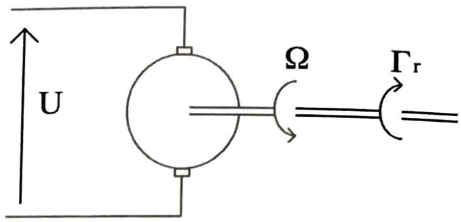
exemple va être développé de manière qualitative en supposant que les relations entre les différentes grandeurs physiques qui interviennent soient toujours linéaires et instantanées. Considérons un moteur à courant continu :



Il s'agit d'un dispositif qui, alimenté sous une tension U (généralement continue), tourne à la vitesse Ω en entraînant éventuellement une charge qui exerce sur l'arbre du moteur un couple résistant Γ_r (que nous compterons positif s'il est réellement résistant).

9.1.1 But recherché

Nous désirons faire en sorte que le moteur tourne à une vitesse Ω_0 constante imposée par une commande extérieure V_{Ω_0} également constante, appelée consigne, et ceci indépendamment du couple résistant appliqué. En d'autres termes, on désire mettre au point un dispositif du type :

dont la relation entrée-sortie est la suivante :

$$\Omega_0 = K\, V_{\Omega_0} \tag{9.1}$$

où K est une quantité constante bien définie, idéalement indépendante du moteur et de la charge entraînée. De surcroît, on rajoute la contrainte suivante : la commande V_{Ω_0} ne doit pas être la source qui fournisse la puissance nécessaire à la rotation du moteur.

Il s'agit donc de mettre au point un système asservi qui travaille à commande constante : il rentre dans la catégorie des systèmes régulés (par opposition aux systèmes suiveurs pour lesquels la grandeur d'entrée varie constamment dans le temps et dont l'objet est de maintenir à tout moment l'égalité entre les grandeurs d'entrée et de sortie quelques soient les perturbations appliquées au système).

9.1.2 Relation entrée-sortie de l'élément à asservir

Ecrivons qu'il existe nécessairement une relation entre les trois variables U, Ω et Γ_r se présentant sous la forme :

$$\Omega = g(U,\ \Gamma_r) \tag{9.2}$$

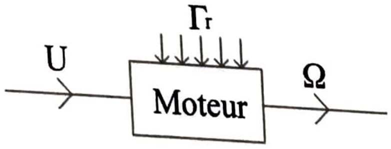
où $g(\cdot)$ est une fonction qui dépend des paramètres électromécaniques du moteur :

- r : résistance de l'induit
- L : inductance de l'induit
- C_0 : couple de frottement sec
- f : coefficient de frottement visqueux
- J : moment d'inertie des pièces tournantes
- k : constante de couple du moteur

Sans rentrer pour l'instant dans le détail des équations du moteur, signalons qualitativement qu'une augmentation de la tension appliquée U entraîne une augmentation de Ω et qu'une augmentation du couple résistant Γ_r "réellement" appliqué entraîne une diminution de la vitesse du moteur. Vu le but imparti, les trois grandeurs U, Ω et Γ_r s'interprètent comme suit :

- U est la grandeur d'entrée et Ω la grandeur de sortie
- Γ_r s'identifie à une perturbation au fonctionnement à vitesse constante du moteur.

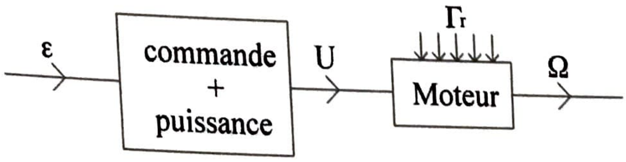
On peut alors représenter le moteur sous la forme du schéma suivant :



où les nombreuses flèches indiquent la présence de la grandeur perturbatrice Γ_r.

9.1.3 Première réponse : système en boucle ouverte

Pour répondre à nos exigences, la solution la plus simple devrait être a priori décrite par le schéma suivant :



où on a placé en amont du moteur un dispositif de puissance (par exemple un amplificateur de puissance) caractérisé par une relation linéaire et instantanée :

$$U = A_2\, \varepsilon$$

où A_2 désigne une constante positive (nous avons volontairement changé la notation de la grandeur de commande).

La solution est-elle satisfaisante? Raisonnons dans le cas a priori avantageux où il n'y a pas de perturbation (c'est à dire $\Gamma_r = 0$) et, sous cette condition, supposons pour simplifier que la relation (9.2) soit elle aussi linéaire et instantanée :

$$\Omega = A_1 U$$

où A_1 est un coefficient positif. Introduisons le gain de la chaîne directe A_0 (> 0) défini par :

$$A_0 = A_2 A_1$$

Ainsi, pour que le moteur tourne à la vitesse constante Ω_0, il faut évidemment commander l'ensemble du dispositif par une tension ε égale à :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{\Omega_0}{A_0}$$

Etudions alors la conséquence sur la vitesse du moteur d'une variation éventuelle de A_0 (qui peut trouver par exemple son origine dans un échauffement du moteur entraînant la modification de ses paramètres par rapport à leurs valeurs nominales) à commande ε constante :

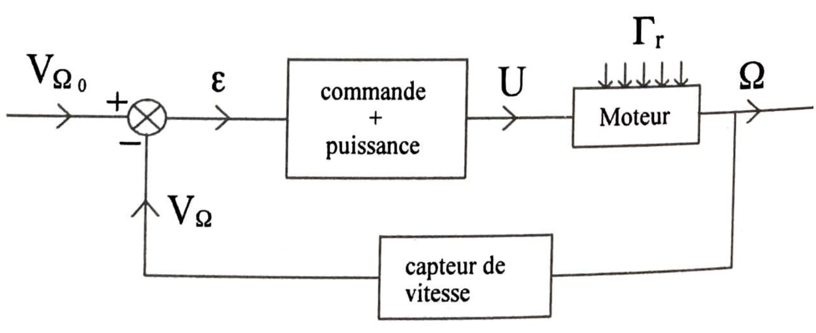
$$d\Omega = \varepsilon\, dA_0 \Rightarrow \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{dA_0}{A_0}$$

Ainsi, une variation relative du gain de la chaîne directe entraîne une variation relative identique de la vitesse : c'est là le principal désavantage d'une commande en boucle ouverte. De surcroît, remarquons que la situation s'aggrave encore lorsque l'on considère le cas où Γ_r n'est plus nul.

Remarque : *De manière similaire, si l'on désire faire fonctionner un amplificateur opérationnel en amplificateur, on sait qu'il possède des performances exécrables si l'on utilise directement en boucle ouverte (cf paragraphe 4.1.3) : la rétroaction apporte des améliorations très sensibles.*

9.1.4 Deuxième réponse : système en boucle fermée

La commande en boucle ouverte n'apportant pas de solution satisfaisante, on reprend le même dispositif mais de la façon suivante :



On parle de système bouclé car on soustrait à la grandeur de commande V_{Ω_0} une grandeur V_Ω image de la grandeur de sortie Ω :

$$\varepsilon = V_{\Omega_0} - V_\Omega$$

Nous allons supposer que V_Ω est la tension de sortie d'un capteur de vitesse caractérisé par la relation linéaire et instantanée :

$$V_\Omega = B_0\,\Omega$$

avec $B_0 > 0$; B_0 est le gain de la chaîne de retour.

9.1.4.1 Influence d'une variation du gain de la chaîne directe

Nous nous plaçons dans le cas où il n'y a pas de perturbation ($\Gamma_r = 0$). La mise en équation du système bouclé est la suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= V_{\Omega_0} - V_\Omega \\ \Omega &= A_0\,\varepsilon \\ V_\Omega &= B_0\,\Omega \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\Omega}{V_{\Omega_0}} = \frac{A_0}{1 + A_0 B_0} \tag{9.3}$$

On veut que le moteur tourne à vitesse constante $\Omega = \Omega_0$, donc la commande V_{Ω_0} doit être égale à :

$$V_{\Omega_0} = \frac{1 + A_0 B_0}{A_0}\,\Omega_0$$

Etudions à nouveau la conséquence sur la vitesse du moteur d'une variation éventuelle de A_0 en supposant V_{Ω_0} et B_0 constants :

$$\Omega = \frac{A_0}{1 + A_0 B_0}\,V_{\Omega_0} \Rightarrow \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{1}{1 + A_0 B_0}\,\frac{dA_0}{A_0}$$

Ainsi, à condition que :

$$A_0 B_0 \gg 1 \tag{9.4}$$

une variation relative du gain de la chaîne directe entraîne maintenant une variation relative beaucoup plus faible de la vitesse : le dispositif a été fortement amélioré. La relation (9.4) définit la condition pour que l'asservissement soit effectif.

Remarque : *On peut faire le lien avec le cas de l'amplificateur opérationnel dont on a réalisé la rétroaction pour obtenir un montage non-inverseur et en particulier avec la relation (4.2) du chapitre 4.*

Des équations précédentes, on tire l'inégalité suivante sous la condition (9.4) :

$$\varepsilon = V_{\Omega_0} - V_\Omega = V_{\Omega_0} - B_0\Omega = \frac{V_{\Omega_0}}{1 + A_0 B_0} \ll V_{\Omega_0} \tag{9.5}$$

Or, $\Omega = A_0\varepsilon$, donc le gain A_0 doit être très important pour amplifier la faible valeur de ε : on dit que la chaîne directe doit être très sensible.

Enfin, répondons à la question initiale : dans ce cas précis où l'on néglige l'influence des perturbations, a-t-on bien une relation du type (9.1) ? Oui, car la relation (9.3) sous la condition (9.4) se simplifie alors en :

$$\Omega \simeq \frac{1}{B_0}\,V_{\Omega_0}$$

Les relations régissant le dispositif sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\Omega &= A_1 U - P\Gamma_r \\ U &= A_2 \varepsilon \\ \varepsilon &= V_{\Omega_0} - V_\Omega \\ V_\Omega &= B_0 \Omega\end{aligned}$$

D'où :

$$\Omega = A_0\varepsilon - P\Gamma_r = A_0 V_{\Omega_0} - A_0 B_0 \Omega - P\Gamma_r \Rightarrow \Omega = \frac{A_0}{1 + A_0 B_0} V_{\Omega_0} - \frac{P}{1 + A_0 B_0} \Gamma_r \quad (9.6)$$

Ainsi, on note que l'influence des perturbations est d'autant plus faible que la condition (9.4) est mieux satisfaite.

9.1.4.4 Précision de l'asservissement

En conclusion préliminaire, sous la condition :

$$T_0 = A_0 B_0 \gg 1$$

(où T_0 est le gain en boucle ouverte du système) et en utilisant un capteur de vitesse précis (i.e. $dB_0/B_0 \ll 1$), il apparaît que nous avons réalisé en bouclant le système un dispositif très peu sensible aux perturbations extérieures et aux variations du gain de la chaîne directe. La relation (9.6) se simplifie en :

$$\Omega \simeq \frac{1}{B_0} V_{\Omega_0}$$

où $1/B_0$ est une constante indépendante des perturbations et des caractéristiques du moteur : nous avons bien une relation du type (9.1).

Par ailleurs, nous définirons dans cet ouvrage la précision de l'asservissement par la quantité suivante :

$$\varepsilon = V_{\Omega_0} - B_0\Omega = \frac{V_{\Omega_0}}{1 + T_0} \xrightarrow[T_0 \gg 1]{} 0$$

Elle mesure l'erreur entre ce que l'on souhaite avoir et ce que l'on a effectivement. La précision est d'autant meilleure qu'elle est faible, ce qui est le cas sous la condition $T_0 \gg 1$.

9.1.4.5 Stabilité de l'asservissement

Lorsque nous avons traité les montages à amplificateurs opérationnels ou les oscillateurs auto-entretenus, nous nous sommes posés le problème de leur stabilité. Ce dernier s'étudie via l'équation homogène associée à l'équation différentielle les régissant : il s'agit donc d'un problème de régime libre. Dans l'exemple que nous venons de traiter, nous avons passé implicitement ce problème sous silence en supposant instantanées toutes les relations liant les différentes grandeurs pertinentes : en pratique, ce n'est jamais le cas car tout opérateur physique répond nécessairement avec un certain retard. Ce retard se traduit par la dépendance en fréquence de la fonction de transfert de l'opérateur (et au niveau de sa relation entrée-sortie par le fait qu'elle se présente le plus souvent sous la forme d'une équation différentielle non triviale). Montrons qualitativement comment les retards des différents éléments du système bouclé que nous avons étudié peuvent être à l'origine de sa possible instabilité.

Raisonnons simplement : plaçons nous dans le cas d'un régime permanent caractérisé par une vitesse de rotation $\Omega = \Omega_0$ uniforme et une tension $U = U_0$ constante appliquée sur l'induit du moteur. Supposons qu'à un instant donné, un couple résistant Γ_r soit appliqué pendant une brève durée θ. Ce dernier provoque une chute de la vitesse à une valeur $\Omega_{\text{inf}} < \Omega_0$. Ensuite, il y a augmentation, avec un certain retard dû au capteur de vitesse et au système de commande, de la tension U qui devient supérieure à U_0 ; puis, la tension U va avoir tendance, avec du retard en raison de l'inertie du moteur, à entraîner le moteur à une vitesse $\Omega_{\text{sup}} > \Omega_0$ alors que le couple Γ_r peut ne plus être appliquée si l'ensemble de ces retards est plus important que la durée θ, ce que nous supposerons ; ainsi, à nouveau avec un certain retard, la tension U va diminuer pour s'opposer à l'augmentation de Ω qui n'est maintenant plus nécessaire : si la diminution de U est trop importante, elle peut entraîner le moteur à tourner à une vitesse $\Omega'_{\text{inf}} < \Omega_{\text{inf}} < \Omega_0$. Un régime d'auto-oscillations peut ainsi naître : le système est alors instable. On conçoit par ailleurs que le régime d'auto-oscillation apparaîtra d'autant plus facilement que l'amplification de la quantité $V_{\Omega_0} - V_\Omega$ par la boucle de gain $T_0 = A_0 B_0$ est importante.

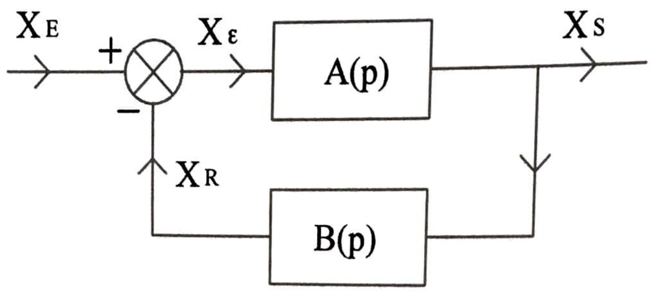
Nous retenons donc que l'instabilité du système ne peut s'analyser précisément qu'en tenant compte des relations non instantanées entre les grandeurs physiques.

9.1.5 Qualité d'un asservissement

En conclusion, il ressort que les qualités d'un asservissement concernent à la fois son comportement en régime permanent (mesuré par sa précision) et en régime transitoire (mesuré par sa stabilité). Il apparaît par ailleurs que la précision (d'autant plus satisfaisante que T_0 est grand) et la stabilité (d'autant mieux assurée que T_0 est faible) de l'asservissement sont deux exigences contradictoires. L'objet de la prochaine section est présenter quantitativement ces notions.

9.2 Précision et stabilité

Considérons le schéma suivant :



Notons $H(p)$ la fonction de transfert (en boucle fermée) de l'asservissement schématisé par la figure précédente et $T(p)$ sa fonction de transfert en boucle ouverte :

$$H(p) = \frac{X_S(p)}{X_E(p)} = \frac{A(p)}{1+T(p)} \qquad \text{avec} \qquad T(p) = A(p)B(p)$$

Le système physique (supposé linéaire et invariant dans le temps) associé à cet asservissement est décrit entièrement et de manière totalement équivalente soit par la fonction de transfert $H(p)$, soit par une relation entre $X_S(t)$ et $X_E(t)$ dans le domaine temporel que l'on supposera se présenter sous la forme d'une équation différentielle à coefficients constants.

9.2.1 Critères de stabilité

La première qualité que l'on attend d'un asservissement est d'être stable. La stabilité des systèmes linéaires et invariants dans le temps a été étudiée dans le chapitre 5 consacré aux oscillateurs en électronique (cf paragraphe 5.1.2). Nous commençons par en rappeler succinctement la définition.

9.2.1.1 Définition et condition fondamentale

Un système linéaire et invariant dans le temps est dit stable (au sens strict cf 5.1.2) si toute entrée bornée engendre une sortie également bornée.

Comme nous allons étudier uniquement des systèmes physiques caractérisés par une relation entrée-sortie se présentant sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, la fonction de transfert $H(p)$ caractérisant le système se présente sous la forme d'une fraction rationnelle en p. La stabilité définie ci-dessus est alors équivalente à dire que le degré du numérateur de $H(p)$ est inférieur ou égal à celui du dénominateur et que tous les pôles de $H(p)$ ont leur partie réelle strictement négative.

9.2.1.2 Critère algébrique de Routh

Les pôles de la fonction de transfert ne sont autres que les zéros de $1 + T(p)$ (en supposant ne pas faire de simplification lors de la multiplication de $A(p)$ par $B(p)$). Ils doivent être à partie réelle strictement négative pour assurer la stabilité du système. Supposons que :

$$1 + T(p) = 0 \Leftrightarrow d_0 p^n + d_1 p^{n-1} + \cdots + d_n = 0 \tag{9.7}$$

Il existe un critère, dit critère de Routh, qui permet de résoudre la question du signe des parties réelles des pôles sans avoir à les calculer. La condition nécessaire et suffisante pour que les zéros du polynôme (9.7) aient leur partie réelle strictement négative s'énonce :

- les coefficients apparaissant dans la première colonne du tableau de $n+1$ lignes suivant, dit tableau de Routh, doivent avoir le même signe :

d_0	d_2	d_4	$\cdots$
d_1	d_3	d_5	$\cdots$
$\frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_1}$	$\frac{d_1 d_4 - d_0 d_5}{d_1}$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		

Dans le cas où $n \leq 2$, cette condition nécessaire et suffisante se simplifie : tous les coefficients d_j doivent avoir le même signe.

9.2.1.3 Critère du revers

Rappelons également un critère de stabilité purement graphique : le système (que l'on suppose à minimum de phase, c'est à dire un système dont les pôles et les zéros sont à partie réelle strictement négative) est stable si et seulement si le lieu de Nyquist de sa fonction de transfert en boucle ouverte $T(j\omega)$ décrit dans le sens des ω croissants laisse le point critique -1 sur sa gauche.

9.2.1.4 Marges de stabilité

Le cas limite de la stabilité du système est réalisé lorsque certains pôles de $H(p)$ sont à partie réelle nulle ou encore, et de manière équivalente, lorsque le lieu de Nyquist de $T(j\omega)$ passe par le point critique -1. Le système peut alors avoir le comportement d'un oscillateur auto-entretenu, ce que l'on veut éviter si le but imparti est de réaliser un système asservi.

Partons d'un système initialement stable : le régime libre qui lui est associé a grosso modo tendance à devenir du type pseudo-périodique avec un amortissement d'autant plus faible que l'on est proche de la limite de stabilité. Bien que le système ne soit pas à proprement parler instable, une telle dynamique ne peut être tolérée que dans certaines limites : en effet, en raisonnant par exemple dans le cas d'une commande en échelon, lors de son régime transitoire, la sortie du système peut dépasser de manière destructive sa valeur en régime permanent.

En pratique, pour se prémunir contre un tel risque, on impose au lieu de Nyquist de $T(j\omega)$ de ne pas s'approcher trop près du point -1 en imposant des marges de stabilité : $M_\Phi > \theta_{\text{lim}} > 0$ et $M_G < G_{\text{max}} < 1$ à respecter. Enfin, la quantité M_Φ est appelée marge de phase et la quantité $-20 \log M_G$ marge de gain.