

LP18 PHENOMENE DE TRANSPORT

9 juin 2020

MONNET Benjamin & Mr B

Niveau : L2

Commentaires du jury

Bibliographie

- *Thermodynamique PC-PSI*, **Le Bréal**¹ → Base pour cette leçon
- *Thermodynamique*, **DGLR** → très (trop) complet
- *Hydrodynamique physique*, **Guyon, Hulin, Petit** → pour la dernière partie

Prérequis

- Thermodynamique à l'équilibre
- Bilan
- Capacité thermique
- Diffusion

Expériences



Table des matières

1	Phénomènes de transport et équation de conservation	2
1.1	Les différents phénomènes de transport	2
1.2	Equation de conservation	2
2	Equation de la chaleur et analogie	2
2.1	Approximation linéaire et équation de la chaleur	2
2.2	Diffusion de particules et analogies	3
2.3	Modèle microscopique	4
3	Compétition entre les différents modes de transport	5
3.1	Nombre de Péclet	5
3.2	Nombre de Prandtl et couches limites	5

Introduction

Nous avons pu étudier dans le cours précédent des systèmes étant à l'équilibre thermodynamique. Nous nous sommes donc intéressés à des états stationnaires et pas à la transition entre deux états. C'est de ça que nous allons parler dans cette leçon.

1 Phénomènes de transport et équation de conservation

✎ Le Bréal

1.1 Les différents phénomènes de transport

Nous allons tout d'abord nous intéresser au cas de la chaleur. Il y a trois types de transport différents :

- La convection : elle vient du mouvement macroscopique de la matière qui entraîne aussi le mouvement de la chaleur. C'est le cas du chauffage d'une pièce
- La diffusion : c'est un mode de transport qui a besoin d'un milieu matériel. La diffusion est provoquée par les inhomogénéités du système et peut être observée pour des systèmes immobiles. On peut prendre pour exemple le chauffage d'un pavé de légume au fond d'une poêle.
- Le rayonnement : il s'agit de l'énergie thermique transmise par rayonnement électromagnétique. L'exemple le plus parlant est le soleil.

1.2 Equation de conservation

Afin d'obtenir l'équation d'évolution de la température, il nous faut un cadre d'étude. Tout d'abord, il faut que la température en un point donné en tout temps (\vec{r}, t) puisse être définie. On suppose pour cela que l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local est vérifiée. Cela signifie que même si le système macroscopique n'est pas à l'équilibre, on peut le découper en volume mésoscopique qui eux sont à l'équilibre et dont la température et l'entropie peuvent être définies. Cela suppose que l'échelle caractéristique de la variation de température est grande devant l'échelle mésoscopique.

Afin de déterminer l'équation d'évolution de la chaleur, on va effectuer un bilan thermique. Pour cela, on considère un volume V d'énergie U et d'énergie volumique u . On note \vec{j}_Q le flux de chaleur tel que $\vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$ corresponde à la quantité d'énergie thermique traversant dS . On introduit pour finir un terme de création de puissance volumique p_{vol} . Un bilan thermique du volume immobile V entre l'instant t et $t+dt$ donne :

$$U(t + dt) - U(t) = - \oint_{\delta V} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} dt + \iiint_V p_{vol} dV dt$$

Ce qui donne, avec la densité volumique d'énergie :

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_Q) - p_{vol} = 0$$

Ce qui donne finalement, en faisant apparaître la température T , la masse volumique ρ et la capacité calorifique volumique c :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_Q) - p_{vol} = 0$$

2 Equation de la chaleur et analogie

2.1 Approximation linéaire et équation de la chaleur

Afin de poursuivre les calculs et de trouver une équation différentielle portant sur la température, nous allons faire l'approximation linéaire. Celle-ci consiste à supposer que le transfert thermique s'écrit sous la forme $\vec{j}_Q = -\kappa \text{grad}T$, c'est à dire que le flux est proportionnel à la dérivée première de la température. On appelle cela la loi de Fourier. Elle est en accord avec le second principe de la thermodynamique qui assure que les échanges de chaleur se font des sources chaudes aux sources froides. De plus, on remarque que si le milieu est homogène, alors il n'y a pas de flux thermique, ce qui est en accord avec la définition que l'on a donné de la diffusion.

Dans ce cas-là, si on suppose qu'il n'y a pas de création volumique de chaleur, alors l'équation de conservation devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T \quad \text{avec} \quad D_{th} = \frac{\kappa}{\rho c}$$

On appelle D_{th} le coefficient de diffusion thermique. L'équation ci-dessus est appelée l'"équation de la chaleur". Elle possède deux propriétés notables :

- L'équation est linéaire et le théorème de superposition est par conséquent applicable. De plus, la décomposition en série de Fourier et elle aussi utilisable.
- L'équation est d'ordre 1 en temps. Cela signifie qu'elle traduit un phénomène irréversible car le changement $t \rightarrow -t$ ne laisse pas invariant l'équation.

On peut retrouver des valeurs tabulées pour le coefficient de diffusion thermique (cf DGLH page 492). Afin de mieux comprendre son sens physique, on remarque que l'équation de la chaleur donne $L \approx \sqrt{D_{th}\tau}$ où L est la longueur caractéristique de diffusion et τ le temps de diffusion. On voit ainsi que plus le coefficient de diffusion est élevée, plus la température diffuse vite.

Matériau	D_{th} ($\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$)	κ ($\text{W cm}^{-1} \text{K}^{-1}$)
Air	0,23	$0,26 \times 10^{-3}$
Eau (0°C)	$0,15 \times 10^{-2}$	$0,56 \times 10^{-2}$
Glace	$1,3 \times 10^{-2}$	$2,2 \times 10^{-2}$
Argent	1,72	4,18
Cuivre	1,2	4,1
Aluminium	0,97	2,4
Fer	0,23	0,8
Acier inoxydable	0,03 à 0,05	0,15 à 0,6
Verres	$(0,25 \text{ à } 1) \times 10^{-2}$	$(0,7 \text{ à } 1,3) \times 10^{-2}$
Polymères	$\sim 10^{-3}$	$\sim 0,3 \times 10^{-3}$
Bois	$(1 \text{ à } 2) \times 10^{-3}$	$(0,05 \text{ à } 0,25) \times 10^{-2}$

Source : Thermodynamique, DGLR

2.2 Diffusion de particules et analogies

L'équation que l'on a trouvé plus tôt est en fait plus général que le cadre de l'étude de la propagation de la chaleur. En effet on la retrouve aussi dans le cadre de la diffusion de particule. Le loi phénoménologique liant le flux concentration de particule n s'appelle la loi de Fick et prend la même forme que la loi de Fourier : $\vec{j}_n = -D \vec{\text{grad}} n$. Un bilan sur le nombre de particule dans un volume V amène alors à l'équation de la chaleur (dans l'hypothèse où il n'y a ni création ni dissipation) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$$

On peut alors donner quelques ordres de grandeur :

- Pour les gaz : $D \approx 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$
- Pour les fluides $D \approx 10^{-9} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$
- Pour les solides $D \approx 10^{-30} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$

La diffusion de particules se déroule donc plus rapidement dans un gaz. On peut mettre en évidence la diffusion des particules d'ammoniac dans l'air.



Diffusion de l'ammoniac



Prendre le dispositif prévu à cet effet.

La diffusion et le phénomène de réponse linéaire se retrouve en fait dans de nombreux domaines de la physiques.

	Diffusion de particules	Diffusion thermique	Diffusion de quantité de matière	Conduction électronique
Équation de conservation locale	$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_n = 0$	$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q = 0$	$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \text{div} \left(\frac{d\vec{F}_x}{dS} \right) = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_e = 0$
Loi de réponse linéaire	$\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$ Loi de Fick	$\vec{j}_Q = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T$ Loi de Fourier	$\frac{d\vec{F}_x}{dS} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_x$ Loi de Newton	$\vec{j}_e = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V$ Loi d'Ohm
Coefficient de Transport	D (m ² /s) Diffusivité	κ (W/m/K) Conductivité thermique	η (Pa.s) Viscosité dynamique	σ (S/m) Conductivité électrique
Coefficient de diffusion	D (m ² /s)	$D_{th} = \kappa / \rho c$ (m ² /s)	$\nu = \eta / \rho$ (m ² /s)	
Équation de diffusion	$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$	$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T$	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v}$	

On peut observer la diffusion de quantité de mouvement assez simplement avec le dispositif suivant :



Diffusion de quantité de mouvement

↙ ⊕ ↘

Prendre ledispositif pour écoulement couette plan puis coulisser. On voit la diffusion de quantité de mouvement.

↓ Nous avons jusqu'ici développé des modèles macroscopiques. Il est aussi possible de remonter à la valeur du coefficient de diffusion thermique avec un modèle microscopique.

2.3 Modèle microscopique

Afin de développer une approche microscopique, nous allons considérer un gaz parfait d'électrons dans un métal. Nous allons essayer de retrouver la loi de Fourier à l'aide des hypothèses suivantes :

- Les chocs des électrons avec le réseau se font en un temps moyen τ
- Il y a thermalisation des électrons à chaque collision
- On adopte le modèle $\frac{1}{6}$: les électrons n'ont pas de direction privilégiée

On note n la densité d'électrons et v leur vitesse. On veut calculer l'énergie qui traverse la surface dS . Le nombre d'électrons traversant dS pendant dt vaut $\delta N \frac{1}{6} n v_x dt dS \rho(\vec{v})$. La variation d'énergie d'un électron vaut, pour un électron venant de la gauche :

$$\Delta u = u(x) - u(x - v_x \tau) = \frac{du}{dx} v \tau = v \tau c \frac{dT}{dx}$$

Et pour un électron venant de la droite :

$$\Delta u' = u(x + v_x \tau) - u(x) = \frac{du}{dx} v \tau = v \tau c \frac{dT}{dx} = \Delta u$$

La quantité de chaleur traversant dS vaut donc :

$$\vec{j} = -2 \Delta u \delta N = -\frac{1}{3} v^2 \tau c n \frac{dT}{dx}$$

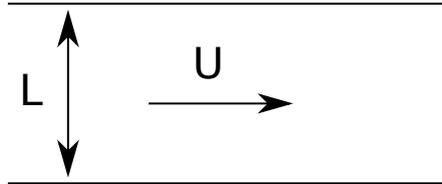
D'où $\kappa = \frac{1}{3} v^2 \tau c n$. **ODG ? Wiedemann-Franz ?**

↓ Jusqu'ici, nous avons regardé chaque mode de transport un par un. Mais comme déterminer lequel est prépondérant dans le problème que l'on étudie ?

3 Compétition entre les différents modes de transport

✎ Dulong, Hulin, Petit

3.1 Nombre de Péclet



Dans le cas où le milieu est en mouvement, l'équation de la chaleur devient :

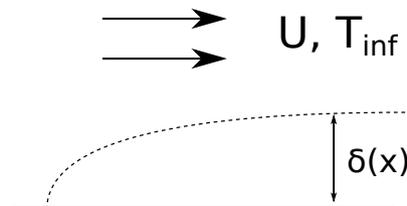
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{grad})T = D_{th} \Delta T$$

Afin de savoir si on doit prendre en compte l'advection, il faut comparer ce terme à un autre. Ainsi en ordre de grandeur :

$$\frac{\text{advection}}{\text{diffusion}} = \frac{UL}{D_{th}} = P_e$$

On appelle ce nombre le nombre de Péclet. On peut remarquer qu'il y a une forte analogie avec le nombre de Reynolds.

3.2 Nombre de Prandtl et couches limites

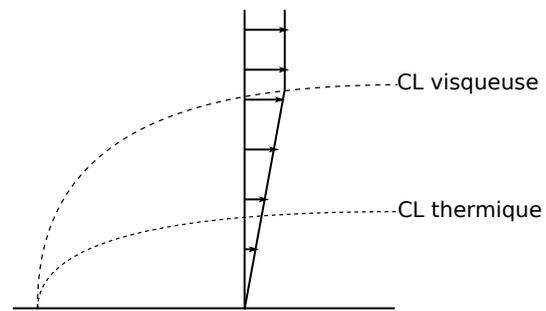


Lors d'un écoulement, on a apparition de couche limite thermique et visqueuse. On compare pour cela la viscosité à l'advection :

$$\frac{|(\vec{v} \cdot \vec{grad})v|}{|\nu \Delta v|} = \frac{\delta_v^2 U}{x\nu}$$

Ainsi, à l'abscisse x , l'épaisseur de la couche limite vaut $\delta_v = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$. On trouve par analogie pour la couche thermique $\delta_T = \sqrt{\frac{D_{th} x}{v_{lim}}}$. On peut ainsi définir le nombre de Prandtl : $Pr = \frac{\nu}{D_{th}}$ qui compare la longueur des deux couches limites. Ainsi, pour :

- $Pr \ll 1$, la couche limite visqueuse sera beaucoup plus petite que la couche limite thermique et $v_{lim} = U$.
- $Pr \gg 1$: $v_{lim} = \frac{\delta_T}{\delta_v} U$



Questions

-

Remarques

-