

27 juin 2020

LP24 - Ondes progressives, ondes stationnaires

Gauthier Legrand et Francis Pagaud

27 juin 2020

Bibliographie

- Ondes 2e année, **Brébec** (Hprépa)
- Physique PC-PC*, **Olivier** (Tec Doc)
- Ondes, **Garing** (je n'avais pas la ref)
- http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/ondes_poly_2015.pdf
- <http://pcsi.kleber.free.fr/IPT/doc/py4phys.pdf> : des codes qui s'adaptent facilement pour faire ce que l'on veut.
- Animations made in Thibierge : http://www.etienne-thibierge.fr/cours_ondes.php

Pré-requis :

- Séries de Fourier
- Equations aux dérivées partielles
- Mécanique du point et du solide (TEC)
- Electrocinétique (pour l'analogie)

Table des matières

1	Équation de d'Alembert unidimensionnelle	2
1.1	Équation d'onde	2
1.2	Solutions et propriétés	3
1.3	Étude énergétique	4
2	Découplage espace-temps	4
2.1	La base des ondes stationnaire	4
2.2	Modes propres d'une corde vibrante	4
	Remarques générales	
	Reste à faire diapo python	

Commentaires du jury

- 2015** Les candidats doivent être attentifs à bien équilibrer leur exposé entre ces deux familles d'ondes qui d'ailleurs, ne s'excluent pas entre elles.
- 2009** Il est important de savoir justifier la forme générale d'une onde progressive et d'une onde stationnaire. Si la notion d'impédance est utilisée, il faut préciser pour quel type d'onde elle s'applique.
- 2008** Les notions d'impédance sont rarement maîtrisées. Un milieu unidimensionnel peut aussi être dispersif alors que les candidats n'envisagent trop souvent que des signaux monochromatiques.
- 1999** Les notions d'onde progressive, d'onde stationnaire, doivent être illustrées par des exemples avec des ondes mécaniques ou électromagnétiques. On veillera à distinguer l'onde stationnaire de l'onde stationnaire résonante dans un système fermé.

Introduction

Montrer ce qu'on va regarder avec un long ressort type slinky.

Les exemples d'onde abondent. Aujourd'hui on fait confiance à la 5G, on utilise le Bluetooth de nos portables, blabla. Elles peuvent être parasites mais surtout peuvent transmettre de l'info : on va essayer de comprendre cela.

Problématique :

1 Équation de d'Alembert unidimensionnelle

1.1 Équation d'onde

Source : Hprépa chapitre 2

On déroule le calcul sur l'exemple de la corde. Cadre d'étude **Donner des odg à chaque fois si possible !**

- pas de frottements : $f \simeq 0,25\rho S v^2 \simeq 1 \times L \times 0.5R \times (5)^2 \simeq 10^{-2}$ N alors que le poids est d'environ 1N
- petits angles (ordre 1 uniquement) : AN angle maxi environ 15° donc $\cos =$ et $\sin =$
- poids négligé : la tension c'est le poids de la masse que multiplie l'angle et le poids de la corde totale est
- déplacement transverse uniquement
- pas de raideur : aucune résistance à la torsion

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

De la forme $c = \sqrt{\text{raideur/inertie}}$

Sur slide : Faire l'analogie avec plusieurs domaines en donnant l'odg de c . Cette équation est très générale (attention cependant à distinguer les cas où l'onde est transverse ou longitudinale d'ailleurs c'est quoi pour le modèle du coax ?)

On peut alors définir ce qu'est une onde :

"Une onde est parfois définie comme un champ dont les dérivées spatiales et temporelles sont couplées par une équation aux dérivées partielles... ce qui englobe à peu près toute la physique des milieux continus, et me semble être une définition beaucoup trop large" (E. Thibierge)

Transition : Regardons maintenant comment résoudre cette équation

1.2 Solutions et propriétés

Source : Chapitres 1 et 2

Je propose de ne pas faire le calcul avec le changement de variable car c'est pas très intéressant et ça fait perdre pas mal de temps. On peut quand même dire que ça se démontre plus formellement pour s'attirer des questions

Penser à préciser que ces ondes planes et sphériques ne sont pas réelles, mais des approximations qui marchent bien !

Cette équation d'onde est quand même bien particulière, elle a une relation de structure très simple + elle est invariante par renversement du temps.

Phénoméologiquement on cherche une solution de la $f(x - vt)$ avec v vitesse quelconque *a priori*. En effet l'onde se propage donc regarder un endroit plus tard c'est pareil que de regarder moins loin au même temps.

On injecte ceci dans l'équation de d'Alembert et on trouve que $v = \pm c$ (bon ok c'était évident vu que c'est la seule échelle de vitesse du problème). Par linéarité de l'équation d'une EDP qui est d'ordre 2 on a trouvé toutes les solutions. Pour voir l'onde se propager et l'influence de la tension : <https://www.youtube.com/watch?v=klN2-bCzJb4>. Une autre option pour voir la propagation dans le coax, propre vers 5'00" : <https://www.youtube.com/watch?v=5lCQCcgIIXw>

Pour l'onde progressive sphérique, c'est par ici : <https://engineering.purdue.edu/ME513/animations/spher.htm>.

On a donc formé une base des solutions en ondes progressives. C'est le moment de définir proprement onde progressive :

"Propagation d'une perturbation sans transport de matière en moyenne"

Dans cette étude on se limite aux ondes harmoniques, on cherche alors des fonctions en complexe de la forme $f(x, t) = Ae^{i\omega t}$ et **on trouve la base des OPPH (que l'on discute physiquement !)**

Sur slide : Faire l'analogie avec plusieurs domaines

On généralise à 3 dimensions (avec le laplacien) avec les solutions de la forme $f(\vec{r} \cdot \vec{u} \pm ct)$. On donne alors les solutions pour les ondes acoustiques à symétrie sphérique.

Transition : On a mis aucune source d'absorption, comment peut-on avoir une amplitude qui tend vers 0 à l'infini ?

1.3 Étude énergétique

Source : On ne va pas parler d'impédance ni du couplage entre deux grandeurs, on admet seulement l'expression de l'énergie

On admet l'expression de la densité d'énergie de l'onde : $e = e_c + e_p = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

On remarque que la répartition de l'énergie est la même pour les deux composantes.

Refaire le raisonnement sur la puissance La puissance transmise s'écrit $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot T_0 \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\omega^2}{c} y(x, t)^2$

L'énergie se propage à la vitesse c dans la direction de propagation, et est en valeur moyenne non nulle.

Équation de Poynting ?

Transition : Cette base des solutions ne semblent pas fonctionner pour modéliser une condition aux limites avec un point d'arrêt. Il faut chercher une autre base plus adaptée. Cela vient du fait qu'on regarde des EDP et que les CL sont très importantes

2 Découplage espace-temps

2.1 La base des ondes stationnaire

Source : Hprépa 3.2 On montre la corde de Melde avec le strobo. On voit que dans ce cas, les CL imposent un autre comportement. Il semble qu'on voit des oscillations dans le temps dont l'amplitude dépend uniquement de la position. Il y a découplage entre le temps et l'espace pour l'onde dans la corde de Melde.

Ce découplage se traduit mathématiquement par $f(x, t) = \phi(x)\psi(t)$ attention ici c'est pas comme en méca Q la relation est réelle

On injecte cette solution dans l'équation de d'Alembert.

On trouve alors une autre bases des solutions de l'équation de d'Alembert, qui est en fait équivalente à celles des OPPH $\cos \omega t \cos \frac{c}{\omega} x = \frac{1}{2} (\cos(\omega t - \frac{c}{\omega} x) + \cos(\omega t + \frac{c}{\omega} x))$. Et je trouve cette vidéo pas mal pour passer de l'onde progressive à l'onde stationnaire :

<https://www.youtube.com/watch?v=XYM0k1ctLyM>

Python somme onde Les ondes stationnaires sont cependant très différentes des OPPH car elles ne transportent en moyenne pas d'énergie : calcul de la puissance moyenne.

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \propto \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

Transition : Exploitions alors cette nouvelle base dans le cas de la corde de Melde

2.2 Modes propres d'une corde vibrante

Source :

On montre un peu la corde de Melde pour montrer le comportement, les CL et la résonance. On fait ensuite le calcul, les CL imposent que $f(x, t) = A \frac{\sin k(L-x)}{\sin kL} \cos \omega t$ avec

$k = n\frac{\pi}{L}$ à la résonance on considère que le point d'excitation est un noeud car l'excitation est très faible devant l'amplitude des oscillations

On parle alors de la résonance

On montre la corde de Melde avec un stroboscope (relié à un autre GBF). Prendre le temps de soigner l'arrière-plan avec un panneau.

Petite folie à tester : mettre en input des sommes de signaux à différentes fréquences propres (si pas possible prendre triangle ou carré) et les montrer successivement avec le stroboscope en changeant sa fréquence. Si ça marche pas on peut toujours montrer à la main l'existence d'harmoniques : avec un signal triangle en input de la corde de Melde on ne voit que le mode fondamental (un seul ventre de taille L), mais quand on impose un noeud à $L/3$ on observe encore un ventre de taille $L/3$. dans ce cas la fréquence fondamentale ne peut pas se développer, comme son amplitude est non nulle là où on place un nouveau noeud il y a transmission de l'autre côté et dissipation via le noeud par exemple.

Parler de la linéarité de l'équation qui fait qu'on peut sommer les fréquences ce qui fait naturellement apparaître le formalisme de Fourier. Chaque excitation est un motif sur la corde de Melde qui est de longueur finie, on peut donc en trouver une représentation dans l'espace de Fourier comme superposition de modes propres dont les harmoniques ne sont autres que les multiples de la fréquence du motif initial à savoir $\frac{c}{L}$

Remarque : on a un nombre infini d'oscillateurs couplés donc on s'attend bien à avoir une infinité de modes propres.

Sur slide montrer les spectres pour un clavecin et un piano. Application au timbre d'un instrument : la façon dont on excite la corde change le son. En vidéo çadonne ça pour l'oscillation de la corde : https://www.youtube.com/watch?v=6sgI7S_G-XI. Pour l'analyse des modes et leur sélection en pinçant la corde au bon endroit : <https://www.youtube.com/watch?v=q-Z4kndewSw>. Et pour comparer les différents instruments : <https://www.youtube.com/watch?v=VRAXK4QKJ1Q>, ce qui dépend des conditions initiales. Il y a aussi couplage entre la corde et le reste de l'instrument qui accentue ou tue des harmoniques.

Si le temps le permet on peut introduire avec tout ça la notion de paquet d'onde. Dans le cas général l'espace dans lequel peut se propager l'onde n'est pas limité. On ne peut donc pas recourir à la décomposition en série de Fourier. Cependant les OPPH restent une base des solutions à l'équation de d'Alembert, on peut donc toujours écrire une onde sous la forme $A(x, t) = \int d\omega \tilde{A}(x, \omega) e^{i\omega t - i\frac{c}{\omega}x}$ (et si plus d'Alembert ? conditions de linéarité ? relation de dispersion etc)

Passage de la limite de la corde de Melde $L \rightarrow \infty$: on décompose l'onde en modes propres de fréquences dont le pas est en $1/L$ donc quand on prend la limite $L \rightarrow \infty$ on doit prendre une intégrale et pas une somme.

Conclusion

"Les deux descriptions sont équivalentes, mais comment choisir une représentation plutôt que l'autre ? Quand le milieu est illimité (au moins d'un côté), on privilégiera toujours la description en ondes planes progressives harmoniques. Quand il est limité (aux deux extrémités), on privilégiera plutôt la description en ondes stationnaires, mais cette règle n'a rien d'universel."

Ouvertures possibles : dispersion, réflexion à une interface, analogie corde de Melde avec les cavités résonantes/lévitiation acoustique

Non linéarités dans la corde

Première chose : $\delta m = \mu ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx$. Physiquement on sent que cette non linéarité va diminuer l'amplitude des oscillations puisque cela revient à augmenter l'inertie de la corde : la masse du tronçon entre x et $x + dx$ augmente quand $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ augmente. L'inertie augmente donc le mouvement est plus difficile.

Deuxième chose : la tension n'est pas constante. En effet la linéarisation aux petits angles devient fautive. Apparemment ça impose que la fréquence de la tension soit le double de celle de l'onde, et on obtient ensuite une équation paramétrique.

Troisième chose : la gravité, l'élasticité et l'épaisseur de la corde n'ont pas été pris en compte.

- On parle ici de l'énergie traversant une section de corde/câble et non pas la variation d'énergie dans un élément de volume.
- bien dire que l'OPPH a une extension infinie en temps et en espace
- ne pas faire l'amalgame entre mode propre (ex : vibration libre de la corde après l'avoir frappée) et mode résonant (ex : vibration forcée de la corde par un pot vibrant)

Commentaires pendant la prépa aux oraux

—

Questions

- Est-ce que l'onde progressive est vraiment définie par une équation différentielle. Est-ce vraiment le cas ? C'est une EDP car il faut un couplage entre le temps et l'espace

- Argument pour dire $f(x - ct)$ pourquoi c ? analyse dimensionnelle

- Montrer que $f(x - ct)$ se propage selon les x croissants (s'entraîner à répondre à ça, c'est facile mais pas simple à expliquer. Argument de Gauthier : on se place à phase constante $f(x, t) = f(x + dx, t + dt)$ $dx/dt = +c$

- Hypothèse importante sur le modèle de la corde : infiniment fine.
- Hypothèse sans frottements/poids négligeable : Justification plus solide ? ODG.
- Dans l'expérience introductive : Comment voit-on que la corde est soumise à la gravité (forme) et comment le corriger (terme source dans d'Alembert).
- Dispersion dans le coaxial ? On voit qu'il n'y en a pas en superposant les deux motifs et en voyant que les motifs sont exactement les mêmes.
- Pourquoi on a qqch proche de c ? Perturbation EM, la vitesse c'est c . Pourquoi on a la différence ? Les incertitudes devraient être préparées en préparation pour prévoir les questions. Après il y a l'indice du milieu.
- Arguments d'analyse dimensionnelle : retrouver c avec les inductances et capacités (réviser le lien entre les temps et R, L et C , unités du Henry et du Farad)
- Sinusoïdales = monochromatiques. Irréelles mais en les superposant par linéarité, on en déduit des ondes réelles, des paquets d'onde. Et pourquoi le cos dans la corde de Melde ? Puisque c'est ce que l'on envoie.
- Quel mot-clé ? La linéarité des équations / théorème de superposition / Fourier
- Sur la relation de structure, pourquoi on a celle-là ? Onde non-dispersive.
- On a T grâce à la masse sur la corde. Quelles sont les hypothèses ? Poulie parfaite, pas de frottements, pas de poids de la corde.

Définition de la vitesse de groupe théorique ? Dans quelle leçon pourrait-on la placer ? Si k est complexe, quelle partie intervient dans v_g ? Vous avez mentionné d'autres types d'équation à part d'Alembert, pouvez-vous en citer d'autres (câble coax avec pertes) ? Quelle est la relation de dispersion pour le câble coaxial avec pertes ? Définition exacte de la dispersion ? Que se passe-t-il dans le câble s'il y a de l'absorption ou de la dispersion ? En quel matériau est fait l'isolant du câble ? $v_g = dw/dk$, on l'applique dans la propagation avec dispersion. Câble coaxial : en général, isolant = PE

corde de Melde : Quelle fréquence aviez-vous théoriquement ? Pourquoi avoir obtenu une fréquence moitié ? Pourquoi la corde n'explose pas (hypothèse des petits angles plus valables, du coup la formule de la résonance ne s'applique plus) ? Câble coax : pouvez-vous réexpliquer quels sont les deux signaux ? Quelle est la différence entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe ? Que mesurez-vous ici ? Comment mesurer seulement la vitesse de phase ? Est-ce que l'ordre de grandeur de la célérité mesurée ici est bonne ? (vitesse de groupe) (en envoyant une sinusoïde et en mesurant le décalage)

comment fonctionne un RLC mètre ? Analogies entre oscillateur forcé amorti et circuit RLC série pour les résonances ? Y'a-t-il une résonance si sortie aux bornes de l'inductance ?