

# LP00 – Titre

29 juin 2020

Laura Guislain & Pascal Wang

**Niveau :**

**Commentaires du jury**

**Bibliographie**

✍ *Le nom du livre, l'auteur*<sup>1</sup>

→ Expliciter si besoin l'intérêt du livre dans la leçon et pour quelles parties il est utile.

**Prérequis**

- Electrocinétique
- Transformée de Fourier, aspects mathématiques
- Effet Doppler
- Notion d'OPPH
- Quantification

**Expériences**

- 🔥 Biréfringence du quartz

## Table des matières

|          |                                                               |           |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Acquisition d'un spectre</b>                               | <b>3</b>  |
| 1.1      | Notion de spectre . . . . .                                   | 3         |
| 1.2      | Echantillonnage temporel . . . . .                            | 4         |
| 1.3      | Transformée de Fourier numérique . . . . .                    | 6         |
| <b>2</b> | <b>Filtrage</b>                                               | <b>10</b> |
| 2.1      | Position du problème : mesure d'un décalage Doppler . . . . . | 10        |
| 2.2      | Modulation . . . . .                                          | 11        |
| 2.3      | Filtre passe-bas/anti-repliement . . . . .                    | 11        |
| 2.4      | Mise en place de la stratégie . . . . .                       | 12        |
| 2.5      | Propriétés de la transformée de Fourier . . . . .             | 13        |

## Jury

Linéarité. Sens physique.

## Préparation

Préparation : Ne pas mettre trop de maths, bien donner le sens physique

Biblio : cours d'électronique de JérémY Neveu et Fruchart pour la dernière partie, duffait pour la TFMéthodes et techniques de traitement du signal, Max et Lacoume ? Tome 1 et tome 2 Electronique, Manneville

Questions : modulation AM, FM (cf. MP 23, fiche), PLL, détection synchrone, analogie optique : réseau, apodisation, critère de Rayleigh, échantillonneur bloqueur, interrupteur commandé (MOSFET...), filtres actifs, AO, limitations

## Références Laura

- DSF géogebra pour le créneau : <https://www.geogebra.org/m/vzh8emTb>
- Géogebra pour Shannon : <https://www.geogebra.org/m/NV623Ftm>
- CAN <http://cbissprof.free.fr/telechargements/tsiris/cours/acquisitionsignal.pdf>, [http://www.gecif.net/articles/genie\\_electrique/ressources/les\\_convertisseurs\\_analogique\\_numerique.pdf](http://www.gecif.net/articles/genie_electrique/ressources/les_convertisseurs_analogique_numerique.pdf) pleins de commentaires sur le simple rampe, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Convertisseur\\_analogique-num%C3%A9rique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Convertisseur_analogique-num%C3%A9rique)

## Introduction

**Définitions, Notion de signal** On peut écrire ces définitions au tableau pour gagner du temps. La notion de signal en physique est très générale. Un signal analogique peut prendre des valeurs continues. Un signal numérique ne peut prendre que des valeurs discrètes. Pour la rendre concrète, on considère un exemple.

**Exemple du diapason** En musique, on utilise des diapasons pour accorder les instruments. On peut alors se demander si la fréquence indiquée par le constructeur est la bonne, ici 440 Hz.

### Acquisition d'un signal temporel

On montre la vidéo : <https://youtu.be/GaxWFy0Fr8E?t=12> On sonne un diapason. Le signal est alors les variations de pressions. La conversion du champ continu de pression en un signal électrique analogique est effectuée par un transducteur (voir [wiki](#)). Le signal arrive dans la carte d'acquisition SYSAM. *Il subit d'abord un conditionnement : une amplification ou une atténuation, un filtrage anti-repliement éventuellement et une isolation (inductive ou capacitive)* Il est numérisé par un convertisseur analogique-numérique. Il est échantillonné en temps et quantifié en valeurs. *On suppose que la notion quantification est en prérequis. On fait un schéma bloc. Le signal est transmis à l'ordinateur via un bus.* L'acquisition est ensuite affichée sur Latis-Pro.

**Bonus : fonctionnement d'un microphone** Pour réaliser un microphone ou un transducteur électroacoustique, on peut procéder par :

- *induction* : coller une bobine à la membrane, près d'un aimant permanent. Par induction, les mouvements de la membrane sont traduites par un signal électrique.
- *variation d'une capacité* : on peut aussi convertir le mouvement de la membrane en une variation de capacité d'un condensateur, ce qui induit des modulations de l'amplitude d'une porteuse. On démodule en sortie.
- *piézoélectricité*
- *magnétostriction*

**Discussion des prérequis** Une première façon de déterminer la fréquence peut être de mesurer la durée d'un grand nombre de périodes. Mais cela devient vite fastidieux. Les séries de Fourier peuvent fournir un outil d'analyse mais elles sont applicables uniquement aux signaux rigoureusement périodiques. En prérequis, on a vu un outil mathématique qui donne accès au spectre d'un signal : la transformée de Fourier. On a vu quelques unes de ses propriétés mathématiques, tel que convolution-produit, translation-modulation. [On peut faire des rappels sur transparent.](#)

**Numérisation du signal** Cependant, en pratique il y a une grande différence entre l'expression mathématique de la TF, qui fait intervenir un intervalle de temps infini et des signaux continus. Un signal enregistré a en effet une durée finie et échantillonné nombre discret de valeurs, puisque la mémoire est finie. De plus, la valeur du signal électrique est elle-même quantifiée.

**Objectifs** Dans cette leçon, on va illustrer la grande utilité de la représentation fréquentielle et de l'analyse de Fourier/analyse spectrale en traitement du signal. On va illustrer physiquement les propriétés mathématiques qui ont été introduites précédemment. On va voir les conséquences de l'acquisition numérique sur le spectre d'un signal. On va voir illustrer cela sur une stratégie d'acquisition de signal : la détection synchrone.

**Bonus : Représentation binaire** Dans une communication numérique, l'information est transmise à l'aide d'une suite d'éléments binaires, susceptibles de présenter deux états notés respectivement "0" et "1". L'idée n'est pas nouvelle si l'on considère que les premières transmissions électriques ont été faites en Morse, en codant le signal par un élément binaire pouvant prendre deux états : le point et le trait. Les technologies numériques ont pris une importance considérable dans la société et dans les instruments qui nous équipent

## 1 Acquisition d'un spectre

### 1.1 Notion de spectre

**Objectif** Le but est d'interpréter physiquement l'objet mathématique qu'est la TF.

**Définition de la TF** On peut préécrire la définition/convention au tableau On précise la définition et la convention utilisée. Soit une fonction  $s$  réelle ou complexe d'une variable réelle  $t$  et de carré intégrable. C'est souvent le cas, sauf pour les ondes planes, auquel cas la TF peut être une distribution. Alors on appelle transformée de Fourier de  $s$  la fonction complexe de la variable  $f$  telle que, pour tout  $f$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\hat{s}(f) \equiv TF[s](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2i\pi ft} dt \quad (1)$$

**Interprétation de l'argument de la TF** Physiquement, on interprète l'argument  $f$  comme une fréquence, qui est la grandeur duale du temps. La TF de  $s$  associe un nombre complexe à chaque fréquence.

**Interprétation avec les OPPM** Comme pour les séries de Fourier, l'expression intégrale n'est rien d'autre que le produit scalaire (au sens  $L^2$ ) entre  $s$  et l'exponentielle complexe oscillant à la fréquence  $f$ . On peut donc interpréter la TF comme une décomposition sur la base continue des fonctions monochromatiques. Pourquoi les exponentielles complexes ? Ces sont les fonctions propres des opérateurs linéaires, notamment de l'opérateur dérivation. Bien qu'on a vu que ces signaux ne sont pas physiques car ils ont une énergie infinie et n'ont pas de réalité physique, leur utilité réside dans le fait qu'elles constituent une base continue de décomposition.

**Interprétation de la valeur de la TF** Le module de  $TF[s](f)$  donne donc l'amplitude du signal pour sa composante composante qui oscille à la fréquence  $f$ . La phase donne les déphasages mutuels entre les différentes composantes.

**Réciprocité de la TF** L'existence de la TF inverse montre que la TF est une manière différente mais équivalente de représenter l'information contenue dans un signal. On parle de représentation temporelle et de représentation fréquentielle.

**Notion de spectre** On appelle densité spectrale d'énergie le module au carré :

$$S[s](f) = |TF[s](f)|^2 \quad (2)$$

On l'interprète physiquement  $S[s](f)df$  comme une grandeur proportionnelle à l'énergie que contient le signal entre les fréquences  $f$  et  $f + df$ .

### Spectre du diapason

Faire la FFT du son du diapason avec Latispro. Préciser ce que met Latispro en ordonnée. On montre un spectre de diapason. En abscisse, on montre que  $f$  positif : le spectre est symétrique pour les signaux réels ! En ordonnée, on lit une grandeur proportionnelle à la densité spectrale d'énergie. Le spectre permet de voir immédiatement la plage de fréquences qui contient l'énergie du signal : elle se situe autour de 440 Hz. Avec la largeur à mi-hauteur, on peut lire le facteur de qualité du diapason.

Mais ce que l'ordinateur a calculé, ce ne peut pas correspondre à la définition de la TF qu'on a donnée : les signaux sont échantillonnés en temps donc  $s(t)$  n'est pas une fonction à paramètre continu et  $s(t)$  a une durée finie donc on n'intègre pas de  $-\infty$  à  $+\infty$ . On s'en rend compte immédiatement qu'on on l'utilise car il faut spécifier par exemple un fréquence d'échantillonnage, qui est un paramètre très important.

## 1.2 Échantillonnage temporel

**Numérisation d'un signal** Un signal analogique est continu et par conséquent comporte mathématiquement une infinité de points. Dans un appareil numérique, l'image du signal analogique récupéré doit être stockée dans une mémoire. Pour ne stocker qu'un nombre fini de points, on va acquérir les points du signal à numériser à des intervalles de temps régulier (échantillonnage) et sur une durée limitée (troncation). On montre la figure de J. Neveu du signal échantillonné et quantifié. La construction d'un signal numérique se décompose donc en trois opérations fondamentales :

- l'échantillonnage du signal avec une période régulière  $T_e$  sur une durée finie d'acquisition.
- la quantification du signal échantillonné sur un niveau discret,
- la représentation de chaque niveau par un élément binaire.

**Bonus : échantillonneur-bloqueur** L'échantillonneur-bloqueur est un circuit électronique constitué dans sa forme la plus simple d'un interrupteur commandé (ex : MOSFET) et d'un condensateur (éventuellement une résistance pour faire un RC). On peut également retrouver un amplificateur suiveur en entrée et en sortie du montage. Son rôle est de maintenir une valeur de tension constante entre deux instants d'échantillonnage. Ce dispositif combine les deux schémas précédents. La tension aux bornes de  $C$  acquiert la valeur de la tension analogique d'entrée au bout d'un temps  $t_{acq}$  et se maintient à cette valeur pendant un temps  $t_{hold}$ . Le choix de la valeur de la capacité  $C$  est donc un compromis entre le temps d'acquisition de l'échantillonneur et sa précision :

- Lorsque la capacité est faible, le temps d'acquisition est réduit, mais la précision est mauvaise à cause de la décharge rapide du condensateur.
- Lorsque la capacité est forte, le temps d'acquisition devient prohibitif. Par contre, la tension analogique mesurée demeure bien constante entre deux échantillonnages.

### Influence de la fréquence d'acquisition

Faute de matériel, on simule sur python deux acquisitions à des fréquences différentes, une qui respecte Shannon et pas l'autre. Les figures sont prêtes sur diapo mais c'est mieux de faire tourner le script en live. A une fréquence d'échantillonnage 770 Hz, la fréquence du diapason apparaît à 330 Hz. Pourquoi ?

↓ Pour comprendre ces effets, on va modéliser la numérisation temporelle.

**Modélisation de l'échantillonnage temporel, effet sur le spectre** Le signal échantillonné  $s_{ech}(t)$  est obtenu en prélevant sur le signal  $s(t)$  une suite d'échantillons  $s(0), s(T_e), s(2T_e), \dots$  à la fréquence  $f_e = 1/T_e$ . Cette opération peut être représentée par la multiplication du signal par un peigne de Dirac  $\text{III}_{T_e}(t)$  de période  $T_e$  :

$$s_{ech}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \times \delta(t - kT_e) = s(t) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = s(t) \times \text{III}_{T_e}(t) \quad (3)$$

Or la transformée d'un peigne de Dirac de période  $T_e$  est un peigne de Dirac de période  $f_e$  dans l'espace fréquentiel. D'après les propriétés de la TF, le spectre est modifié selon :

$$\hat{s}_{ech} = TF[s_{ech}](\nu) = \hat{s} * \frac{1}{T_e} \text{III}_{1/T_e} \quad (4)$$

Le spectre en amplitude du signal numérisé est celui du signal réel répété périodiquement tous les  $f_e$  dans l'espace fréquentiel.

**Analogie optique** C'est l'analogie optique des spectres de différents ordres fournis par un réseau de fentes infiniment fines (les échantillons).

### Repliement de spectre et critère de Shannon

- Si  $2f_{max} < 2f_e$ , on voit que les spectres répétés ne se chevauchent pas, on peut retrouver l'allure du spectre originel. [Montrer le schéma du diaporama..](#)
- Si  $2f_{max} > 2f_e$ , on voit que les spectres répétés se chevauchent, on parle de repliement de spectre. On ne peut pas remonter à l'allure du spectre originel. [Montrer le schéma du diaporama.](#) Une fréquence originellement à  $f = 440\text{Hz}$  se retrouve aussi à  $f' = f_e - f$ . On revient à la mesure de spectre, cela explique pourquoi on voit une fréquence de  $330 = 770 - 440$  Hz dans le spectre d'avant..

**Théorème de Shannon.** La représentation discrète d'un signal exige des échantillons régulièrement espacés à une fréquence d'échantillonnage  $f_e$  supérieure au double de la fréquence maximale  $f_{max}$  présente dans ce signal.

**Implications** Ainsi, il faut interpréter avec précaution les spectres mesurés, si on connaît pas les fréquences présentes. Pour des signaux carrés, les harmoniques décroissent en  $1/n$ . Il faut utiliser un filtre passe-bas, dit *anti-repliement* avant l'échantillonnage.

**Application : réseau téléphonique** Si l'on veut numériser le signal analogique du réseau téléphonique qui possède une bande passante s'étendant de 300 à 3400 Hz, quelle doit être la fréquence d'échantillonnage minimum ? La

formule du théorème de Shannon nous montre immédiatement que la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la fréquence maximum, soit 6800Hz. La fréquence standard qui a été choisie dans le réseau numérique est de 8kHz (i.e. une période de 125 $\mu$ s), ce qui satisfait les conditions ci-dessus.

**Interprétation avec les mains** On montre la figure du Cottet sur diaporama Cet effet peut être vu comme un effet stroboscopique. Ainsi, pour une fréquence d'échantillonnage  $f_e$  qui ne respecte pas le critère de Shannon, une fréquence  $f_r$  comprise entre  $f_e/2$  et  $f_{max}$  est vue comme la fréquence  $f_e - f_r$ , dite fréquence repliée ou fantôme de la fréquence  $f_r$ . Cette raie fréquentielle due au repliement va apparaître comme une raie appartenant au signal alors qu'elle n'a aucune existence réelle ou encore l'amplitude de cette raie fantôme va s'ajouter à l'amplitude de la composante fréquentielle  $f_e - f_r$  existant réellement.



Comment expliquer la largeur finie d'un pic ?

### 1.3 Transformée de Fourier numérique

Dans cette sous-partie, on se place dans le cas favorable du théorème de Shannon.

#### Effet de la durée de l'échantillonnage

On montre le spectre d'un sinus tronqué en faisant varier la durée d'acquisition.

**Modélisation du temps d'acquisition fini** Un signal numérique  $s_{num}$  contient en réalité un nombre fini de points car sa durée de l'expérience est nécessairement finie. De plus, les appareils numériques réels ont une capacité en mémoire limitée et ne peuvent stocker qu'un nombre fini de points du signal temporel. On modélise le temps d'observation fini par le fait que le signal est multiplié par une porte  $\Pi_{T_0}$ . On prend une porte qui vaut 1 dans  $[-T_0/2, T_0/2]$  et 0 ailleurs pour ne pas avoir de terme de phase. On fait un dessin ! Le signal peut éventuellement être pondéré par une fonction de fenêtrage  $W(t)$ . Pour le moment on ne considère qu'une fonction de fenêtrage carrée simple.

$$s_{ech}(t) = s(t) \times \text{III}_{T_e}(t) \times \Pi_{T_0}(t) = s(t) \times \sum_{k=0}^{K-1} s_k \delta(t - kT_e) \quad (5)$$

D'après les propriétés de la TF, le spectre est modifié selon :

$$\hat{s}_{ech} = (\hat{s} * \frac{1}{T_e} \text{III}_{1/T_e}) * T_0 \text{sinc}(\pi T_0 f) \quad (6)$$

Une raie devient un sinus cardinal de largeur à mi-hauteur  $1/T_0$ . Comme en diffraction de Fraunhofer, un point objet devient une tache d'Airy de taille inversement proportionnelle à la taille du trou diffractant. Le temps d'acquisition joue sur la résolution spectrale.

La limite de résolution en fréquence est  $\delta f \sim \frac{1}{T_0}$ . C'est l'aspect numérique de l'inégalité de Heisenberg.

#### Transformée de Fourier discrète

Numériquement, on ne peut manipuler que des ensembles de données discrètes. On montre un spectre sous forme de scatter plot pour insister sur le tableau de valeurs.

**Transformée de Fourier discrète** La transformée de Fourier d'un signal échantillonné et tronqué s'écrit plus explicitement

$$\hat{s}_{num}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2j\pi ft} \times \sum_{k=0}^{K-1} s_k \delta(t - kT_e) dt = \sum_{k=0}^{K-1} s_k e^{-2j\pi k f T_e} \quad (7)$$

Le résultat de la TF théorique est donc une série finie mais pour le moment encore une fonction continue de la fréquence  $f$ , ce qui n'est pas calculable et mémorisable par un oscilloscope intrinsèquement limité par la taille de sa mémoire.

Comment calculer  $\hat{s}_{\text{num}}(f) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k e^{-2j\pi k f T_e}$  avec un appareil numérique ? Il faut parvenir à en retirer un nombre de points fini et représentatif de  $\hat{s}_{\text{num}}(f)$ . Or la transformée de Fourier discrète (TFD) d'un signal échantillonné est une série finie de  $K$  coefficients  $\hat{s}_n^{\text{TFD}}$  définis par :

$$\hat{s}_n^{\text{TFD}} = \sum_{k=0}^{K-1} s_k e^{-2j\pi n \frac{k}{K}} \quad (8)$$

On a donc une correspondance directe entre la TFD et la TF d'un signal échantillonné :

$$\hat{s}_n^{\text{TFD}} = \hat{s}_{\text{num}}\left(f = \frac{n}{T_0}\right) \quad (9)$$

avec  $T_0 = K T_e$  la durée d'acquisition du signal. Calculer la TFD d'un signal échantillonné permet donc d'avoir une image de  $K$  points représentatifs de sa TF aux fréquences multiples de  $f_e/K$ . Ce sont donc ces  $K$  points qu'un oscilloscope numérique doit chercher à calculer.

La transformée de Fourier d'un signal numérisé échantillonné sur  $K$  points à la fréquence  $f_e = 1/T_e$  est égale à la transformée de Fourier discrète de ce signal. La résolution en fréquence est de  $\delta f = f_e/K$  et la fréquence maximale du spectre accessible est  $f_e/2$  (critère de Shannon). *Le signal est donc implicitement considéré périodique de période  $N T_e$ .*

**Fenêtrage et harmoniques parasites** On s'appuie sur la figure de J. Neveu Le sinus cardinal en fréquence issue d'une porte rectangulaire élargit les pics mais aussi introduit des lobes secondaires. Une autre façon de comprendre ce problème est que la TFD se comporte comme si le signal échantillonné était périodique de période  $T_0$ . En effet, la TFD est à la fois liée à la transformée de Fourier mais aussi à la série de Fourier : si on considère que les  $K$  points de  $s_{\text{num}}(t)$  représentent une période d'un signal périodique de période  $T_0$ , la TFD correspond exactement à la série de Fourier du signal échantillonné tronqué considéré périodique de période  $T_0$ . Donc si la fenêtre ne tronque pas le signal sur un nombre entier de périodes, alors une discontinuité apparaît entre les échantillons  $s(0)$  et  $s(T_0)$  ce qui engendre des harmoniques artificielles dans le spectre du signal. Un sinus ainsi périodisé n'est donc plus un signal sinusoïdal pur, les discontinuités induisent des harmoniques dans son spectre. Les problèmes de fenêtrage en analyse numérique sont conceptuellement proches des problèmes d'apodisation en optique. L'idée est d'introduire une fenêtre qui accorde moins d'importance aux valeurs sur les bords de l'échantillon, pour effacer la discontinuité. Cela diminue l'importance des pieds des raies mais cela élargit la raie. Il y a un compromis à trouver.

**Bonus : choix d'une fenêtre** Les problèmes de fenêtrage en analyse numérique sont conceptuellement proches des problèmes d'apodisation en optique. En résumé, le choix d'une fenêtre rectangulaire introduit des harmoniques qui peuvent polluer le spectre recherché, en particulier si la période d'échantillonnage n'est pas un multiple fortuit de la période du signal dont on cherche le spectre. Pour corriger cela, on peut donc imaginer trouver des fenêtres  $W(t)$  qui :

- possèdent moins d'harmoniques dans leur transformée de Fourier ;
- garantissent une bonne périodisation du signal tronqué de période  $T_0$  en s'annulant sur les bords de la fenêtre.

On peut choisir une fenêtre gaussienne, Blackmann-Harris... Il faut faire un compromis entre finesse du pic central et importance des lobes secondaires.

**Bilan des différents paramètres d'acquisition** On rappelle les deux paramètres importants  $T_e$  et  $T_0$  et l'effet sur le spectre dans un tableau sur diaporama. On a un schéma sur notes électroniques aussi.

**En pratique en TP** En pratique :

- Respecter le critère de Shannon ou prendre des précautions sur l'interprétation.
- si le spectre a de larges raies, il faut augmenter le temps d'acquisition.
- Il faut choisir un nombre de points puissance de 2 pour faciliter le calcul de FFT, basé sur un algorithme diviser pour régner. Sinon le logiciel peut interpoler des points, même si mathématiquement on sait faire pour les non puissances de 2.
- Il faut aussi choisir un nombre entier de périodes pour éviter les problèmes de fenêtrage
- Si les pics sont dyssymétriques ou pas beaux, essayer une fenêtre de Hamming ou Blackman.

- **Bonus :** Pour la quantification, on adapte le calibre à la grandeur mesurée pour essayer d'utiliser tous les bits et on fait un compromis précision/mémoire sur le nombre de bits. Souvent, une carte d'acquisition a un débit total limité en bit/s. Si on augmente la fréquence d'échantillonnage, on diminue la résolution.

**Bonus : cas de deux fréquences très différentes** Dans le cas où on trouve deux fréquences très différentes dans le signal, comme en modulation d'amplitude, il faudrait avoir une durée d'acquisition multiple de la période de l'enveloppe (idéalement de la porteuse mais ce n'est pas toujours possible). Dans ce cas, on peut avoir des indices de modulation qui annulent presque l'amplitude de la porteuse !

**Bonus : algorithme FFT** Soient  $x_0, \dots, x_{N-1}$  les acquisitions discrètes. La TF discrète est définie par

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} \quad k = 0, \dots, N-1$$

. Naivement, il faut calculer  $N$  multiplications pour calculer un seul  $X_k$  donc  $O(N^2)$  pour calculer tout la TF discrète. En utilisant un algorithme de type diviser pour régner, on peut atteindre une complexité en  $O(N \log N)$ . Le principe est de ramener la TF à  $N$  points à une combinaison linéaire de deux TF à  $N/2$  points (les indices pairs et impairs). *Il est plus avantageux de calculer un produit de convolution en passant par le produit des transformées de Fourier que directement, même si le but premier n'est pas d'obtenir la transformée de Fourier des signaux. De plus, des optimisations à l'algorithme original ont été apportées pour gérer les nombres  $K$  quelconques.*

**Bonus : numérisation, bruit de quantification** Lors d'une numérisation binaire, le nombre de niveaux  $S$  doit être une puissance de 2 et s'écrit sous la forme  $S = 2^N$ , où  $N$  est un entier. Chaque valeur d'échantillon est alors arrondie au niveau  $s_k$  dont elle est le plus proche en base 2. La plage de quantification  $S\Delta s$  du signal est fixée par l'appareil de mesure lors du choix du calibre (sur un multimètre ou un oscilloscope).

$$\Delta s = \frac{c}{2^N} \quad (10)$$

En utilisant un oscilloscope numérique, lorsqu'on modifie l'échelle verticale, on réduit  $c$  pour être plus précis. De même, en utilisant un voltmètre, en réglant le calibre, on règle  $c$ . De plus l'appareil sera d'autant plus précis (et cher) s'il code les tensions sur un nombre  $N$  élevé de bits.

Le passage du signal échantillonné  $s_{\text{ech}}(t)$  au signal numérique  $s_{\text{num}}(t)$  constitue une dégradation du signal, analogue à celle que produirait un bruit superposé au signal  $s_{\text{ech}}(t)$ . On l'appelle bruit de quantification  $n(t)$ . On peut montrer que :

$$\langle n^2(t) \rangle = \frac{\Delta s^2}{12} \quad (11)$$

On remarque là encore l'intérêt d'augmenter le nombre de bits utilisés pour coder la valeur d'un échantillon. Mais le choix du nombre de bits utilisé doit être un compromis entre le nombre de valeurs nécessaires, la mémoire disponible et la vitesse de calcul ou d'acquisition.

- Codage en 8 bits (1 octet) : le chiffre maximal 11111111 vaut  $2^8 - 1 = 255$ .
- Échelles de couleurs 8 bits dans la numérisation des images :  $(2^8)^3 = 16$  millions de couleurs sont accessibles en codant chaque couleur R, V et B sur 8 bits (sur un vieux PC).
- Pour les transmissions téléphoniques, on utilise un codage sur 8 bits (256 niveaux).
- Les oscilloscopes Agilent InfiniiVision enregistrent jusqu'à  $2^{16} = 65536$  points, et le nombre de bits pour l'échantillonnage vertical varie entre 8 et 12 selon la vitesse d'acquisition du signal.

## Bonus : analyse spectrale analogique

➤ Duffait. On peut acquérir des spectres de manière analogique par (i) plusieurs filtres passe-bande de bande passante adjacentes (ii) un filtre passe-bande à fréquence centrale commandable en tension (iii) mieux un analyseur à balayage de fréquences constitué : d'un passe-bande fixe, un multiplieur et un oscillateur de fréquence variable (OCT). La multiplication par le signal de l'OCT translate le spectre et le replie, ce qui change la région qui tombe dans le filtre passe-bande. Pour éviter le repliement, il faut que la fréquence centrale du passe bande soit supérieure à la moitié de la fréquence maximum du spectre. On parle de récepteur superhétérodyne (super pour au delà de l'audible, hétérodyne car la fréquence change).

## Bonus : acquisition et numérisation de signaux électroniques

**Bascule** Une bascule (ou "flip-flop") est un élément logique implémenté sous forme de puce électronique. Il s'agit d'un composant électronique à base de transistors dont la ou les sorties passent d'une valeur logique à une autre (0 V ou 5 V) selon l'état logique des entrées, qui peuvent être de différents types (type D, T, JK,...). Une bascule est définie par sa table de vérité définissant ses états de sortie en fonction de l'état de ses entrées. C'est ainsi que par exemple certaines basculent réalisent des fonctions logiques du type XOR (ou-exclusif), NON-OU, NON-ET, etc. Ce qui distingue une bascule logique d'une simple porte est qu'elle garde en mémoire son dernier état : ce sont donc des composants très importants pour le calcul séquentiel et la mémoire informatique.

**Diviseur de fréquence** Une bascule de type D ou autre peut être branchée de telle manière à obtenir un composant à une seule entrée  $e(t)$  et une seule sortie  $s(t)$ , dont l'état de la sortie bascule dès que l'état de l'entrée change. Elle peut fonctionner sur front montant, front descendant, ou les deux. En pratique, si on fournit à une bascule comme signal d'entrée  $e(t)$  un signal d'horloge TTL, la sortie sera également un signal d'horloge mais à une fréquence 2 fois plus faible. Il se comporte en diviseur de fréquence par 2. Mis en série, on peut obtenir un diviseur de fréquence par  $2^N$ .

**Compteur numérique** En utilisant plusieurs diviseurs de fréquence en série, on peut parvenir à réaliser un compteur binaire. Ainsi, au cours du temps, l'état de chaque voie de sortie peut être considérée comme un bit, valant 0 ou 1, et l'ensemble forme un nombre binaire. Ce nombre augmente de 1 toutes les demies périodes d'horloge : on obtient un compteur numérique en base 2. L'avantage du binaire est que l'information est codée sur deux états "tout ou rien", alors que si on restait en base décimale il faudrait disposer de dix états différents pour réaliser le compteur.

**Application : fréquencemètre numérique** Le signal à mesurer de fréquence  $f$  est injecté dans un dispositif qui le met sous la forme d'un signal d'horloge. Puis les bascules comptent tous les fronts descendants pendant un temps  $\Delta t = 1 \text{ s}$  imposé par une horloge extérieure de fréquence  $F = 1/(2\Delta t)$ . On mesure ainsi un nombre de fronts descendants, donc un nombre de périodes, sur une seconde : ce nombre  $n$  est directement la fréquence du signal.

### Convertisseur numérique-analogique (CNA) J. Neveu

- *CNA à réseau de pondération en tension* Ce convertisseur est composé d'un AO précédé de  $N$  résistances  $R/2^k, k \in [0, N-1]$  en parallèle, commandées par des interrupteurs. La valeur des résistances varie fortement. Par exemple, pour un convertisseur de 10 bits, la valeur des résistances varie d'un facteur 1024. L'impédance du réseau de résistances également ! Ainsi ce montage bien que simple a l'inconvénient d'avoir une impédance d'entrée qui varie beaucoup. On lui préfère en pratique des montages dit en « R - 2R »
- *CNA à réseau R - 2R* Dans ce montage il n'y a que des résistances de valeurs  $R$  et  $2R$ . Il fonctionne sur le principe d'un diviseur de courant. L'avantage de ce réseau est que son impédance est constante et égale à  $R$  tout au long du réseau. En effet la résistance équivalente vue depuis  $U_{\text{ref}}$  vaut toujours  $R$  car deux résistances  $2R$  en parallèle sont équivalentes à une résistance  $R$ , laquelle est en série avec une résistance  $R$  donc formant une résistance  $2R$ , et ainsi de suite... Par conséquent, à chaque nœud le courant est divisé en deux parts égales car chaque branche a une résistance équivalente valant  $2R$ .
- *Autres CNA* : par pondération de courant (à base de transistors); par pondération de tension à courants constants; par pondération de capacités; par pondération de capacités en réseau C - 2C.

### Convertisseur analogique-numérique (CAN)

Les convertisseurs analogique-numérique sont utilisés dans les multimètres ou les oscilloscopes numériques. Nous allons détailler le fonctionnement d'un CAN simple constitué d'un convertisseur simple rampe, d'un CNA et d'un comparateur. Le principe de base du convertisseur analogique-numérique simple rampe consiste à utiliser un compteur binaire pour créer une rampe de tension, comparer la tension de la rampe à la tension  $U_0$  que l'on veut mesurer, puis relever la valeur numérique de la tension la plus proche de  $U_0$ .

Une horloge extérieure alimente un compteur binaire engendrant un comptage binaire à la fréquence  $1/T$  de l'horloge. Le chiffre binaire est ensuite converti en tension analogique par un CNA. On obtient en sortie une rampe "discrétisée" de tension numérique de 0 à  $v_{\text{max}}$  de durée  $2^N T$  avec  $N$  le nombre de bits du CNA. La tension  $v_{\text{max}}$  dépend du convertisseur et est donc réglable. Le pas de discrétisation  $\Delta v$  de la rampe générée et lié aux paramètres du CNA est :

$$\Delta v = \frac{v_{\text{max}}}{2^N - 1} \approx \frac{v_{\text{max}}}{2^N} \quad (12)$$

La durée de la rampe est liée à la fréquence de l'horloge et à  $N$  selon :

$$T_{\text{rampe}} = 2^N T \quad (13)$$

Un comparateur à AO simple peut être utilisé : celui-ci bascule à sa tension de saturation négative dès que la tension délivrée par la rampe est supérieure à  $U_0$ .

La tension numérisée  $U_{\text{mes}}$  peut être lue via une *conversion temps-tension*. La mesure de  $\Delta t$ , durée pendant laquelle la tension  $U_0$  est supérieure à celle de la rampe, permet de remonter à  $U_0$  par une simple règle de trois :

$$U_{\text{mes}} = v_{\text{max}} \frac{\Delta t}{T_{\text{rampe}}} = \frac{v_{\text{max}}}{2^N} \frac{\Delta t}{T} \approx U_0 \quad (14)$$

La résolution en tension d'un tel convertisseur est due à la discrétisation de la rampe. La valeur de basculement est résolue à  $\Delta v = v_{\text{max}}/2^N$  près. Donc plus le nombre de bits est élevé, meilleur est la résolution en tension. De plus, plus la valeur de  $v_{\text{max}}$  est élevée, moins bonne est la résolution. Or cette tension est réglable et en pratique correspond au calibre de l'appareil. Il est important donc de choisir le calibre adapté à la tension que l'on veut analyser pour bénéficier de la meilleure résolution.

La performance du CAN dépend aussi de l'horloge. La fréquence de l'horloge va fixer la vitesse d'échantillonnage du CAN. Sauf que plus le nombre de bits est élevé, plus il faut du temps pour réaliser la rampe. Ainsi précision et rapidité de conversion sont antagonistes. *Il existe ainsi sur les multimètres modernes un mode fast, medium ou slow pour pouvoir réaliser des mesures rapides moins précises, ou précises mais lentes.*

La plupart des multimètres numériques donnent une incertitude de lecture comme une valeur constante uniquement dépendante du calibre et une valeur proportionnelle à la valeur mesurée. On propose ici une interprétation simpliste :

- si la pente de la rampe de tension  $\alpha$  est mal calibrée (erreur de l'horloge ou de  $v_{\text{max}}$ ), alors le temps mesuré  $\Delta t$  est affecté d'une erreur :  $\delta(\Delta t)/\Delta t = \delta\alpha/\alpha$ . Or, la tension mesurée est  $U_0 \approx U_{\text{mes}} \propto \Delta t$ . Donc l'erreur commise sur  $U_{\text{mes}}$  est proportionnelle à la valeur mesurée.
- si le comparateur a un défaut (par exemple l'offset de l'AO est mal compensé), la mesure sera affectée d'un décalage constant, indépendant de la valeur mesurée. Donc l'erreur commise sur  $U_{\text{mes}}$  est indépendante de la valeur mesurée.

Les CAN réels sont plus compliqués car optimisés. Pour le CAN double rampe, voir Duffait. L'idée est de s'affranchir des fluctuations du produit  $RC$  en partant de 0, puis intégrer la signal à mesurer pendant  $T_1$  fixé (les fluctuations de  $RC$ , mais aussi celles du signal sont moyennées) puis d'intégrer un signal de référence constant (de signe contraire) pendant le temps  $T_2$  nécessaire pour revenir à 0. La tension est proportionnelle à  $T_2/T_1$ .

## Bonus : bruit

[Wiki bruits et couleur](#)

Discussion sur la représentation spectrale d'un bruit (bruit blanc, bruit rose - analogie avec la lumière). Il faut dire que c'est une variable aléatoire.

Le bruit est présent le plus souvent sur une très large gamme de fréquence (pour le bruit blanc, le spectre est constant sur l'ensemble du domaine fréquentiel). Pour quantifier l'amplitude du bruit par rapport au signal informatif, on utilisera le rapport signal-sur-bruit, le plus souvent abrégé par son acronyme anglais SNR (signal-to-noise ratio), défini ainsi, en dB :

$$\text{SNR} = 20 \log \left( \frac{V_{\text{signal}}}{V_{\text{bruit}}} \right)$$

↓ On a vu comment définir et acquérir un spectre, comment agir dessus, par exemple éliminer le bruit ? On va illustrer à quel point c'est pratique de travailler dans l'espace des fréquences.

## 2 Filtrage

En première année, vous avez étudié une certains nombres de filtres, notamment des filtres passe-bas du premier et du deuxième ordre, et en passant en notation complexe, vous avez déterminé leurs fonctions de transfert, qui les caractérisent. Nous allons faire le lien aujourd'hui avec le formalisme de la TF.

### 2.1 Position du problème : mesure d'un décalage Doppler

**Position du problème** On met tout ça sur transparent L'objectif de cette partie est de voir comment utiliser les outils développés pour comprendre le fonctionnement d'un radar Doppler. On se met à la place d'un opérateur qui veut mesurer la vitesse relative d'un objet. *C'est le même principe utilisé par les radars, les échographies, la mesure de vitesse radiale d'astres.* On fixe un émetteur ultrason sur l'objet qui émet une onde ultrasonore à la fréquence  $f \sim 40\text{kHz}$ . Si cet émetteur se rapproche d'un récepteur à la vitesse  $v$ , la fréquence détectée par le récepteur vaut, par effet Doppler :

$$f_{\text{mesurée}} = \frac{c_{\text{son}}}{c_{\text{son}} - v} f$$

Pour une vitesse  $v$  de l'émetteur de l'ordre de quelques cm/s (grandeurs du dispositif de TP), beaucoup plus faible que la vitesse du son  $c_{\text{son}} \sim 340 \text{ m/s}$ , on peut alors développer cette expression au premier ordre et exprimer l'écart en fréquence du à l'effet Doppler :

$$\delta f = f_{\text{mesurée}} - f \approx \frac{v}{c_{\text{son}}} f \ll f$$

**ODG:** pour  $v \sim 1 \text{ m/s}$ ,  $\delta f/f \sim 3 \cdot 10^{-5}$ ,  $\delta f \sim 1 \text{ Hz}$ . Cet écart en fréquence est trop faible pour pouvoir distinguer  $f$  et  $f_{\text{mesurée}}$  sur un oscilloscope, qui peut mesurer jusque  $\delta f/f \sim 10^{-3}$  (selon Jolidon). Nous allons alors réaliser une détection synchrone afin de mesurer  $\delta f$ .

**Détection synchrone** [Montrer un schéma bloc](#). Avant de réaliser l'acquisition numérique, on va devoir réaliser un traitement analogique du signal pour extraire le signal du bruit d'une part, et résoudre le problème de la fréquence d'échantillonnage d'autre part : la détection synchrone, dont on va expliquer le fonctionnement.

**Bonus : hétérodynage** Il s'agit en réalité d'un hétérodynage. Une détection synchrone ("homodynage") du signal à 40 002 Hz nécessite une multiplication par un signal à 40 002 Hz (d'où le mot "synchrone") et non 40 000 Hz.

**Bonus : émetteur ultrason** Un émetteur ultrason peut fonctionner par (i) piézoélectricité (ii) magnétostriction (ii) électrostriction.

↓ Première étape : modulation

## 2.2 Modulation

Pour gagner en résolution sur le spectre en fréquence du signal, tout en évitant le repliement lié à une fréquence d'échantillonnage trop faible, on translate le spectre du signal dans un domaine de plus basse fréquence. Pour ce faire, on utilise la propriété de translation-modulation de la transformée de Fourier. Multiplier le signal  $V(t) = V_s \cos(2\pi f t)$  par un signal de fréquence  $f_0$  connue  $V_0 \cos(2\pi f_0 t)$ , tel que  $\delta f = f - f_0$  soit petit, translate le spectre de  $\pm f_0$  :

$$\begin{aligned} TF[s](\nu) &= TF[v_s(t) \times A_p \cos 2\pi \nu_p t](\nu) \\ &= \frac{A_p}{2} TF[v_s(t) e^{2i\pi \nu_p t}](\nu) + \frac{A_p}{2} TF[v_s(t) e^{-2i\pi \nu_p t}](\nu) \\ &= \frac{A_p}{2} (TF[v_s](\nu - \nu_p) + TF[v_s](\nu + \nu_p)) \end{aligned} \quad (15)$$

Bilan : on obtient une composante basse fréquence autour de  $\delta f = f_0 - f$  et une composante haute fréquence  $f_0 + f$ . En général, si le signal n'est pas sinusoidal pur, on aurait obtenu le spectre symétrique en  $f_0$  (partie initialement négative du spectre !)

**Message : non linéarités** C'est une opération non-linéaire, nécessaire pour faire apparaître des nouvelles fréquences dans le spectre.

↓ Comment éliminer la composante haute-fréquence ?

## 2.3 Filtre passe-bas/anti-repliement

**Fonction de transfert** En deuxième année, on a vu la définition de la fonction de transfert  $\underline{H}$  en électrocinétique, comme le rapport des amplitudes complexes en sortie  $\underline{s}$  et en entrée  $\underline{e}$  d'un certain circuit, pour une excitation sinusoidale  $\underline{e} = e_0 \exp j\omega t$ . Reprenons l'exemple du filtre RC passe bas d'ordre 1 [Faire un schéma, la tension se prend aux bornes de C](#).

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad (16)$$

où  $\tau = RC$  le temps caractéristique du système. On dessine l'allure du diagramme de Bode et on rappelle la fréquence de coupure, -20 dB/décade.

**Interprétation en terme de transformée de Fourier** Dans la définition de la fonction de transfert, on a considéré le régime permanent monochromatique. On peut décomposer le signal d'entrée en somme continue de signaux monochromatiques, avec la transformée de Fourier  $\hat{e}$ . Comme le système est linéaire, le système agit sur chaque composante fréquentielle  $\hat{e}$  indépendamment des autres fréquences. Comment agit-il ? Chaque composante fréquentielle  $\omega$  est amplifiée de  $|\underline{H}(j\omega)|$  et déphasée de  $\arg \underline{H}(j\omega)$ . Finalement,

$$\underline{H}(f) = \frac{\hat{s}(f)}{\hat{e}(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau} \quad (17)$$

Ce formalisme est valable pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. Faut-il donner la définition exacte ? Au cas où : Soit un système  $S$  donné, nous noterons  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  deux signaux d'entrée quelconques et  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  les signaux de sortie correspondants. Si la réponse de  $S$  à la sollicitation  $e(t) = \lambda e_1(t) + \mu e_2(t)$  est  $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$ , quels que soient les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$ , alors le système est dit linéaire mathématiquement. Un système dont les caractéristiques ne varient pas au cours du temps est dit *permanent* ou *stationnaire* : une translation dans le temps (retard ou avance) sur la grandeur d'entrée se traduit par une translation identique de la grandeur de sortie. Pour un système permanent, si  $s_1(t)$  est la réponse à la sollicitation  $e_1(t)$ , alors quel que soit  $\tau$ ,  $s_2(t) = s_1(t - \tau)$  est la réponse à  $e_2(t) = e_1(t - \tau)$ .

La fonction de transfert d'un système linéaire invariant dans le temps est le rapport de la transformée de Fourier du signal de sortie sur celui du signal d'entrée.

En fait ce qu'on faisait en étudiant la réponse du filtre à une excitation harmonique c'était de l'analyse de Fourier cachée.

**Optionnel : réponse impulsionnelle** On pourrait parler de *réponse impulsionnelle* On justifie pourquoi on peut utiliser la méthode de la réponse impulsionnelle pour mesurer un diagramme de Bode. Cela consiste à faire  $\hat{e} = 1$  c'est-à-dire envoyer un dirac/une impulsion en entrée. Alors  $\underline{H} = \hat{s}$ .

**Action sur le spectre** Ainsi, on voit l'effet du filtre dans le domaine fréquentiel en superposant le spectre du signal d'entrée et le diagramme de Bode en gain du filtre utilisé : il coupe les hautes fréquences (c'est pas nouveau mais c'est plus pratique d'utiliser la TF pour le voir). D'ailleurs c'est pour ça qu'on peut l'utiliser pour éliminer le bruit haute fréquence.

**Application : filtre anti-repliement** Si le signal analogique possède des fréquences supérieures, il faut faire précéder l'échantillonneur d'un filtre analogique passe-bas anti-repliement, dont la fréquence de coupure est la fréquence de Nyquist, de manière à supprimer toute fausse fréquence. Dans la plupart des cas, ce filtrage est indispensable ; en effet le signal peut soit intégrer des hautes fréquences inutiles pour son exploitation ou être superposé à un bruit qui augmente fortement la fréquence maximale.

## 2.4 Mise en place de la stratégie

**Interprétation spectrale de la détection synchrone** On s'appuie sur le schéma du diaporama ou on peut dessiner les spectres au tableau. Le principe de la détection synchrone consiste à multiplier le signal de fréquence inconnue  $f_{\text{mesurée}}$  par un signal de fréquence connue  $f$  pour obtenir un signal contenant une composante harmonique à  $2f + \delta f$  et une composante harmonique à  $\delta f$ . On filtre ensuite ce signal à l'aide d'un passe-bas afin de ne conserver que la composante à  $\delta f$ . On accède ainsi facilement à l'écart en fréquence du à l'effet Doppler.

**Choix des paramètres** Après le traitement analogique, on s'attend à avoir un signal de fréquence quelques Hz, on peut choisir un filtre passe-bas de fréquence de coupure 100 Hz. Pour respecter le critère de Shannon, on doit échantillonner à  $f_e > 2f_{\text{max}}$  soit  $f_e \sim 200$  Hz. Ainsi,  $\delta f/f_e \sim 10^{-2}$  ce qui est mesurable.

Pour permettre une détection synchrone efficace, il faut :

- Connaître précisément  $f_0$  et assurer sa stabilité pendant l'acquisition. C'est le cas pour le GBF utilisé
- Que le filtre passe-bas soit sélectif tout en conservant une réponse plate autour de  $\delta f$ . C'est le cas des filtres de Butterworth, dont la vocation est d'avoir une réponse plate dans la bande passante. *Un passe-bas d'ordre 1 ne suffit généralement pas. un filtre Butterworth d'ordre 2 peut suffire.*

Cela permet également d'éliminer une grande partie du bruit car seuls les composantes fréquentielles proches de  $f_0$  ne sont pas filtrées.

**Autre application de la détection synchrone : Détection par corrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit** Cette méthode de détection est très puissante. Elle est par exemple très utilisée dans le domaine de la radioastronomie pour déterminer les pulsations radioélectriques d'étoiles lointaines, sachant que les signaux captés sont fortement entachés de bruit. La fréquence du signal à détecter n'étant en général pas connue, la réalisation pratique d'une telle détection se fait grâce à l'utilisation de générateur possédant la fonction de modulation en fréquence. Le terme de modulation correspond à la possibilité de faire varier linéairement la fréquence du signal de sortie du générateur en fonction du temps. La vitesse d'exploration d'un domaine de fréquence peut aussi en général être choisie.

## Filtrage numérique

On appelle filtre numérique un système utilisé pour modifier la distribution fréquentielle d'un signal numérique selon des spécifications données. Par rapport aux filtres analogiques, les filtres numériques apportent des avantages en fiabilité (gestion des erreurs, sécurité du stockage sous forme binaire) et adaptabilité (programmable). Un filtre numérique peut être vu comme un procédé de calcul permettant de transformer une séquence de nombres d'un signal numérique d'entrée en une seconde séquence de nombres avec la modification voulue du signal. Le problème du filtrage numérique consiste donc à déterminer l'équation régissant cette transformation numérique qui d'une part doit respecter la réponse fréquentielle spécifiée en amont et d'autre part doit être réalisable. Le filtre numérique peut être implantée sous forme de logiciel (algorithme) ou matériel (circuit électronique).

## Conclusion

Résultats importants : Shannon, effet de l'échantillonnage **Ouverture** : Détection synchrone aussi utilisé pour la démodulation d'amplitude, la détection de signaux noyés dans le bruit. Il y a un aspect fondamental en traitement du signal que nous n'avons pas évoqué, c'est comment traiter le bruit. En effet, les signaux d'intérêt sont rarement facilement accessibles, ils sont souvent au milieu d'autres signaux, il va alors falloir les extraire de ce bruit (voir MP24).

## Compléments/Questions

### 2.5 Propriétés de la transformée de Fourier

✍ Appel

#### Propriétés

- TF réciproque. Cela traduit le fait que l'information contenue dans le spectre est la même que celle contenue dans le signal temporel.
- Linéarité. Les exponentielles complexes sont des fonctions propres des opérateurs linéaires. Utilité pour résoudre les PDE linéaires comme l'équation de la chaleur.
- TF d'une fonction monochromatique : dirac. On le comprend car la TF est la décomposition sur la base des fonctions monochromatiques, donc la TF de l'exponentielle de fréquence  $\nu$  ne peut avoir de valeur non nulle qu'en  $\nu$ .
- Convolution-produit. [todo : illustrer graphiquement]
- Translation-modulation. C'est la convolution-produit appliquée à la fonction monochromatique : le spectre est décalé [todo : dessin].
- Inégalité de Heisenberg, lien avec la mécanique quantique. Exemple sur la TF d'une porte.

**Comparaison TF/DSF** (*Pas utile*) Tout comme vu en prérequis pour la décomposition en série de Fourier (DSF), la transformée de Fourier permet de coder l'information connue en domaine temporel dans le domaine fréquentiel. Mais la TF est plus générale car elle peut être appliquée aux signaux non périodiques. [tableau style corentin + graphes].

## Passage

### Plan

### Questions

- Montrez que la TF s'identifie aux séries de Fourier pour les signaux périodiques ? Un signal  $T$ -périodique est le même que lui-même convolué avec un peigne de Dirac de période  $T$ . Donc on peut mettre en facteur un peigne de dirac dans le spectre, qui est ainsi constitué de raies.
- Qu'est-ce que c'est que le produit de convolution ? Comment l'expliquer simplement à un élève ? Pour calculer  $f * g(t)$ , on somme toutes les valeurs  $f(u)$  et  $g(v)$  telles que  $t = u + v$ . Sinon, on peut voir l'effet d'un dirac, qui est de translater, puis on raisonne par superposition puisque le produit de convolution est bilinéaire.
- C'est quoi le critère de Shannon ? Comment on fait une TF numérique ?

- Peut-on reconstituer le spectre par des méthodes numériques s'il y a du repliement ? Je crois pas. On peut pas différencier le vrai signal du signal fantôme.
- Concrètement, comment on fait pour acquérir un signal ?
- Filtrage analogique ou numérique ?
- **Choix de paramètres** Comment on choisit la fréquence d'échantillonnage, la quantification ? Pour l'échantillonnage, on respecte Shannon. Pour la quantification, on adapte le calibre à la grandeur mesurée pour essayer d'utiliser tous les bites et on fait un compromis précision/mémoire sur le nombre de bits.
- Quand est-ce que les TF ne marchent pas ? Fondamentalement, pourquoi ça marche quand c'est linéaire ? C'est une projection sur la base des exponentielles oscillantes, qui sont fonction propre des opérateurs de dérivation. Donc elles évoluent indépendamment
- D'ailleurs on cherche souvent à virer du 50Hz, d'où il sort ?
- Existe-t'il des signaux non causaux ? Physiquement non, mais en on peut réaliser des opérations non causales sur le signal (moyenne glissante) après avoir recueilli tout le signal temporel. Pourquoi l'avoir précisé, alors ?
- Si on ne veut pas abimer le signal, comment pourrait-on faire sans filtre ?
- A propos des systèmes LIT, comment apparaît l'invariance temporelle dans les équations ?
- Écrivez la réponse d'un SLIT à une combinaison linéaire de sinus.
- D'où vient la convention de la bande-passante à -3 dB ? Si je vous dis le mot « puissance », cela vous éclaire-t-il ? Puissance moitié.
- **TF, FFT, DSF** Quelle est la différence entre TF, FFT et DSF ? Qu'est-ce qui fixe la résolution de la FFT ? Qu'est-ce que le critère de Shannon ? Comment faut-il choisir le nombre de points de l'échantillonnage si on prévoit une analyse par la FFT après l'acquisition ? Qu'est-ce qui aurait changé si vous aviez pris un nombre entier de périodes pour calculer la FFT ? Expliquez simplement. Que savez-vous sur les fenêtres de pondération ?
- **Passe-bande** Filtre passe-bande, vous avez parlé de l'application à la radio : comment ? Quelles sont les conditions sur la bande-passante ?  $\Delta\omega = \omega/Q$ . Pour augmenter  $Q$ , il faut augmenter  $L$  et diminuer  $R$ . C'est difficile d'avoir  $Q$  grand avec des composants passifs. Augmenter  $L$  devient encombrant pour la bobine. L'impédance d'entrée à résonance est  $R$  donc la diminuer signifie qu'on s'éloigne du quadripole idéal. De plus,  $f_r = \sqrt{f_h f_l}$ . La fréquence résonante est la moyenne géométrique (le log est la moyenne arithmétique) des fréquences de coupure haute et basse. Intérêt des filtres actifs ? On peut avoir une amplification supérieure à 1 et de grands facteurs de qualité, en utilisant des  $R$  et  $C$  seulement, sans  $L$ .
- **Radio et AM** Vous avez parlé de modulation en amplitude, pourquoi effectuer cette opération ? Taille des antennes nécessaire si on n'effectuait pas de modulation ? Longueur d'onde radio, très grand (100 m). Démodulation synchrone : conditions sur le filtre RC ?  $\tau = RC > \delta f_{max}$ . Principe de la détection synchrone ?
- Montrer le lien entre TF et séries de Fourier si le signal est périodique *i.e.* qu'on a un spectre de raies ?  $f(t)$  est égal à  $f$  convolué avec un peigne de dirac. On passe à la TF.
- Filtrage autre qu'électronique ? Optique de Fourier.
- Sur la formation des créneaux, comment est ce qu'on appelle les oscillations qu'on voit apparaître aux discontinuités ? Phénomène de Gibbs.
- Est-ce qu'il a un filtre d'ordre 1 qui est ni passe-haut ni passe-bas ? Passe tout déphaseur.
- signal non causal ?  $y(t) = x(2t)$ , moyenne glissante.
- Condition sur l'équation différentielle pour la causalité ? Il faut que  $m > n$  *i.e.* la fonction de transfert soit une fraction rationnelle sans partie entière.
- Qu'est-ce qu'un filtre de Butterworth ? Il s'agit d'un filtre qui a une réponse plate dans sa bande passante (c'est souvent le cas pour des filtres du premier ordre, c'est moins évident pour les ordres supérieurs).
- Qu'est-ce qu'un bruit colore ? Des bruits "usuels" ont été définis en selon leur densité spectrale de puissance, lorsque celle-ci se répartit en  $1/f^k$ . Lorsque  $k = 0$  la densité spectrale en puissance est uniforme sur tout le spectre, ce qui correspond à un bruit blanc. Pour  $k = 1$ , on obtient un bruit rose.

- Peut-on définir le rapport signal sur bruit d'une autre façon ? Le rapport signal sur bruit peut être défini de plusieurs façons, soit comme le rapport des énergies du signal informatif et du bruit (préférez parler de puissance), soit par le rapport de leurs amplitudes (ou son carré), soit par le rapport variance de la distribution spectrale lorsqu'elle est connue. L'important dans ce montage c'est de bien poser une définition et de s'y tenir.
- Que dire d'un rapport signal sur bruit nul ? La mesure est mal réalisée.
- Quand on calcule un rapport signal sur bruit, il est plus judicieux de comparer le signal obtenu (signal bruité) au bruit estimé (signal bruité auquel on enlève sa moyenne, c'est-à-dire qu'on ne conserve que ses fluctuations).
- Comment fonctionne la détection synchrone ? C'est une mesure fréquentielle indirecte. On utilise un signal de fréquence connue pour récupérer la fréquence à mesurer (hétérodynage) et on réutilise ce même signal pour effectuer la mesure (détection synchrone)
- Est-ce vrai que le bruit ne contient aucune information ? Réponse : il ne contient peut-être pas l'information qui nous intéresse, mais il peut contenir néanmoins de l'information. Par exemple, le bruit thermique de résistance (Johnson-Nyquist), la densité spectrale de puissance vaut  $4k_BTR$ , ce qui peut donner une information sur la température (si  $k_B$  et  $R$  sont connues), ou bien peut permettre d'évaluer.  $k_B$  Si  $T$  et  $R$  sont connus)
- D'où vient le 20 de la définition de dB ? Le Bel est une unité logarithmique pour un rapport de puissance. Par exemple, en électronique radio-fréquence, il est courant de mesurer la puissance en dBm, définie comme

$$P_{\text{dBm}} = 10 \log \frac{P}{P_0}$$

avec  $P_0 = 1\text{mW}$ . Dans ce cas, le 10 provient simplement du préfixe "déci". En général, le décibel est un rapport de puissance (un atténuateur RF  $-20\text{dB}$  diminue la puissance d'un facteur 100 ). Lorsqu'on l'exprime en fonction d'un rapport de tension, un facteur 2 sort car l'énergie est en  $u^2$ .

- Qu'est-ce qu'un filtre à capacités commutées ? Les circuits à capacités commutées ou circuits SC (en anglais Switched-Capacitor) permettent l'émulation d'une résistance grâce à une capacité associée à des transistors MOS utilisés comme interrupteurs. Ils permettent d'obtenir une résistance variable en fonction de la fréquence d'horloge. Ceci permet de réaliser des filtres dont la fréquence de coupure est fonction de la fréquence d'horloge
- Comment fonctionne le filtre d'une radio FM ? PLL.
- Tu as parlé de la fréquence 1 MHz au delà de laquelle l'AO ne se comporte pas normalement. Que veux-tu dire exactement ? Réponse : la valeur de coupure dépend du gain, c'est le produit gain  $\times$  bande passante qui est documenté par le constructeur. Ensuite, l'AO se comporte simplement comme un filtre passe-bas. Par conséquent, il n'existe pas vraiment de montage passe-haut avec AO (euh si!!!). Le filtre obtenu est nécessairement un passe-bande.
- Tout système linéaire invariant dans le temps peut-il se représenter par une équation différentielle ? Réponse : non, voir la fonction retard
- Pourquoi limiter l'étude théorique aux ordres 1 et 2 ? Réponse : On peut décomposer une fonction de transfert d'ordre supérieur en produit de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Existe-t-il d'autres fonctions d'ordre 1 que passe-bas et passe-haut ? Réponse : oui, passe-tout déphaseur
- Peux-tu donner des exemples de filtrage de signaux non électriques ? Optique de Fourier.

## MP 23 Signal bruit

- Quelle est l'intensité typique du courant entrant dans un AO ? Quel courant fournit la source de tension vu votre choix de valeurs de composants ? Pourquoi calculer la valeur de la rampe au lieu de la mesurer à l'oscilloscope ? Pouvez-vous faire la mesure ? Qu'est-ce qu'on en déduit ? Pourquoi ne pas comparer la valeur obtenue sur l'écran du CAN à une valeur mesurée au multimètre ? Quelle est la fonction des deux portes logiques de l'échantillonneur-bloqueur ? Quelle est la plus importante des deux ? A quoi servent les condensateurs et la diode en amont des portes logiques ? Pouvez-vous réexpliquer quel est votre problème sur l'expérience du critère de Shannon ? Quelle fenêtre vous avez prise ? Une fenêtre, c'est temporel ou spectral ? Ça sert à quoi ? Quelle est l'influence du nombre de points de l'acquisition ? Pouvez-vous effectuer le calcul d'incertitudes pour le nombre de bits de la carte d'acquisition ? Est-ce que c'est possible de filtrer en sortie du CNA pour éliminer le bruit de quantification ? Vous avez mis en évidence le bruit de quantification du CNA en mesurant à l'oscillo, comment être sûrs que ce n'est pas le bruit du CAN de l'oscillo lui-même ?

- Pour le simple rampe, quel est le problème posé par le bruit, comment y remédier ? Pour le choix des AO, à quoi faut-il faire attention ? Qu'est ce que ça change si on a un décalage en tension ? Pour l'échantillonneur-bloqueur, comment faut-il choisir la capacité ? Qu'est ce qui pose problème dans le choix d'une capacité trop faible ? Qu'entendez vous concrètement par problème d'adaptation d'impédance ? Comment est réalisé l'interrupteur ? Comment fonctionne un Thyristor ? Comment peut-on faire des interrupteurs qui commutent rapidement autrement ?
- Pourquoi il y a une forte résistance en entrée du CAN ? Quel est le courant en entrée d'un AO ? Erreur systématique due au temps de commutation (CAN toujours) : modélisation affine, et non linéaire ! Essayer de trouver des explications à la pente trouvée (supérieure à 1). Principe du stockage de l'information sur N bits ? Réexpliquer Shannon : peigne de Dirac et convolution étaient les mots-clés attendus, j'ai mis du temps à comprendre ce qu'ils voulaient me faire dire... Effet Doppler : utilité de la détection hétérodyne ? Comment fonctionnent les cartes d'acquisition qu'on a partout autour de nous ?

## Commentaires