drawn up from the bulk of the wine, which has a lower surface tension because of its higher alcohol content. The wine moves up the side of the glass and forms droplets that fall back under their own weight."

Exemple : tremper un couteau enduit de savon dans une assiette avec de l'eau et du poivre : le poivre s'écarte.

5.4 Mesure de tension de surface

5.4.1 Tensiométrie par arrachement

Mesure de la force d'arrachement ou méthode Wilhelmy. Lorsqu'on tente de retirer un objet d'un fluide qui le mouille, l'eau exerce sur lui une force proportionnelle à la tension de surface. En mesurant la force maximale (tirant lentement pour négliger les effets dynamiques), on obtient $F_{max} = \gamma p + P$ où p est le périmètre des (souvent 2) lignes triples et P est le poids. Au moment de l'arrachement, la poussée d'Archimède s'annule et l'angle de contact est nul. Géométrie toroïdale (méthode de du Nouy) ou plane.

5.4.2 Tensiométrie par analyse de forme

Méthode de la goutte sessile. On mesure θ et h d'une goutte posée sur un substrat.

Méthode de la goutte pendante.

Stalagmométrie. Lorsque la goutte pendante se détache, le poids excède la force capillaire : $\rho g V_{goutte} = \gamma 2\pi R_{cap}$ où R_{cap} est le rayon du capillaire. Quand elle chute, elle a un rayon $R_{goutte} = (3/2 l_c^2 R_{cap})^{1/3}$. En réalité une fraction α de la goutte se détache. Il faut faire des étalons ou des mesures comparatives.

5.4.3 Incertitudes

Pollution du fluide par des impuretés.

5.5 Compétition gravité-pesanteur

La gravitation est volumique. La tension de surface est surfacique. Longueur capillaire $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g} = \text{surface}/\text{volume}$. **ODG:** $l_c \sim 3\text{mm}$. Nombre de Bond $Bo = \rho g R^2/\gamma$.

Forme des gouttes. Si la taille est petite devant l_c , calotte sphérique pour minimiser l'aire. Si la taille est grande devant l_c , galette aplatie, de hauteur h . Comme le volume est fixé $V = \pi r^2 h$, on détermine h en minimisant $F^* = U - T_0 S$, en faisant l'approximation que la surface latérale est négligeable. Alors $dF^* = (T - T_0) dS + (\gamma_{LV} + \gamma_{SL} - \gamma_{SV}) dA + \rho g \pi r^2 h dh/2$ où $A = \pi r^2$ avec le facteur $1/2$ car le centre de gravité est à mi-hauteur et une contrainte de volume constant $2dr/r = -dh/h$. On trouve $h_{eq} = \sqrt{2(\gamma_{SV} - \gamma_{LV} - \gamma_{SL})/\rho g} = 2l_c \sin^2 \theta/2$. Pour un mouillage total $\theta = 0$, $h \rightarrow 0$ un film mince apparaît, il faut faire des calculs plus poussés.

5.5.1 Forme du ménisque

On égalise la pression hydrostatique avec la pression de Laplace $\rho g z(x) = \gamma z''(x)/(1 + z'(x)^2)^{3/2}$ qui s'intègre en multipliant par z' . Lorsque $z \ll l_c$, on trouve une exponentielle décroissante.

5.5.2 Ascension capillaire

Loi de Washburn pour l'imprégnation. Compétition entre : dépression due à la capillarité (moteur de l'écoulement), inertie et frottements visqueux. $h \propto \sqrt{t}$. Le gradient de pression $\partial P/\partial x = (P_0 - P_{Jurin})/h(t)$ est inversement proportionnel à $h(t)$ donc le débit est inversement proportionnel à $h(t)$ or la conservation du débit donne $Q = dh/dt S$, donc $dh/dt \propto 1/h$ donc $h \propto \sqrt{t}$. Valable en géométrie verticale si $\rho g \ll \partial_x P$

Loi de Jurin (1717). Validité : on néglige le poids du ménisque, il faut $r < l_c$, ce qui est la définition d'un tube capillaire, de plus on néglige la variation de niveau du réservoir. h désigne la hauteur au niveau du bas du ménisque.

Démonstration (i) Contact avec pressio-stat thermostat (P_0, T_0) . Le potentiel adapté est G^* . On calcule $dG^* = \rho g \pi r^2 dh^2/2 + (\gamma_{SL} - \gamma_{SV}) 2\pi r dh$. Le facteur $1/2$ vient de la position du centre de gravité et donc $E_p = \rho g \pi r^2 h^2/2$. D'où $h_J = (\gamma_{SV} - \gamma_{SL})/\rho g r = 2\gamma_{LV} \cos \theta/\rho g r$. (ii) avec l'équilibre des pressions. Pour $r \ll l_c$, le ménisque est sphérique, le rayon de courbure est alors $r/\cos \theta$. On équilibre $p_0 - \rho g h = p_0 - 2\gamma_{LV} \cos \theta/r$. On a négligé la variation de la pression hydrostatique sur la hauteur du ménisque.

Commentaire : plus le tube est fin plus ça monte. On peut s'en servir pour mesurer γ . Mais l'angle de contact est mal défini à cause de l'hystérésis. C'est mieux de mesurer en descente : la pesanteur permet de décrocher des défauts.

Explication de la montée de la sève dans les petites plantes. **ODG:** pour $r \sim 1\mu\text{m}$, $h_J \sim \text{qq cm}$. En revanche pour les grands arbres, c'est dû à l'évapotranspiration : l'évaporation de l'eau au niveau des feuilles en sortie de vaisseaux capillaires induit une forte courbure des ménisques, ce qui crée une forte dépression et donc un écoulement ascendant.

Le ménisque du mercure est inversé. Pour un liquide non mouillant, $h_J < 0$. Si le tube est tenu oblique alors la loi de Jurin donne la hauteur verticale (pas la hauteur mesurée le long du tube)

5.6 Tensioactifs

Tensioactif : molécule qui possède une partie hydrophobe (longue chaîne alkyle) et une partie hydrophile (polaire, CO_2). Exemple : le savon.

Pour des faibles tensions de surface, les tensioactifs se disposent à l'interface, queue hydrophobe hors de l'eau, la tension de surface effective diminue. Au delà d'une concentration micellaire critique (CMC), la surface sature et les tensioactifs se retrouvent en volume. Ils s'agrègent sous forme de micelles, queue vers l'intérieur. Ce sont des objets dynamiques, qui échangent des tensioactifs.

Applications : si l'eau contient des impuretés, les micelles vont s'agréger autour des impuretés. On peut ralentir le vieillissement de mousses et émulsions : la moutarde stabilise une mayonnaise, les détergents entourent les graisses pour former des micelles pouvant être évacuées par l'eau.

Forme géométrique d'une micelle selon $\phi = v/al$ le paramètre d'empilement, où a est la surface de la tête polaire et v est le volume qu'elle occupe, l la longueur maximale d'étirement qu'elle prend. Entropiquement, la sphère est la plus favorable. Elle existe si, avec r le rayon d'une micelle, $N = 4/3\pi r^3/v = 4\pi r^2/a$ donc $r = 3v/a$. Pour que la micelle existe, $r < l$ donc $\phi < 1/3$. Sinon, elles forment des cylindres, perpétuellement en train de se couper et se former (polymères vivants, wormlike micelles). Mais alors, par unité de longueur, $N/x = \pi r^2/v = 2\pi r/a$ donc $r = 2v/a$ avec $r < l$ donc $\phi < 1/2$. Sinon, elles forment des lamelles dont le nombre de molécules par unité de surface est $2/a = e/v$ avec $e < 2l$ donc $\phi < 1$. Si $\phi > 1$, l'air est emprisonnée dans les vésicules.

Potentiel chimique d'une micelle de taille N $\mu_{ag,N} = \psi_N(T, P) + k_B T \log X_N/N$ où $X_i = N_i/N_{tot}$ la concentration numérique des molécules présentes dans des micelles à i molécules. Pour une micelle, $\mu_N = \mu_{ag,N}/N = \mu_N^\circ(T, P) + k_B T/N \log X_N/N$. En équilibrant les potentiels chimiques, $X_N = N(X_1 \exp^{(\mu_1^\circ - \mu_N^\circ)/k_B T})^N$. On peut proposer $\mu_N^\circ \sim \gamma a + \kappa a$ (deuxième terme de répulsion électrostatique pour la nouvelle molécule ajoutée), passant par un minimum en a . La CMC est atteinte lorsque $X_N < 1$ non vérifié.

5.7 Instabilités

5.7.1 Instabilité de Rayleigh-Taylor

L'instabilité de Rayleigh-Taylor se développe quand une mince couche de fluide visqueux est déposée sous un substrat solide, le tout étant soumis à la gravité. Elle peut être observée sur la paroi intérieure haute d'un réfrigérateur ou sous le couvercle d'une casserole. Qualitativement, on comprend qu'une instabilité résulte de la compétition entre la gravité, qui tend à déformer les gouttes vers le bas à volume constant, et la tension de surface qui tend à minimiser la courbure des gouttes en aplissant le film.

La conservation du débit s'écrit $\partial e/\partial t + \partial Q/\partial x = 0$. Le gradient de pression de Laplace s'écrit $\partial_x(-\gamma \partial^2 e/\partial x^2)$.

5.7.2 Instabilité de Rayleigh-Plateau

Un jet liquide peut se déstabiliser pour former des gouttelettes. Le nombre de Bond est petit donc la gravité n'intervient pas. Il s'agit de comparer la surface d'un cylindre avec la surface de N gouttes.

On se donne un profil d'interface $R^* + \delta R \cos(qx)$. Comme le volume est en $\int \pi r^2 dx$, le nouveau rayon moyen R^* est différent de l'ancien rayon moyen R_0 . (i) Conservation du volume : on a le lien entre R^* et δR l'amplitude de la perturbation : $R^* = R_0 - \delta R^2/4R_0$. (ii) Variation d'énergie $\Delta E = \gamma(\int 2\pi R ds - 2\pi R_0 L) = \gamma(\int 2\pi R(x)(1 + R'(x)/2)dx - 2\pi R_0 L)$. (iii) Les longueurs d'onde supérieures à $2\pi R_0$ sont instables.

5.7.3 Instabilité de Saffman-Taylor

Un fluide de basse viscosité pousse un fluide de plus haute viscosité. Avec la loi de Darcy, si on considère une ondulation de l'interface, la perturbation croît sans tension de surface car le gradient de pression (donc la vitesse, par la loi de Darcy) est plus important sur les lignes de courant qui passent par l'extrémité des doigts (à pression de sortie fixée, voir schéma de Jérémy). La perturbation est stabilisée par la présence de la tension de surface. C'est la digitation visqueuse. La forme des doigts et leur vitesse est pilotée par le nombre capillaire $Ca = \eta V/\gamma$, pertinent quand la vitesse d'écoulement est imposée. Augmenter la vitesse réduit la largeur des doigts. C'est un problème en récupération de pétrole : injecter de l'eau plus vite réduit la fraction de pétrole récupérée.

5.7.4 Instabilité de Kevin Helmholtz

Deux fluides de viscosité différente circulant à une vitesse différente à l'interface.

5.7.5 Instabilité de Faraday

1831. Cette instabilité est observée lorsque l'on fait vibrer verticalement un liquide avec une accélération suffisamment grande. Dans ces conditions, il est possible d'observer la déformation de la surface du fluide qui se réorganise en un réseau d'ondes sous-harmoniques.

Ce phénomène hydrodynamique permet d'expliquer de nombreux autres phénomènes physiques, notamment l'existence d'un seuil au-delà duquel des gouttes d'un liquide rebondissant sur un bain du même liquide deviennent des marcheurs.

5.7.6 Culture

Forme d'une goutte sur un fil : caténoïde, avec Euler-Lagrange (cf. fiches écrites)

Relation de Kelvin : la courbure d'une interface liquide-gaz modifie la pression de vapeur saturante.

Nucléation homogène, hétérogène.

5.7.7 Ondes gravito-capillaires

Si on laisse tomber un caillou dans l'eau, on voit deux séries d'onde : des longueurs d'ondes courtes se propageant vite (régime capillaire) et des longueurs d'ondes longues se propageant plus lentement (régime inertiel). La limite se situe à $\lambda \sim l_c$. La relation de dispersion $v_\phi(\omega)$ possède un minimum à 23 cm/s. C'est la vitesse minimale qu'un objet doit avoir pour laisser un sillage stationnaire. Former un sillage dissipe de l'énergie, c'est la résistance de vague. Les trajectoires des particules de fluide sont elliptiques.

Cas limites : dans les faibles longueurs d'onde, c'est la gravité qui domine et $\omega^2 \sim kg$ et $c = \sqrt{gk}l_c$. Dans les grandes longueurs d'onde, la capillarité domine et $\omega^2 \sim \gamma k^3/\rho$ et $c \sim \sqrt{g/k}$.

Résolution : à l'interface, les conditions limites sont $P_0 = P - \gamma \partial^2 z_0 / \partial x^2$ et $\partial \phi / \partial z(z = z_0(x, t)) = \partial z_0 / \partial t$

Lorsque la houle déferle sur la plage, il s'agit d'un changement de régime (eaux profondes à eaux peu profondes) des ondes de surface.

5.7.8 Approximation de lubrification

Écoulement quasi-parallèle, écoulement visqueux et écoulement stationnaire.