

# LP21 - INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : jsp

## Bibliographie

- ⚡ *Tout-en-un PCSI*
- ⚡ *Mauras EM*
- ⚡ *Précis*
- ⚡ *Hprépa EM*
- ⚡ *Garing de magnétisme*
- ⚡ *Ray Objets du quotidien*

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le phénomène d'induction électromagnétique</b>	<b>2</b>
1.1	Cadre de l'étude . . . . .	2
1.2	Loi de Faraday . . . . .	3
1.3	Circuit mobile dans un champ stationnaire . . . . .	4
1.4	Bilan . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Couplage électromagnétique entre les circuits</b>	<b>5</b>
2.1	Auto-induction . . . . .	5
2.2	Induction mutuelle . . . . .	6
2.3	Application aux transformateurs . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Courants induits</b>	<b>8</b>
3.1	Description du phénomène . . . . .	8
3.2	Freinage par induction . . . . .	9
3.3	Chauffage par induction . . . . .	11

## Remarques sur les leçons précédentes

**2015** L'algébrisation rigoureuse des grandeurs électriques et mécaniques est nécessaire lors de la paramétrisation.

**2014** Dans cette leçon, le plus grand soin s'impose dans la définition des orientations et des conventions de signe. Les applications doivent occuper une place significative dans la présentation. Il n'est pas admissible à ce niveau de confondre les forces de Lorentz et de Laplace.

On peut faire pleins de choses mais faut pas tomber dans le piège des gens du book qui ont voulu en faire trop. On peut pas faire les courants de Foucault et une étude de conversion électromécanique je pense, y'a un choix à faire là surtout. Perso je ferais une définition propre de l'induction avec les équations de Maxwell en pré-requis (on démontre ce qu'on fait comme ça et on pose toutes les hypothèses). On pose le cadre, on démontre Faraday. ON évoque la loi de Lenz puis les deux types d'induction. Après une partie sur les couplages entre circuits (coeff d'inductance, application au transfo). et enfin une partie sur les courants de Foucault (loi d'Ohm en pré-requis avec d'abord une présentation du phénomène puis une ou deux applications, je dirais plutôt le freinage en premier pck on peut faire la chute de l'aimant. Finalement c'est un plan qui ressemble bcp à Cléments/Benjamin/Coentzin. J'ai pas trouvé d'applications originales particulièrement stylées tant pis, c'est bien de se raccrocher à des trucs du quotidien.

## Introduction



### Induction d'un système aimant-bobine



On a une bobine dont les bornes sont reliées à un ampèremètre. On approche un aimant et on voit apparaître un courant. Mais quand l'aimant est immobile on ne voit rien.

C'est pas si étonnant que ça puisque si  $B$  varie on a vu avec les équations de Maxwell que  $E$  n'est plus à circulation conservative.

↓ *Comment décrire proprement ce phénomène ?*

## 1 Le phénomène d'induction électromagnétique

### 1.1 Cadre de l'étude

↪ Mauras p424

Pour étudier les phénomènes d'induction on se place dans le cadre de l'approximation des régimes stationnaires. Cela signifie que l'on néglige la propagation de l'interaction électromagnétique dans les circuits. Comme on l'a vu, pour un circuit de taille caractéristique  $L$  et  $\tau$  une durée caractéristique de variation d'intensité du courant cette approximation revient à :

$$L \ll c\tau \quad (1)$$

Pour des courants industriels avec  $f=50$  Hz on a une longueur limite d'ARQS de 6000 km donc c'est une approximation peu restrictive à a priori à notre échelle.

De plus, comme on l'a vu, il existe deux types d'ARQS en électromagnétisme : l'ARQS magnétique et l'ARQS électrique. Pour étudier l'induction, on se placera dans l'ARQS magnétique. Cela signifie alors que l'on a :

$$\|\mathbf{j}\| \gg \rho c \quad c\|\mathbf{B}\| \gg \|\mathbf{E}\| \quad (2)$$

Dans ce cadre on a alors vu que les équations de Maxwell étaient équivalentes aux équations dans le cadre général mais sans le terme de courant de déplacement.<sup>1</sup> Les équations de Maxwell sont alors les suivantes<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3)$$

On rappelle par ailleurs que dans un conducteur, un champ électrique provoque une circulation de courant décrite par la loi d'Ohm :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (4)$$

On voit alors qu'une variation de champ magnétique va créer un champ électrique qui va lui même créer un courant qui à son tour va créer un champ magnétique... On approche alors le phénomène d'induction...

↓ Mettons ça en équation pour en déduire les lois fondamentales

## 1.2 Loi de Faraday

Considérons un circuit filiforme indéformable  $\mathcal{C}$  orienté (**schéma au tableau**) plongé dans un champ magnétique variable  $\mathbf{B}(t)$ . On définit la force électromotrice induite dans le circuit comme :

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5)$$

Elle s'appelle ainsi puisqu'elle représente en quelque sorte la résultante de la force de Lorentz appliquée sur les charges du circuit provoquée par la variation du champ  $\mathbf{B}(t)$ . De même que pour la dénomination pour les piles, cette grandeur représente une tension appliquée au circuit.

Calculons alors cette fem induite en repartant des équations de Maxwell. On rappelle l'expression du champ électrique en fonction du potentiel vecteur et du potentiel scalaire :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6)$$

On calcule alors sa circulation le long du circuit, non nulle puisque le champ magnétique est variable :

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } V \right) \cdot d\mathbf{l} \quad (7)$$

$$e = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (8)$$

En utilisant le théorème de Stokes et en notant  $d\mathbf{S}$  l'élément de surface associé au contour orienté on a alors simplement :

$$e = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (9)$$

En notant  $\phi$  le flux du champ magnétique à travers cette surface on a :

1. Tout le monde met la non accumulation des charges comme une hypothèse mais c'est une conséquence de l'ARQSM en réalité  
2. Il n'y a aucune raison de te j la densité de charge donc l'histoire de fermer le système avec Ohm c'est très bof

$$\phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (10)$$

soit finalement :

$$e(t) = -\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (11)$$

Cette loi reliant la force électromotrice induite et la variation du champ (du flux) s'appelle la loi de Faraday. Ce n'est finalement rien d'autre qu'une forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday. Cette loi dégage un premier aspect qualitatif des phénomènes d'induction : la loi de Lenz. Le signe moins dans cette expression montre en effet que le courant créé par la fem induite va s'opposer à la variation de flux ressentie initialement par le circuit. Prenons un cas concret pour imaginer cela : une spire dont on approche un aimant. **Faire les schémas au tableau pour les orientations.** En approchant mon aimant, j'augmente le flux à travers la spire d'après ma convention d'orientation choisie. Je crée alors une fem induite dans ce sens, ce qui produit un courant dans ce sens. Avec la règle de la main droite, on voit que ce courant va provoquer l'apparition d'un champ magnétique dans ce sens, donc un flux négatif à travers la spire, on a bien opposition à l'augmentation de flux.

↓ Mais si je fais bouger ma bobine dans le champ de l'aimant je vois aussi un courant

### 1.3 Circuit mobile dans un champ stationnaire

✎ Poly de Jérémie p90 surtout

En effet, si je bouge pas bobine sans bouger l'aimant, dans le référentiel du circuit le champ magnétique a varié temporellement ! On comprend alors ce phénomène d'induction de la même manière que précédemment. Pour définir la force électromotrice induite résultante, plaçons nous simplement dans le référentiel du circuit  $\mathcal{R}'$  supposé inertiel, se déplaçant à la vitesse  $\vec{v} \ll c$  par rapport au référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$  lui aussi supposé inertiel. En se rappelant que l'on est ici dans le cadre de l'ARQSM, les transformations des champs sont les suivantes :

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (12)$$

Donc on a finalement :

$$e = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \oint_C [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (13)$$

or dans le champ  $\mathbf{E}$  est à circulation conservative puisque  $\mathbf{B}$  est constant donc on a :

$$e = \oint_C (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (14)$$

### 1.4 Bilan

On a donc deux possibilités pour observer des phénomènes d'induction dans un circuit :

- Le circuit est fixe dans un champ magnétique dépendant du temps, on parle alors d'induction de Neumann.
- Le circuit se déplace dans un champ magnétique stationnaire, on parle alors d'induction de Lorentz.

Dans les deux cas on a pu établir une expression de la force électromotrice résultante des phénomènes d'induction. Le problème se ramène alors à celui du circuit initial auquel on ajoute un générateur de tension idéal délivrant la force électromotrice  $e(t)$  !

↓ En pratique ça donne quoi ?



## 2 Couplage électromagnétique entre les circuits

### 2.1 Auto-induction

☛ Dunod PCSI p1074

Si l'on considère un circuit dans lequel circule un courant  $i$ , celui-ci va générer un champ magnétique  $\mathbf{B}$  proportionnel à ce courant d'après la loi de Biot et Savart. Or, du fait que les lignes de champ magnétique s'enroulent autour des sources, ce champ magnétique crée un flux magnétique  $\phi_p$  à travers le circuit qui lui a donné naissance. On parle alors de flux propre. Ce flux propre étant proportionnel à la norme du champ magnétique, il est aussi proportionnel au courant traversant le circuit. On définit alors le coefficient de proportionnalité  $L$  entre ces deux grandeurs comme l'inductance propre du circuit :

$$\phi_p = Li \quad (15)$$

Il s'exprime en Henry, notés  $H$ . Ce n'est pas une unité du système international, on a  $H = m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$ .

Prenons l'exemple d'un solénoïde de longueur  $L$  constitué de  $N$  spires de surface  $S$  :

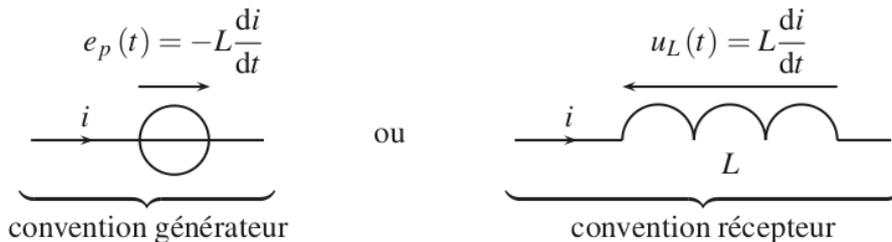
$$\phi_p = Li = NBS \implies L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \quad (16)$$

Si un courant variable dans le solénoïde on a donc une variation du flux propre et donc un phénomène d'induction a lieu : une tension apparaît aux bornes de la bobine. En écrivant la loi de Faraday, cette tension induite est :

$$e_p(t) = -\frac{d\phi_p}{dt} \quad \text{soit} \quad e_p(t) = -L \frac{di}{dt} \quad (17)$$

Donc finalement, pour modéliser ce phénomène d'auto-induction, il suffit d'ajouter au circuit électrique équivalent (ici juste un fil) un générateur de tension de fem  $e_p$ . On est alors en convention générateur. Si on choisit maintenant de se placer en convention récepteur on a alors :

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \quad (18)$$



et on retrouve alors la loi de l'électrocinétique pour les inductances ! Ainsi, l'inductance propre correspond exactement à l'inductance que vous avez vu dans les cours d'électrocinétique. On peut vérifier ça en comparant la valeur donnée par un RLC-mètre et la formule théorique déterminée précédemment :



#### Mesure d'une inductance



On mesure au RLC-mètre l'inductance d'une bobine de caractéristiques géométriques connues et on compare à la valeur théorique.

↓ On a donc déjà un effet du circuit sur lui-même, imagine qu'on en mette deux en interaction

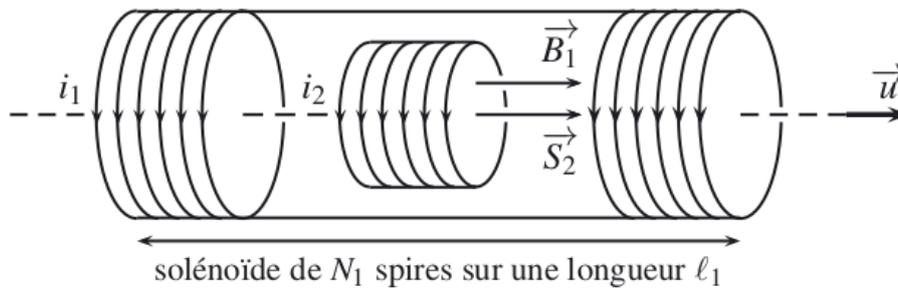
## 2.2 Induction mutuelle

↗ Dunod p1078

Si on met deux circuits en interaction avec l'autre alors chaque circuit est traversé par deux flux magnétique : un flux propre correspond au champ magnétique qu'il crée lui-même et un autre flux issu du champ magnétique créé par le deuxième circuit. On note  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  les deux circuits dont il est question,  $i_1$  et  $i_2$  les courants les traversant et  $L_1$  et  $L_2$  leurs inductances propres respectives. On note alors  $\phi_{1,p}$  et  $\phi_{2,p}$  les flux propres de chaque circuit et  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  et  $\phi_{2 \rightarrow 1}$  les flux couplants. De la même manière que l'on a justifié que  $\phi_{1,p} \propto i_1$  on a  $\phi_{2 \rightarrow 1} \propto i_2$  et  $\phi_{1 \rightarrow 2} \propto i_1$ . On définit alors les coefficients d'inductance mutuelle :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12}i_1 \quad \phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21}i_2 \quad (19)$$

Calculons ces coefficients d'inductance mutuelle dans le cas de deux bobines l'une dans l'autre :



Soit  $n_1 = \frac{N_1}{\ell_1}$  le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde 1. Alors le champ magnétique créé par ce solénoïde a pour expression :

$$\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 i_1 \vec{u} = \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} i_1 \vec{u}$$

Le flux de ce champ à travers une spire du solénoïde 2, de vecteur surface  $\vec{S}_2 = S_2 \vec{u}$ , est :

$$\varphi_{1 \rightarrow \text{spire } 2} = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = \left( \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} i_1 \vec{u} \right) \cdot (S_2 \vec{u}) = \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} S_2 i_1$$

et son flux à travers le solénoïde 2 est :

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \varphi_{1 \rightarrow \text{spire } 2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} S_2 i_1$$

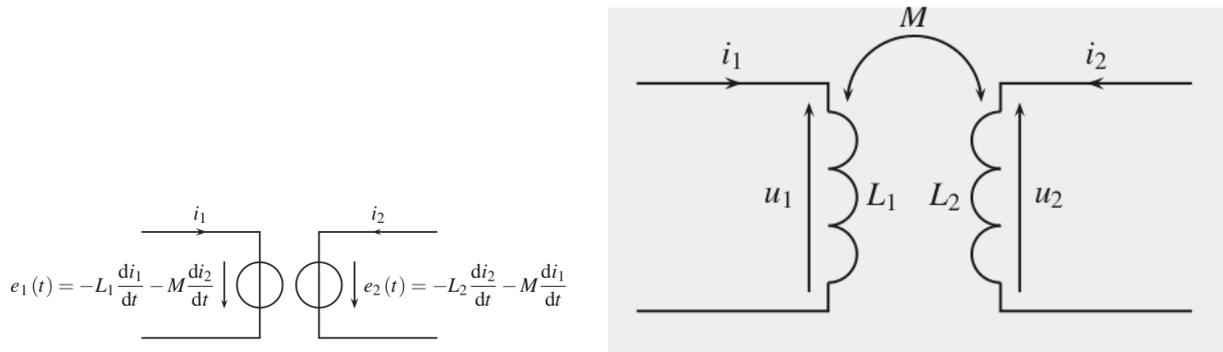
On identifie alors l'expression de l'auto-inductance :

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} S_2 i_1 \quad \text{donc} \quad M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} S_2.$$

Si l'on opère le même calcul pour le flux du solénoïde 2 à travers le solénoïde 1 on trouve le même coefficient d'inductance mutuelle. Il existe en fait une symétrie entre ces deux coefficients définis ainsi, ils sont égaux. Ce résultat constitue le théorème de Neumann :

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (20)$$

En sommant finalement les flux et en utilisant la loi de Faraday, on obtient les circuits équivalents suivants dans le cas général :



### 2.3 Application aux transformateurs

➤ Dunod p1084 Hprépa p148

On a donc pour deux circuits couplés par induction le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (21)$$

La puissance magnétique associée ce système est :

$$\mathcal{P} = u_1 i_1 + u_2 i_2 \quad (22)$$

d'où on tire l'énergie magnétique en la considérant nulle pour des courants nuls :

$$E_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (23)$$

Le coefficient d'inductance mutuelle M dépend de la position relative des deux circuits, pour fixer ses valeurs limites on peut utiliser le fait que l'énergie magnétique est définie positive donc en posant  $x = \frac{i_1}{i_2}$  on a :

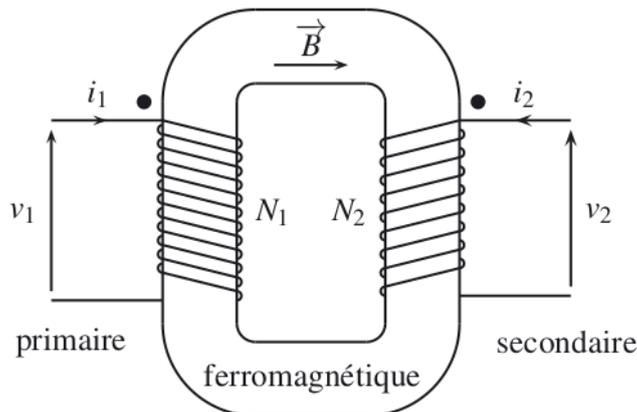
$$\frac{1}{2} L_1 x^2 + Mx + \frac{1}{2} L_2 \geq 0$$

Ce qui implique (calcul du discriminant) que

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

Le cas limite correspond à celui d'un couplage idéal : toutes les lignes de champ créées par un circuit traversent le second circuit. Cette limite stricte est en réalité impossible on aura toujours des pertes de flux. Toutefois il est possible de les limiter au maximum : c'est le cas du transformateur.

Un transformateur est un dispositif constitué de deux enroulements reliés par un matériau ferromagnétique. Le rôle de ce ferromagnétique est de canaliser les lignes de champ magnétique de la même manière qu'un tube canalise un écoulement. Ainsi, la grande majorité du flux sortant du circuit primaire est transmis dans le circuit secondaire : on a alors un couplage que l'on peut considérer parfait.



En assimilant ces deux circuits à deux solénoïdes infini avec un nombre de spires  $N_1$  et  $N_2$  différents on a alors :

$$\begin{cases} \frac{u_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{di_2}{dt} \\ \frac{u_2}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{di_2}{dt} + \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Ces deux tension sont donc de la même forme. Étant donné que l'on a montré  $L^2$  il vient finalement

$$\frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2}$$

Le transformateur permet donc d'augmenter ou d'abaisser l'amplitude de la tension d'un signal alternatif. C'est un dispositif essentiel pour passer des lignes HT où l'énergie électrique est transportée avec une amplitude en tension de 20000 V à 40000 V à nos prises secteur de 220 V.

### 3 Courants induits

#### 3.1 Description du phénomène

↯ Dunod p1087 et Précis p158 et Hprépa p220

Le ferromagnétique qui constitue le transformateur est un conducteur non parfait, de conductivité  $\gamma$  finie. Étant soumis à un champ magnétique créé par des sources extérieures et dépendant du temps  $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_e(t)$  L'écriture de l'équation de Maxwell-Faraday permet de voir la création d'un champ électrique induit  $\mathbf{E}_i$  dans le matériau :

$$\text{rot } \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial t}$$

En prenant alors en compte la conductivité finie du matériau, il vient un vecteur densité volumique de courant induit  $\mathbf{j}_F = \gamma \mathbf{E}_i$ . Ces courants induits par un champ magnétique extérieur variable sont appelés courants de Foucault, du nom du physicien Léon Foucault qui les a mis en évidence en 1851.

**Exemple :** un conducteur cylindrique de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  de volume  $\mathcal{V} = \pi R^2 h$  soumis à un champ extérieur  $\mathbf{B}_e = B_e \mathbf{e}_z = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_z$  parallèle à l'axe de révolution  $\mathbf{e}_z$ . Pour trouver le champ électrique induit  $\mathbf{E}_i$  nécessaire à la détermination des courant de Foucault, il faut déjà faire un peu de symétrie et invariance.  $\mathbf{E}_i$  dépend pas de  $\theta$ . En assimilant le champ en chaque point au champ extérieur, on a en un point M distant de l'axe de  $r$  on peut utiliser Maxwell-Faraday et

$$\mathbf{E}_i = -\frac{1}{2} r \frac{dB_e}{dt} \mathbf{e}_\theta$$

Ce qui permet de trouver les courant de Foucault :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_F &= -\gamma \frac{1}{2} r \frac{dB_e}{dt} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{j}_F &= -\gamma \frac{1}{2} r \omega B_0 \sin(\omega t) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

#### Remarques

- on peut représenter les courants de Foucault qui sont notamment plus importants loin de l'axe
- le champ magnétique créé par ces courants est dans le sens opposé au champ extérieur  $\mathbf{B}_e$  : rôle du signe - et loi de Lenz !
- le calcul réalisé l'a été à l'ordre 1, ie on ne prend pas en compte le champ magnétique crée par les courants de Foucault (il est négligeable mais il est là)

On peut calculer la puissance dissipée  $\mathcal{P}$  par effet Joule par ces courants :

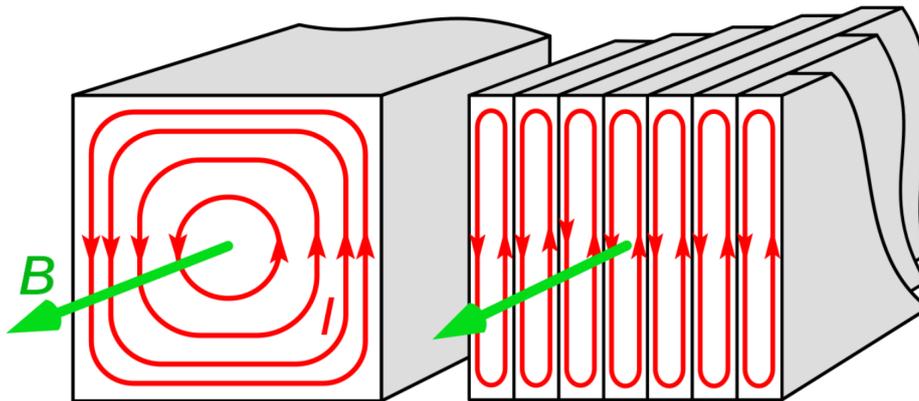
$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle &= \left\langle \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}_F \cdot \mathbf{E}_i \, d\tau \right\rangle \\ \langle \mathcal{P} \rangle &= \frac{1}{\gamma} \int_{\mathcal{V}} \langle \mathbf{j}_F^2 \rangle \\ \langle \mathcal{P} \rangle &= \frac{\mathcal{V}}{8} \gamma \omega^2 B_0^2 R^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle \end{aligned}$$

La puissance volumique dissipée par effet Joule est donc :

$$\frac{\langle P \rangle}{V} = \frac{\gamma \omega^2 B_0^2 R^2}{16}$$

Dans les transformateurs où les courants de Foucault représentent une source de perte non négligeable (cf la biblio de la LP46). On peut les contrôler de deux manières pour un métal donné :

- Jouer sur  $\omega$  par la puissance en dépend fortement, en  $\omega^2$ . faire attention car  $\omega$  intervient aussi dans l'épaisseur de peau  $\delta = \sqrt{\frac{1}{\gamma \mu_0 \omega}}$  qui détermine la pénétration du champ électromagnétique dans le conducteur
- Jouer sur la surface sur laquelle les courants de Foucault peuvent se développer. Pour limiter les courants de Foucault on peut donc limiter cette surface, comme c'est fait dans les transformateurs : c'est le feuilletage.



On repart du transfo. Il est conducteur donc B variable qui donne e va faire du j par la loi d'Ohm. Resituer historiquement la découverte (Corentin). Montrer que ça fait de la dissipation. Montrer la dépendance en fréquence (Corentin) -> on peut limiter à BF. Autre moyen de limiter : le feuilletage (schéma des Cléments), retour au transformateur.

↓ Mais c'est pas seulement qqch dont on veut se débarrasser

### 3.2 Freinage par induction

⚡ Garing Magnétisme

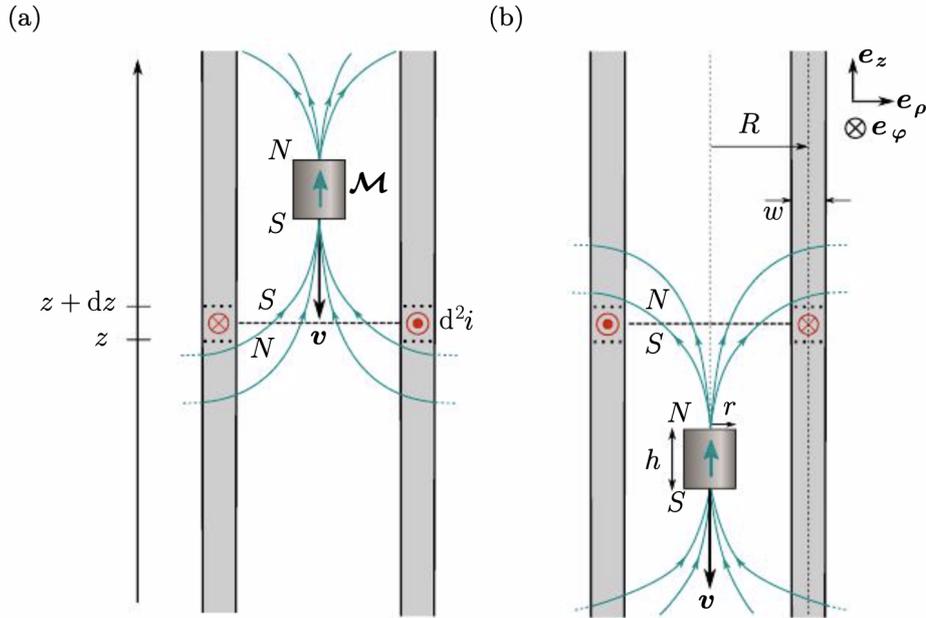


#### Chute d'un aimant dans un tube conducteur

⚡ ⊗  
Présenter le phénomène en montrant le ralentissement de la chute.

Nous illustrons dans cette expérience l'apparition de courants induits dans un tube conducteur soumis au champ magnétique variable d'un aimant permanent chutant dans le tube. Il s'agit d'un cas particulier de freinage magnétique, dispositif aujourd'hui utilisé sur de nombreux véhicules lourds en complément de freins classiques.

Cette force de freinage magnétique est d'origine inductive. Les courants induits sont en effet dissipés par effet Joule dans le tube conducteur, pré-levant ainsi une partie de l'énergie mécanique de l'aimant, ce qui se traduit par son freinage. L'aimant atteint une vitesse limite lorsque les puissances dissipée par effet Joule et fournie par le poids se compensent.



**Fig. 1** Un aimant de moment magnétique  $\mathcal{M}$ , orienté vers le haut, chute à la vitesse  $v$  dans un tube conducteur. Considérons un anneau, de hauteur  $dz$ , orienté dans le sens direct par rapport à  $e_z$ . (a) Lorsque l'aimant s'en approche, le flux magnétique (positif) à travers l'anneau augmente. Le courant induit circule dans le sens indirect d'après la loi de Lenz ( $d^2i < 0$ ). (b) Lorsque l'aimant s'en éloigne, le flux magnétique (positif) décroît. Le courant induit circule donc dans le sens direct ( $d^2i > 0$ ). Une interprétation en termes de pôles magnétiques nord ( $N$ ) ou sud ( $S$ ) de l'aimant et de la boucle de courant explique le freinage de l'aimant dans les deux cas.

Expression générale de la force de freinage Considérons l'aimant à un instant donné, en  $z = 0$ . La symétrie axiale du problème, et en particulier de la distribution de courants, amène à écrire le champ magnétique sous la forme  $\mathbf{B}(\rho, z) = B_\rho(\rho, z)\mathbf{e}_\rho + B_z(\rho, z)\mathbf{e}_z$ . D'après la loi d'Ohm locale, le courant élémentaire circulant dans un anneau  $\mathcal{C}$  de hauteur  $dz$ , de rayon  $\rho$  et d'épaisseur  $d\rho$ , s'écrit

$$d^2i = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_\varphi d\rho dz = \sigma v B_\rho d\rho dz$$

où l'on a injecté l'Éq. (2) dans la seconde égalité. La force élémentaire de Laplace exercée par l'aimant sur l'anneau a pour expression

$$d^2\mathbf{F} = \oint_{\mathcal{C}} (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) d^2i$$

où  $d\mathbf{l} = \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi$  désigne un élément de longueur infinitésimale de  $\mathcal{C}$ . La composante radiale de cette force s'annule par symétrie de révolution, tandis que la composante verticale vaut

$$d^2F = d^2\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z = \int_0^{2\pi} d\varphi (\rho \mathbf{e}_\varphi \times B_\rho \mathbf{e}_\rho) \cdot \mathbf{e}_z d^2i = -2\pi \rho B_\rho d^2i$$

En combinant les Éq. (3) et (5), on trouve  $d^2F = -2\pi \rho \sigma v B_\rho^2 d\rho dz$ . Si l'aimant est loin des extrémités du tube, celui-ci peut être considéré de hauteur infinie. La force de Laplace  $\mathbf{F}$  qui s'exerce sur tout le volume du tube s'obtient par intégration :

$$\mathbf{F} = - \left( \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{R-w/2}^{R+w/2} d\rho 2\pi \rho B_\rho^2(\rho, z) \right) v \mathbf{e}_z$$

En vertu du principe des actions réciproques, la force de freinage magnétique subie par l'aimant est l'opposée de la force de Laplace  $\mathbf{F} = F \mathbf{e}_z$ ; elle est orientée en sens contraire de  $\mathbf{v} = -v \mathbf{e}_z$  et s'oppose ainsi au poids de l'aimant pendant sa chute. De plus, elle est proportionnelle à la vitesse  $v$  de l'aimant : c'est donc l'analogue magnétique d'une force de frottement fluides à bas nombre de Reynolds. Dorénavant, nous posons  $F = -\alpha v$ , où  $\alpha > 0$  est le coefficient de freinage magnétique. Essayons d'obtenir une expression plus explicite de  $\alpha$  à partir d'approximations successives.

**Tube de faible épaisseur** Si l'épaisseur  $w$  du tube est faible devant son rayon moyen  $R$ , on peut supposer  $B_\rho$  uniforme sur cette épaisseur, et l'Éq. (6) donne

$$\alpha = 2\pi R w \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dz B_\rho^2(R, z)$$

**Approximation dipolaire** L'aimant est de forme cylindrique, de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  négligeables devant la hauteur du tube. À une distance grande devant  $r$  et  $h$ , le champ magnétique produit par l'aimant s'approche du champ créé par un dipôle de même moment magnétique  $\mathcal{M}$ , dont les composantes s'écrivent (en choisissant l'origine des coordonnées cylindriques au centre de l'aimant)

$$\begin{cases} B_{\rho, \text{dip}}(\rho, z) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{3\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \\ B_{z, \text{dip}}(\rho, z) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \end{cases}$$

on obtient

$$\alpha = 2\pi R^2 w \sigma \left( \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2}{(1+x^2)^5}$$

où l'on a effectué le changement de variables  $x = z/R$ . L'intégrale précédente vaut  $5\pi/128$ , d'où l'on tire finalement

$$\alpha = \frac{45\mu_0^2 \sigma w \mathcal{M}^2}{1024 R^4}$$

Plus la conductivité  $\sigma$  est grande et le tube épais, et plus le champ magnétique est fort dans le tube (c'est-à-dire plus  $\mathcal{M}$  est grand et  $R$  faible), plus l'intensité des courants est élevée, et le freinage efficace.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'aimant dans le référentiel galiléen du laboratoire, et en supposant que l'aimant ne frotte pas contre le tube, on aboutit <sup>6</sup> à l'équation d'évolution de la vitesse de l'aimant :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \alpha v$$

dont la solution s'écrit  $v(t) = v_{\text{lim}} (1 - e^{-t/\tau})$ . La vitesse limite vaut

$$v_{\text{lim}} = \frac{mg}{\alpha}$$

et s'atteint au bout d'un temps caractéristique  $\tau = m/\alpha$ . L'équation est valable quelle que soit la géométrie du tube et de l'aimant, tant que le champ magnétique produit par les courants de Foucault est négligeable devant celui de l'aimant.

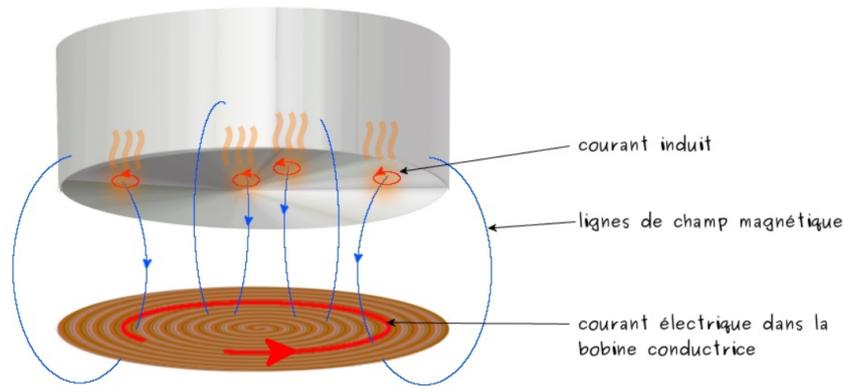
#### Remarques :

- Le freinage dépend de la vitesse instantanée du disque donc ne permet pas un ralentissement total, ce système doit être utilisé en parallèle d'un autre système de freinage classique
- pas de contact = pas d'usure mécanique !
- par contre l'énergie perdue par échauffement (effet Joule toujours...) est perdue en pure perte, on peut pas la récupérer comme les véhicules classiques

### 3.3 Chauffage par induction

✦ Ray p73 Garing p170 Dunod exercices

Une bobine située dans la plaque crée un champ magnétique variable, c'est l'inducteur. Le fond de casserole, qui doit être en métal conducteur, est donc parcouru par des courants de Foucault qui réchauffent l'eau en dissipant de la puissance par effet Joule.



Comment choisir la fréquence du champ variable? La fréquence dissipée par courants de Foucault est en  $\omega^2$  donc plus la fréquence augmente plus on chauffe. Cependant la puissance dissipée n'est pas uniforme en volume : dans les conducteurs, le champ ne pénètre que sur une épaisseur caractéristique  $\delta$  qui varie en  $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ . Un chauffage sur une épaisseur petite devant l'épaisseur de la casserole ne sera pas efficace. En pratique, la fréquence vaut 25 kHz.

Dans les plaques vitrocéramiques en fonte, le chauffage est produit par échauffement de la plaque conductrice par effet Joule, qui communique sa chaleur à la casserole. Ici, comme on chauffe directement la casserole les pertes sont réduites (d'environ 20%). On atteint un bon rendement de 80 à 90%, limité par l'effet Joule dans l'inducteur.

les plaques actuelles détectent le champ induit par les courants de Foucault pour détecter la présence d'une casserole et ainsi arrêter de produire le champ magnétique quand il n'y a plus de casserole.

Expliquer le principe et le dispositif. Si possible trouver un calcul qui permet de faire des OdG (peut-être dans un exo du Dunod? là y'a rien dans les leçons). Compromis sur la fréquence du champ entre chauffage augmente avec  $\omega$  mais l'épaisseur de peau diminue. Avantages/inconvénients sur Wiki.

## Conclusion

Conversion électromécanique