

LP18 - Phénomènes de transport

Gauthier Legrand et Francis Pagaud

27 juin 2020

Résumé

Bibliographie

- Thermodynamique, **Diu**
 - Thermodynamique 3e édition, **Pérez**
 - Thermodynamique PC-PSI, **Choimet, Précis**
 - Thermodynamique statistique hors équilibre, **Pottier** très précis et très clair (lire chapitre 2)
 - Hydrodynamique, 3e édition, **Guyon, Hulin, Petit**
 - <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00216432/document> instabilité de Rayleigh-Bénard
- Pré-requis : Niveau L2
- Viscosité
 - Dérivée particulière
 - Libre parcours moyen

Table des matières

1	La diffusion de particules	2
1.1	Equation de conservation locale	2
1.2	Réponse linéaire	3
1.3	Modèle microscopique	3
2	Les phénomènes de transport	4
2.1	Généralités	4
2.2	L'équation de diffusion	4
2.3	Similitudes et différences	6

3	Compétition et couplage de différents modes de transport	6
3.1	Couplage des différents transports	6
3.2	Instabilité de Rayleigh-Bénard	7
3.3	Régime $R_a \gg 1$	7
	Parler que c'est une source d'irréversibilité (Onsager ??)	

Commentaires du jury

- 2016** Les analogies et différences entre les phénomènes de transport doivent être soulignées tout en évitant de dresser un simple catalogue.
- 2015** Les liens et les limites des analogies entre divers domaines doivent être connus.
- 2013** Le candidat développera sa leçon à partir d'un exemple de son choix.
- 2010** Le jury a regretté de ne pas avoir vu d'illustration expérimentale, même simple, des transferts thermiques. Les expériences de mise en évidence de la diffusion de particules doivent être réalisées dans des conditions où le phénomène de convection n'est pas dominant. A propos du nouveau titre : il s'agit de dégager les caractéristiques fondamentales des phénomènes de transport et de les illustrer dans différents domaines de la physique.
- 2008** L'aspect microscopique doit être abordé.

Introduction

Définition du transport (Regarder dans le Taillet ?)

Problématique : Quelles grandeurs étudier et quelles caractéristiques en découlent ? Généralisation des phénomènes de transport ?

Pour ça, on va d'abord en étudier un en particulier : la diffusion de particules.

1 La diffusion de particules

Source : Pérez ch. 4 et 5

1.1 Equation de conservation locale

Source : Diu p. 462 et Choimet p. 93

En thermo on a toujours utilisé des grandeurs à l'équilibre, ici on voit bien que ce n'est pas possible d'avoir équilibre à l'échelle du volume total : il nous faut un autre formalisme.

Problème typique : concentration très forte en molécules à un endroit, type parfum. Qu'est-ce qui va se passer ? [Ceci.](#)

Attention ! Il y a équilibre thermo local ! La température locale par exemple est définie. Idem pour la densité. (on peut développer les temps de relaxation, $\tau_{meso} \ll \tau_{macro}$) Le cadre est valide si le temps évolution du phénomène $\gg$ temps relaxation du système et si la variation spatiale d'évolution est grande devant le libre parcours moyen. Cela implique que les volumes méso ne soient pas trop petits (sinon on ne fait plus de la thermo, il nous faut un nombre conséquent d'entités !)

Modèle 1 D et bilan de particules : fait dans le Choimet. (Sans vitesse macro, le terme de convection sera inclut plus tard)

$$\frac{dn}{dt} + \Phi_n(t) = 0$$

$\Phi_A(t) = \oint_S \vec{j}_A(\vec{r}, t) d\vec{S}$ est ainsi relié au **vecteur densité de courant surfacique**, $d\vec{S}$ étant orienté vers l'extérieur du volume. C'est l'explication 3D, on peut juste faire ça avec ce qui rentre à gauche - ce qui sort à droite.

Obtention d'une équation à 4 inconnues, généralisable à 3D :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(\vec{r}, t) + \text{div}(\vec{j}_A(\vec{r}, t)) = 0$$

Besoin de fermer le système.

1.2 Réponse linéaire

Source : Diu p. 476 pour les bases, p. 512 et 517 pour un cadre plus vénère et Fourier via Onsager

On a un milieu isotrope. Le système subit une fluctuation, un gradient non nul. Comment réagit-il ? Supposons que le temps de réponse soit très faible (évolution suffisamment lente, la conséquence est instantanée, Diu p. 512). On peut imaginer que le flux en réponse est une fonction de l'écart à l'équilibre $\vec{grad} N(\vec{r}, t)$.

$$\vec{j}_n(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{grad} N(\vec{r}, t)) = -\alpha \vec{grad} N(\vec{r}, t) + \beta \vec{grad} N(\vec{r}, t)^2 + \dots$$

Le terme d'ordre 0 est évidemment nul : il n'y pas de flux si le milieu est homogène (ou alors seulement des fluctuations thermiques qui se compensent / se moyennent ?).

Ce développement provient de l'hypothèse : fonction analytique. En supposant une faible variation, la réponse sera donc linéaire. **Conditions d'application : p. 478.**

Pourquoi le signe - ? Pour que le sens du courant soit cohérent.

Dans l'équation précédente, cela nous amène à :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(\vec{r}, t) = \text{div}(D \vec{grad} n(\vec{r}, t)) = \underbrace{D \Delta n(\vec{r}, t)}_{D \text{ uniforme}}$$

Lancer l'expérience de la diffusion d'ammoniac, détails sur quoi en faire un peu plus loin dans la leçon.

α est positif, ses dépendances en T, ρ , P, ... ne sont *a priori* pas triviales, il faudrait un modèle micro complet. Etudions-en un.

Vidéo ammoniac https://www.youtube.com/watch?v=_oLPBnhOCjM

1.3 Modèle microscopique

Source : Pérez ch. 4, p.79 Modèle comme en méca flu pour trouver la viscosité :

- libre parcours moyen l , volume de fluide entre $z + l/2$ et $z - l/2$ de surface S en x . On fait un bilan de flux à travers la surface : il y a $\frac{n_v(x-l)}{6} S v_m dt$ particules qui vont de $x - l$ à x , et similairement pour celles qui vont de $x + l$ à x .
- Le flux de densité volumique n_v à travers la surface S vaut donc $\Phi_{n_v} = \frac{dn_v}{dt} = \frac{S v_m}{6} (n_v(x-l) - n_v(x+l)) \simeq \frac{S v_m l}{3} \frac{\partial n_v}{\partial x}$

- On remonte alors au flux surfacique en divisant par la surface.
- Pour la diffusion de particule dans l'air dans les CNTP cela donne un coefficient de diffusion $D = \frac{v_m l}{3} \simeq 10^{-5}$ (avec $v_m = \sqrt{3k_B T/m}$, $l = 1/n_v \sigma$ et $n_v = P/k_B T$, cf Perez page 61 odg)

Source : Tec Doc Olivier ex B page 363 Modèle 1D pour simplifier. On suppose qu'une particule peut se déplacer sur une droite en des positions discrètes $x_n = na$. La particule saute tous les temps τ , et a équiprobabilité d'aller à gauche ou à droite. On peut alors écrire :

$$\underbrace{p(x_n, t + \tau)}_{\text{Proba d'être à } t \text{ en } x} = \underbrace{\frac{1}{2} p(x_{n-1}, t)}_{\text{était à gauche à } t \text{ et a sauté vers la droite}} + \underbrace{\frac{1}{2} p(x_{n+1}, t)}_{\text{était à droite à } t \text{ et a sauté vers la gauche}}$$

On peut terminer par un petit code Py, celui de la marche aléatoire si on le sent bien (premier plot).

2 Les phénomènes de transport

2.1 Généralités

Source : Diu p.466

-Transport d'une quantité conservée. **Quantité conservée** : Grandeur extensive, qui ne peut apparaître ou disparaître spontanément. Il doit y avoir apport extérieur. (définition à vérifier dans le Taillet)

A pour origine des inhomogénéités, le transport est alors véhiculé par des chocs moléculaires (ces chocs étant élastiques, il y a bien conservation des grandeurs).

Par conséquent, l'équilibre global ne peut être fait que par transport de ces grandeurs et non par collisions (d'où l'importance du vecteur densité de courant surfacique).

Exemples de grandeurs conservées : l'énergie, la quantité de matière, la quantité de mouvement et le moment cinétique, et enfin la charge électrique (pour les exemples très communs).

Conséquences : l'équation de diffusion.

2.2 L'équation de diffusion

On repart de l'équation obtenue précédemment généralisée à d'autres phénomènes.

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial t}(\vec{r}, t) + \text{div}(\vec{j}_A(\vec{r}, t)) = 0}$$

Parfois on a aussi des termes sources volumiques (discussion du Diu sur le sujet p. 470 intéressante, une force macro extérieure peut avoir le même effet) : $\frac{\partial x}{\partial t}(\vec{r}, t) + \text{div}(\vec{j}_A(\vec{r}, t)) = \sigma_A(\vec{r}, t)$

On l'a vu précédemment, avec la réponse linéaire :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(\vec{r}, t) = \text{div}(D \vec{\text{grad}} n(\vec{r}, t)) = \underbrace{D \Delta n(\vec{r}, t)}_{D \text{ uniforme}}$$

C'est l'équation de la diffusion.

Propriétés :

- Linéaire
- Phénoménologique (via Fick)
- Nécessite la CI et les CL (réservoir fixé à tout instant $n(\vec{r}_{lim}, t) = C$ ou flux imposé $\vec{j}_n(\vec{r}_{lim}, t) = \vec{C}$)
- Loi d'échelle : $\delta \sim \sqrt{Dt}$, typique de la diffusion. Permet d'obtenir des ordres de grandeur sans forcer ! Diffusion rapide sur les faibles distances $\rightarrow$ passe-bas.
- Irréversible : $t \rightarrow -t$. Egalement typique de la diffusion. (se voit déjà via la loi de Fick, invariante par rapport au temps)

Retour sur l'expérience de l'ammoniac : on vérifie ces caractéristiques. Ce serait bien de prendre deux mesures à L et $2L$, et montrer que le chronomètre affiche un temps 4 fois supérieur pour $2L$.

ODG de D pour différents types de solides (Diu p. 481) et exemples de la tasse de café / de la diffusion dans un cristal (p. 482), mention de l'expérience de Kelvin p. 483 ?

Comment la résoudre ? Evolution d'une gaussienne : programme py.

Sinon, il existe une solution élégante : cherchons une solution de similitude. Adimension $\epsilon = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$. Les CL sont en $z = 0$ à tout instant n_0 et à l'infini n_∞ . L'équation de la diff devient :

$$-\frac{1}{2}\epsilon \frac{dn}{d\epsilon} = \frac{d^2n}{d\epsilon^2}$$

$$\frac{dn}{d\epsilon} = C_0 e^{-\epsilon^2/4}$$

$$n(\epsilon) - n(\epsilon = 0) = C_0 \int_0^\epsilon e^{-x^2/4} dx = 2C_0 \int_0^\epsilon /2e^{-u^2} du$$

$$\text{Bilan : } n(\epsilon) = n_0 + \frac{2(n_\infty - n_0)}{\sqrt{\pi}} \text{erf}(\epsilon/2)$$

Tracé de la courbe : ça ne dépend que de ϵ ! A tout instant et à tout endroit, si on se balade à ϵ cst, pour ces CL, on a la même valeur de n .

Tableau comparatif des grandeurs transportées, Choimet p. 97.

	Diffusion de particules	Diffusion thermique	Diffusion de quantité de mouvement	Diffusion de charges
Grandeur conservée	Particules $[N] = 1$	Energie interne $[E] = [J]$	Quantité de mouvement $[\vec{p}] = [\text{kg} \cdot \text{m/s}]$	Charge ; $[Q] = [C]$
Inhomogénéité	$\text{grad}n \neq 0$	$\text{grad}T \neq 0$	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \neq 0$	$\text{grad}V \neq 0$
Loi de transport	$\vec{j}_n = -D \text{grad}n$	$\vec{j}_Q = -\kappa \text{grad}T$	$\frac{d\vec{F}}{dS} = -\eta \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$	La loi d'Ohm $\neq$ diffusion
Coefficient de transport	$D [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$	$\kappa [\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]$	$\eta [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]$	Cela se retrouve pour l'effet de peau.
Coefficient de diffusion	$D [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$	$D_{th} = \frac{\kappa}{\rho C}$ $[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$	$\nu = \frac{\eta}{\rho} [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$	

Expérience du conductisque, classification et obtention des ODG des coeffs de diffusion.
<https://youtu.be/69H-X8nN2mM> faire un ODG.

2.3 Similitudes et différences

Source : Diu p. 481 et suivantes

-Toutes ces équations permettent un retour à l'équilibre thermo global, intimement lié à la thermo. Mais si le principe de conservation se fait sur une variable extensive, pour en arriver à l'équation de diffusion, il faut utiliser la loi de transport qui ne couple pas toujours les bonnes valeurs. Ainsi, l'équation pour la chaleur et la quantité de mouvement se font sur des variables intensives !

-Les valeurs des différents coeffs de diffusion n'ont rien à voir. Mais le raisonnement nécessite tous un équilibre thermo local. On a considéré les autres variables constantes, mais il y a des dépendances des coefficients de transports en ces variables.

— $\frac{\partial D}{\partial T} > 0$ (plus d'agitation thermique).

— $\frac{\partial v_{gaz}}{\partial T} > 0$ (idem) MAIS $\frac{\partial v_{liq}}{\partial T} < 0$ (interactions cohésives moins fortes devant la température ?)...

— **on avait vu ça pour la viscosité dynamique, pas cinématique et comme ρ est décroissante avec T ça pose problème pour les phases condensées**

Enfin, les ordres de grandeur de variation de D selon les phases sont très grands comparés à v et D_{th}

-Mécanismes de la conduction thermique multiples : pour les métaux, il y a le transport des électrons et la vibration du réseau (seulement le deuxième pour les isolants), contrairement aux autres phénomènes.

-la conservation des particules et de la charge ont les mêmes causes. Mais la loi d'Ohm : obéit à une vraie force extérieure due à $\vec{E}$.

Ici, on a considéré pas de perturbation. D'autres phénomènes rentrent en compétition : la convection, communes à toutes les diffusions. Mais l'énergie comporte également le rayonnement.

Transition : Nous avons compris les mécanismes de transports lorsqu'ils sont indépendants. Cependant c'est rarement le cas dans la réalité physique. Nous allons voir comment traiter ces problèmes sur l'exemple de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

3 Compétition et couplage de différents modes de transport

vidéo d'illustration de l'instabilité de Rayleigh-Bénard. On peut aussi faire l'expérience avec de l'huile et du colorant (je l'ai déjà fait en première en svt ça se fait bien)

3.1 Couplage des différents transports

Source : GHP ch. 11

Dans un fluide, la chaleur peut être transportée par advection et par conduction. On a donc
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T = \kappa \Delta T.$$

On sent déjà dans l'équation de la diffusion thermique qu'il va y avoir un couplage entre le mouvement du fluide (et donc la diffusion de quantité de mouvement de celui-ci) et le transport de chaleur.

Écrivons Navier-Stokes pour voir où apparaît le couplage en température

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho(T)} \vec{\nabla} P + \vec{g} + \nu(T) \vec{\nabla}^2 \vec{v}$$

Ici le couplage se fait au niveau des dépendances en température de ρ et ν .

On mélange alors dans ce problème la diffusion et convection de chaleur et de quantité de mouvement.

3.2 Instabilité de Rayleigh-Bénard

Concrètement ce qu'il se passe c'est que le théorème de Kelvin n'est pas vérifié (déjà à cause de la viscosité), mais surtout à cause du fait que le terme $-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P$ ne dérive pas d'un potentiel "les isochores du fluides ne sont pas confondues avec les isobares".

Un gradient de température est imposé dans la direction de $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Donc ρ est une fonction croissante de z . Les deux plaques sont espacées de d et la différence de température est ΔT . On note (approximation linéaire) $\rho(T) = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$

Description qualitative : si une particule fluide en z , de masse volumique $\rho(z)$ se déplace en $z + dz$ par fluctuation thermique, alors la poussée d'Archimède est dirigée vers le haut puisque $\rho(z + dz) > \rho(z)$, ce qui accentue la fluctuation. On a bien une instabilité. (on n'a pas considéré les différentes échelles de temps ici)

L'instabilité peut s'établir si les processus homogénéisant ne sont pas suffisamment efficace : pour l'observer le fluide doit être peu visqueux et mauvais conducteur thermique.

Hypothèse : temps d'évolution de la vitesse très petit devant temps d'évolution thermique. Cette hypothèse se justifie en évaluant le nombre de Prandtl $Pr = \tau_{\text{thermique}} / \tau_{\text{vitesse}} = \nu / \kappa \simeq$. C'est ce genre de nombre adimensionné qui servira à simplifier les problèmes ou les transports sont couplés.

Trouver d'autres nombres sans dimension qui vont bien : Péclet Pe = convection / conduction, Nusselt Nu = convection / conduction, Sherwood

Dans notre cas, l'instabilité peut se développer lorsque la force déstabilisante est plus forte que la force stabilisante. On fait un bilan des forces à une particule fluide (supposée sphérique de rayon R) dans le cas limite où ces deux forces sont égales.

La force stabilisante est la force de traînée de Stokes $F_S = -6\pi\eta Rv$.

La force déstabilisante est la poussée d'Archimède : $F_D = \frac{4}{3}\pi R^3 \delta \rho g$, avec $\delta \rho = -\alpha \rho_0 \delta T = -\alpha \rho_0 \delta T \frac{\delta z}{d}$
 δz est la variation d'altitude avant thermalisation, donc en ordre de grandeur $\delta z \simeq \nu \tau_Q \simeq \nu \cdot \frac{4\pi R^2}{\kappa}$

De plus, on considère que le rayon de la particule fluide du modèle a rayon qui varie comme $R \propto d$.

Finalement $R_a = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu \kappa}$, qui doit être plus grand qu'un nombre de Rayleigh critique, qui vaut typiquement 3000 pour de l'eau avec $\Delta T = 10^\circ\text{C}$.

3.3 Régime $R_a \gg 1$

TD 11 méca flu (des choses dans le GHP?)

Peut-être ? Parce que finalement Rayleigh Bénard c'était pas mal calculatoire, donc ça serait bien de mettre une dernière couche de physique avant de conclure.

Dans ce régime, la turbulence apparaît : des couches limites thermiques et visqueuses apparaissent sur les plaques horizontales. On connaît du cours de méca flu la taille de la couche limite visqueuse δ_{visq} .

Pour évaluer la couche limite thermique δ_{th} , on suppose que dans celle-ci seule la conduction existe, donc le transfert thermique s'écrit $Q = \lambda \frac{\Delta T}{2\delta_{th}}$, d'où $\delta_{th} = \frac{d}{2N_u}$

Conclusion

Commentaires pendant la prépa aux oraux

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Relations_de_r%C3%A9ciprocit%C3%A9_d%27Onsager
Pour avoir ça en tête
-

Questions

-
-
-
-

Passage de CLDS le 19/05

Très bonne explication qualitative et graphique de l'équation de diffusion avec la courbure de la fonction. Ça peut encore être amélioré en argumentant avec la physique

- volume mésoscopique ? Quelle est sa taille ?
- Grandeur non conservée ? Dès qu'il y a des termes de création dans l'équation de la diffusion c'est que la grandeur qu'on regarde n'est pas conservée
- Pourquoi on s'arrête à l'ordre 1 dans la démo de l'équation de la diffusion ? (on regarde le premier terme non nul, si ça suffit pour décrire c'est bon, sinon on affine) Et surtout on fait la théorie de la réponse linéaire pour la loi de Fick par exemple, donc aucune raison d'aller chercher l'ordre 2 ailleurs
- $\text{div}(nv) = v \cdot \text{grad}(n) + n \cdot \text{div}(v)$ premier terme c'est la dérivée particulaire, second terme c'est dû à la compressibilité du volume mésoscopique
- Il faut prendre des pincettes pour l'atmosphère isotherme : ce qui est stationnaire c'est la somme des flux sur tout l'atmosphère (localement ça marche pas : courant d'air par ex) donc utiliser des densités de courant de particules c'est douteux...
-

Ça manquait de physique et de vision globale des phénomènes de transport.

Ça serait bien de finir par un tableau récapitulatif. Comme ça on passe toute la leçon sur un exemple particulier et à la fin on distingue bien les limites des analogies.

Attention pour la conduction c'est